

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

---

Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

---

Е. В. ЛАНОВЕНКО    М. С. ПОРТНОЙ    В. В. ФЕДОРОВ

**СБОРНИК ЗАДАЧ И ПРАКТИКУМ  
ПО ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ**

**СТАТИЧЕСКИЕ И СТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ**

Учебное пособие

Санкт-Петербург  
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»  
2018

УДК 537.86 (07)

ББК В336я7

Л22

**Лановенко Е. В., Портной М. С., Федоров В. В.**

Л22 Сборник задач и практикум по теории электромагнитного поля. Статистические и стационарные поля: учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2018. 106 с.

ISBN 978-5-7629-2418-4

Содержит основные типы задач по потенциальным полям. Приведены контрольные домашние задания по изучаемым разделам курса «Теории электромагнитного поля». Рассмотрено практическое решение задач по темам: электростатическое поле, электрическое и магнитное поле постоянного тока. Даны методические рекомендации по решению контрольных заданий.

Предназначено для студентов высших учебных заведений электротехнических и радиотехнических специальностей очной и заочной форм обучения. Может быть полезно инженерно-техническим работникам этой области знаний.

УДК 537.86 (07)

ББК В336я7

Рецензенты: кафедра теоретических основ электротехники Петербургского государственного университета путей сообщения Императора Александра I; д-р техн. наук, проф. С. А. Башарин (СПб ГУКиТ).

Утверждено  
редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия

ISBN 978-5-7629-2418-4

© СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2018

## **ВВЕДЕНИЕ**

Настоящее пособие призвано научить студентов решать задачи по одному из разделов курса «Теоретические основы электротехники», в частности «Теория электромагнитного поля». Данное пособие является частью полного курса теории электромагнитного поля, касающееся теории полей постоянного тока.

Умение решать задачи имеет одно из главных значений в изучении названного курса. Помочь студентам получить навыки в решении задач, применить теорию на практике – главная цель пособия.

Перечень предложенных для решения задач содержит все основные разделы теории электромагнитного поля постоянного тока. Часть сформулированных задач представляет только намеченный путь решения в общем виде. Некоторые задачи предлагают решения с числовыми данными. Во всех задачах показано, как в решении используются теоретические законы, описывающие электромагнитное поле.

Часть разделов включает в себя краткие теоретические сведения по частным случаям электромагнитного поля, что облегчает поиск нужных параметров и величин.

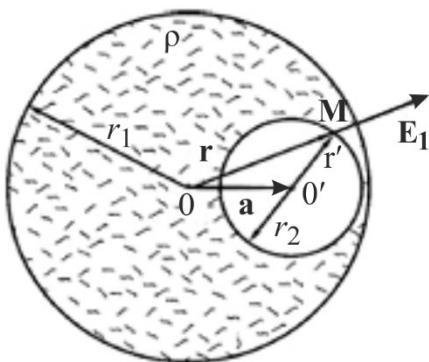
Наличие в пособии типовых задач с подробным решением делает возможным использование его при самостоятельном изучении курса не только для студентов очного отделения высших учебных заведений, но и студентами заочных отделений.

Содержание пособия соответствует программе курса по теории электромагнитного поля и ориентировано на учебник [1].

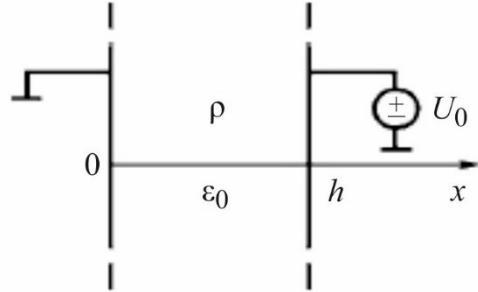
# 1. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО СТАТИЧЕСКИМ И СТАЦИОНАРНЫМ ПОЛЯМ

## 1.1. Электростатическое поле

1.1. Заряд распределен с постоянной объемной плотностью  $\rho = 10^{-6}$  Кл/ $m^3$  в области, ограниченной двумя цилиндрическими поверхностями, радиусы которых  $r_1$  и  $r_2$  ( $r_1 > r_2$ ). Оси цилиндров параллельны, расстояние между ними  $a = 2$  см (рис. 1.1). Диэлектрическая проницаемость среды везде  $\epsilon_0$ . Показать, что поле внутри цилиндра меньшего радиуса однородно и равно  $E = \frac{1}{2\epsilon_0} \rho a$ , где вектор  $a$  направлен от оси большего к оси меньшего цилиндра.



*Рис. 1.1*



*Рис. 1.2*

1.2. В области, ограниченной двумя бесконечными параллельными пластинами, распределен заряд с постоянной объемной плотностью  $\rho = \text{const}$  (рис. 1.2). Расстояние между пластинами  $h$ . Диэлектрическая проницаемость равна  $\epsilon_0$ . Потенциал правой пластины  $U_0$ , левая пластина заземлена. Найти распределение потенциала и напряженности поля.

1.3. В условии задачи 1.2 правая пластина заземлена, объемная плотность заряда  $\rho(x) = a(x - h/3)$ , диэлектрическая проницаемость равна  $\epsilon$ . Найти распределение потенциала, напряженности поля, поверхностные плотности свободного заряда на пластинах и связанного заряда в диэлектрике.

1.4. В условии задачи 1.3 распределение заряда  $\rho(x) = \rho_0[1 - (x/h)^2]$ , где  $\rho_0$  – постоянная. Расстояние между пластинами  $2h$ , начало координат в центре системы. Найти распределение потенциала и построить график  $U(x)$ , счи-тая  $\rho_0 = 10^{-6}$  Кл/ $m^3$ ,  $h = 2$  см.

1.5. Область поля ограничена четырьмя бесконечно длинными металлическими пластинами (рис. 1.3). Одна пара параллельных пластин заземлена, потенциал другой пары равен  $U_0$ . Диэлектрическое заполнение однородно. Найти распределение потенциала  $U(x, y)$ .

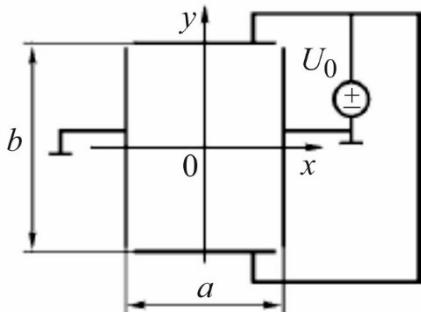


Рис. 1.3

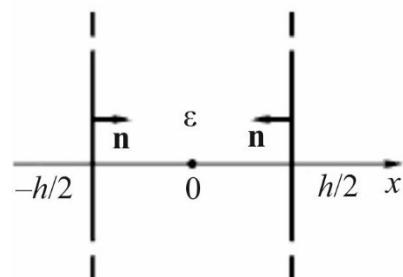


Рис. 1.4

1.6. В области, ограниченной двумя параллельными металлическими пластинами (рис. 1.4), экспериментально установлено распределение потенциала  $U(x) = a(b^2/4 - x^2)$ . Здесь  $a$  и  $b$  – некоторые постоянные. Расстояние между пластинами  $h$ , диэлектрическая проницаемость  $\epsilon = \text{const}$ . Найти распределение зарядов.

1.7. Распределение потенциала в сферической системе координат задано функцией  $U(r) = \frac{b}{4\pi\epsilon r} e^{-ar}$ , где  $a$  и  $b$  – постоянные. Найти распределение зарядов.

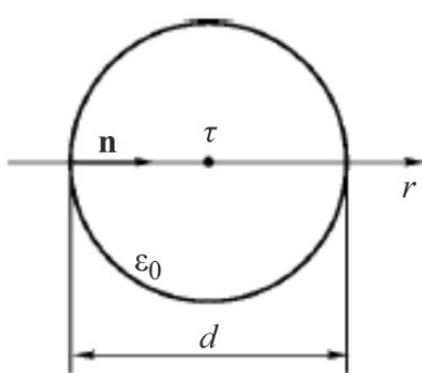


Рис. 1.5

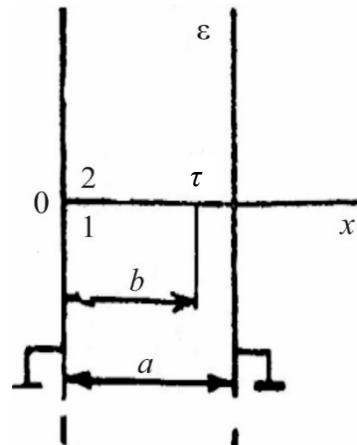


Рис. 1.6

1.8. Зондовые исследования длинной цилиндрической полости (рис. 1.5), вдоль оси которой натянута тонкая металлическая нить, показали, что потенциал в ней изменяется по закону  $U(r) = a(b \ln r - r^2)$ , где  $a$  и  $b$  – постоянные,  $r$  – расстояние от оси полости до точки наблюдения. Диаметр полости  $d$ ,

стенки металлические. Найти: 1) объемную плотность заряда в полости; 2) линейную плотность заряда на нити; 3) поверхностную плотность заряда на стенках полости, считая  $a = 282 \text{ В} / \text{м}^2$ ,  $b = 6,4 \text{ м}^2$ ,  $d = 2,5 \text{ см}$ .

1.9. Тонкая нить, несущая заряд с линейной плотностью  $\tau$ , расположена между заземленными металлическими параллельными плоскостями (рис. 1.6). Диэлектрическое заполнение однородно. Найти распределение потенциала.

1.10. В однородное электрическое поле  $E_0$  внесен эллипсоид вращения с главными полуосами  $x_0$  и  $r_0$  (рис. 1.7). Угол между осью  $x$  и направлением  $E_0$

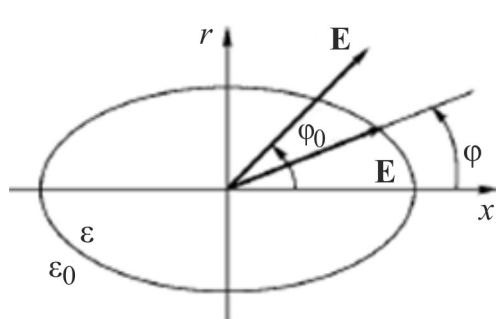


Рис. 1.7

равен  $\phi_0$ . Диэлектрическая проницаемость материала эллипсоида  $\epsilon$ , а окружающей среды –  $\epsilon_0$ . Коэффициенты деполяризации вдоль главных осей  $N_x$  и  $N_r$ . Найти электрическое поле внутри эллипсоида и его энергию во внешнем поле.

1.11. Точечный заряд  $Q$  расположен вблизи заземленной проводящей сферы радиуса  $r_0$  на расстоянии  $h$  (рис. 1.8). Построить модель для расчета поля вне сферы и найти напряженность поля в точке  $M$ .

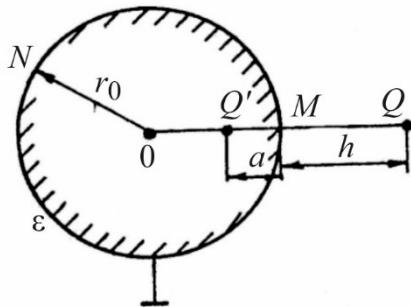


Рис. 1.8

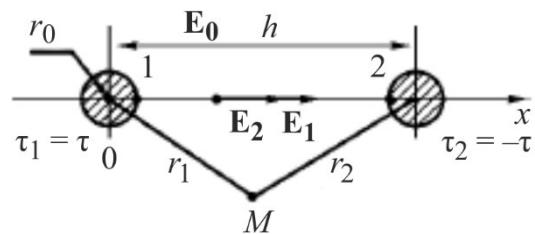


Рис. 1.9

1.12. Расстояние между осями проводов воздушной двухпроводной линии (рис. 1.9)  $h$ , радиусы сечения проводов  $r_0 \ll h$ . Линейные плотности зарядов проводов  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ . Расстояние от точки наблюдения  $M$  до проводов  $r_1$  и  $r_2$ . Найти: 1) погонную емкость линии; 2) механическую силу, действующую на единицу длины проводов при напряжении  $U_0$ .

1.13. Длинный тонкий провод, радиус сечения которого  $r_0$  находится в однородном диэлектрике с проницаемостью  $\epsilon$  на расстоянии  $h$  от проводящей

плоскости, причем  $r_0 \ll h$  (рис. 1.10). Найти: 1) погонную емкость конструкции; 2) распределение поверхностного заряда на плоскости при напряжении «провод–плоскость», равном  $U_0$ .

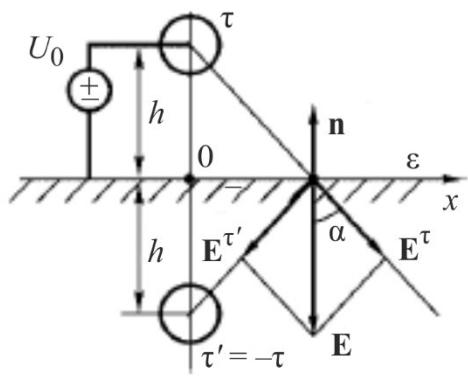


Рис. 1.10

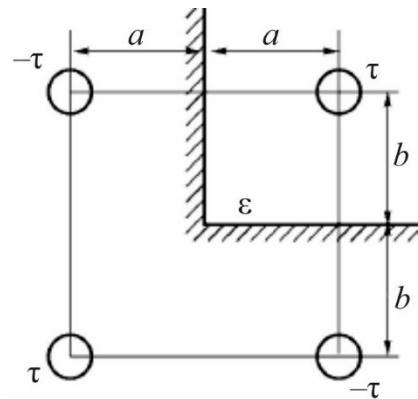


Рис. 1.11

1.14. Длинный тонкий провод, радиус сечения которого  $r_0$ , расположен внутри двугранного угла, образованного проводящими плоскостями (рис. 1.11). Расстояния  $a$  и  $b$  значительно превышают  $r_0$ . Заполнение – однородный диэлектрик с проницаемостью  $\epsilon$ . Найти погонную емкость конструкции.

1.15. Провода двухпроводной линии находятся в диэлектриках, разделенных плоской границей (рис. 1.12). Радиус сечения проводов  $r_0$  значительно меньше расстояний  $a$  и  $b$ . Найти погонную емкость линии.

1.16. Длинный тонкий проводник радиуса  $r_0$  расположен внутри металлического цилиндра радиуса  $a$  так, что их оси не совпадают (рис. 1.13). Радиус сечения провода значительно меньше радиуса цилиндра  $a$  и расстояния до его стенки  $h$ . Найти погонную емкость конструкции.

1.17. Коаксиальный цилиндрический кабель имеет двухслойную изоляцию из диэлектриков с проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  (рис. 1.14). Радиус сечения внутреннего электрода (жилы)  $r_1$ , внутренний радиус внешнего электрода (оболочки)  $r_3$ , радиус границы раздела диэлектрических слоев  $r_2$ .

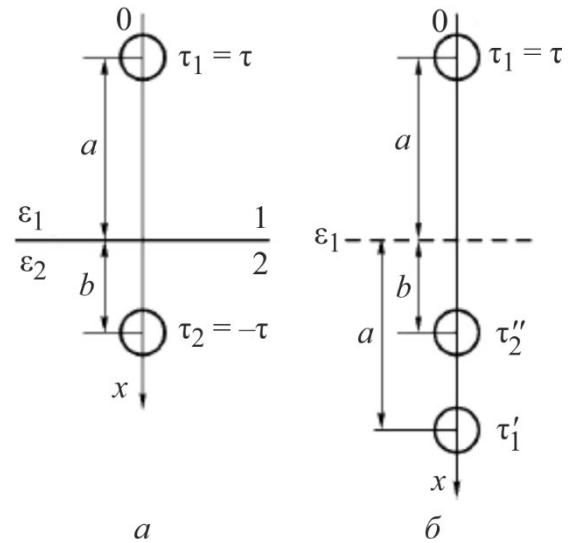


Рис. 1.12

Найти погонную емкость кабеля, считая:  $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$ ,  $\epsilon_2 = 4\epsilon_0$ ,  $r_1 = 3$  мм,  $r_2 = 4$  мм.

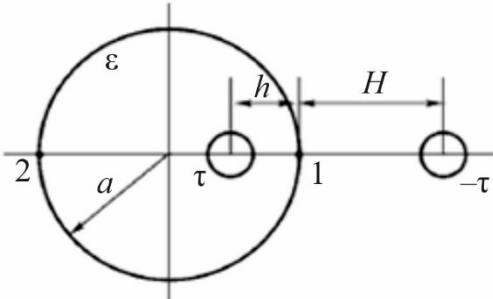


Рис. 1.13

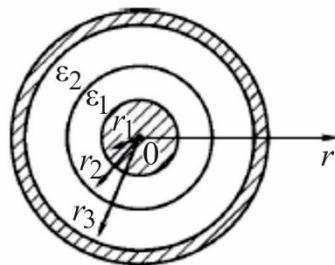


Рис. 1.14

1.18. Область между двумя длинными цилиндрическими электродами радиусами  $r_1$  и  $r_2$  кусочно однородна (рис. 1.15). Проницаемости диэлектриков  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ . Найти погонную емкость конструкции, считая  $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$ ,  $\epsilon_2 = 4\epsilon_0$ ,  $r_1 = 2$  мм,  $r_2 = 4$  мм.

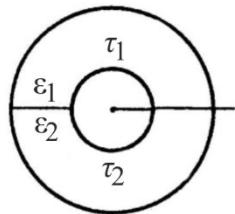


Рис. 1.15

1.19. Две параллельные равномерно заряженные нити длиной  $l$  расположены в воздухе на расстоянии  $h$  друг от друга (рис. 1.16). Линейные плотности зарядов на нитях соответственно равны  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Найти напряженность поля на оси  $y$ , проходящей через середины нитей. Численное решение выполнить в точке  $y = 5$  см, считая  $\tau_1 = -\tau_2 = 10^{-8}$  Кл/м,  $l = 1$  м,  $h = 10$  см.

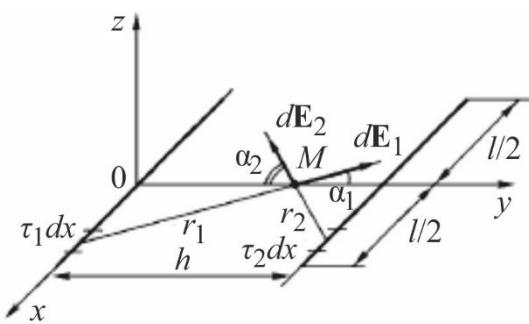


Рис. 1.16

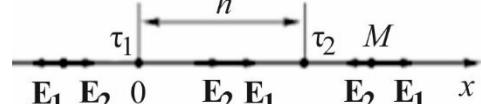


Рис. 1.17

1.20. Две параллельные бесконечно длинные нити расположены в воздухе на расстоянии  $h$  (рис. 1.17). Нити заряжены равномерно, причем  $\tau_1 > 0$ , а  $\tau_2 < 0$ . Найти положение нейтральной линии, в точках которой напряженность поля равна нулю.

1.21. Равномерно заряженная нить длиной  $2l$  расположена в воздухе. Линейная плотность заряда  $\tau$  (рис. 1.18). Найти потенциал поля нити.

1.22. Заряд  $q$  распределен равномерно с линейной плотностью  $\tau$  по тонкому кольцу радиуса  $r_0$  (рис. 1.19). Окружающая среда – воздух. Найти потенциал поля кольца.

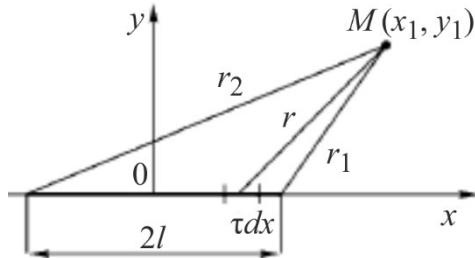


Рис. 1.18

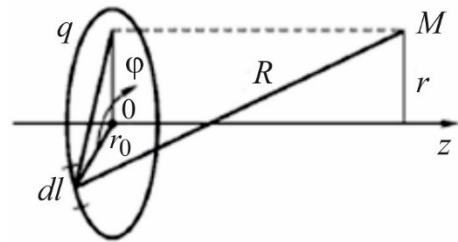


Рис. 1.19

1.23. Два тонких концентрических кольца лежат в одной плоскости (рис. 1.20). Радиусы колец  $r_1 = r_0$  и  $r_2 = 2r_0$ , а заряды соответственно  $q_1 = -q$  и  $q_2 = kq$  ( $k > 0$ ). Найти положение нейтральных точек, в которых напряженность поля равна нулю.

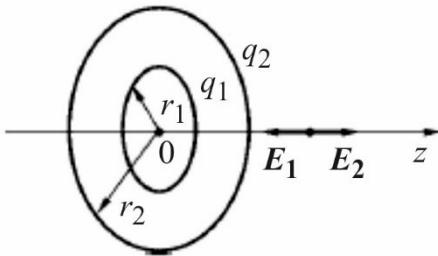


Рис. 1.20

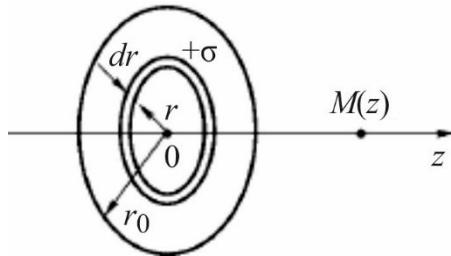


Рис. 1.21

1.24. Заряд распределен равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma$  по тонкому диску радиуса  $r_0$  (рис. 1.21). Окружающая среда – воздух. Найти потенциал и напряженность поля на оси  $z$ . Численное решение выполнить в точке  $z = 10$  см, приняв  $r = 10$  см,  $\sigma = 10^{-6}$  Кл/м.

1.25. Двойной электрический слой имеет форму тонкого диска радиуса  $r_0$ . Толщина диска  $h \ll r_0$ . Заряды распределены равномерно, так что  $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma = \text{const}$ . Найти потенциал и напряженность поля на оси  $z$ .

1.26. Между двумя бесконечными параллельными металлическими пластинами находятся заряженная плоскость и двойной электрический слой. Координаты соответствующих плоскостей указаны на рис. 1.22. Поверхностная плотность зарядов поверхности  $\sigma$ , мощность двойного слоя  $\tau$ . Потенциал

правой пластины равен  $U_0$ , левая пластина заземлена. Диэлектрическая проницаемость среды везде равна  $\epsilon_0$ . Найти распределение потенциала  $U(x)$ .

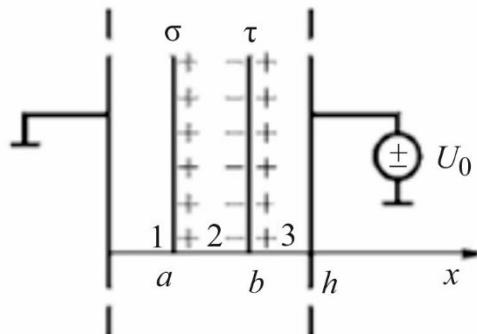


Рис. 1.22

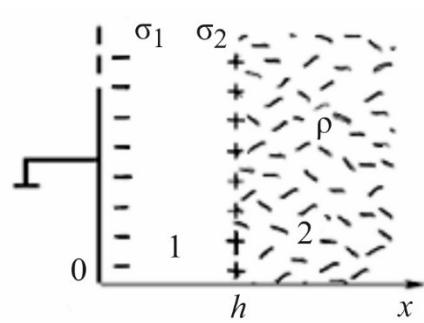


Рис. 1.23

1.27. В полубесконечной области (рис. 1.23) находится нейтральная система зарядов следующего строения: 1) при  $x = 0$  – заряженная металлическая плоскость  $\sigma_1 = -\sigma$ ; 2) при  $x = h$  – заряженная поверхность  $\sigma_2 = 0,8\sigma$ ; 3) при  $x > h$  – объемный заряд  $\rho = \frac{0,2\sigma}{h}e^{-(x/h-1)}$ . Среда – однородный диэлектрик  $\epsilon = \text{const}$ .

Найти распределение потенциала  $U(x)$  и напряженности поля  $E(x)$ .

1.28. Плоский конденсатор заполнен тремя слоями диэлектрика. Толщина слоев  $h_1$ ,  $h_2$  и  $h_3$ , диэлектрические проницаемости  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$ . Наименьшую электрическую прочность имеет третий слой, допустимое значение напряженности поля в котором  $E_{3\Delta}$ .

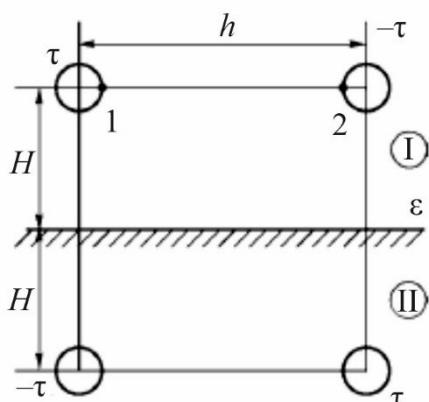


Рис. 1.24

Найти наибольшее (допустимое) значение напряжения  $U_{\Delta}$  конденсатора, считая  $h_1 = 4 \text{ мм}$ ,  $h_2 = 1 \text{ мм}$ ,  $h_3 = 0,5 \text{ мм}$ ,  $\epsilon_1 = 7\epsilon_0$ ,  $\epsilon_2 = 3,5\epsilon_0$ ,  $\epsilon_3 = \epsilon_0$ ,  $E_{3\Delta} = 30 \text{ кВ/см}$ .

1.29. Металлический эллипсоид вращения находится в однородном диэлектрике с проницаемостью  $\epsilon$ . Большая полуось  $a$ , малая –  $b$ . Найти емкость эллипсоида.

1.30. Двухпроводная линия находится над поверхностью земли (рис. 1.24). Расстояние между осями проводов  $h$ , высота подвеса  $H$ , радиусы проводов  $r_0 \ll h$ ,  $r_0 \ll H$ . Найти погонную емкость линии «с учетом влияния земли».

1.31. В изоляции коаксиального кабеля, проницаемость которого  $\epsilon_1$ , находится малое включение с проницаемостью  $\epsilon_2$ , имеющее форму шара радиусом  $r_0$ . Напряжение кабеля  $U_0$  (рис. 1.25). Найти силу  $F$ , действующую на шар, считая  $\eta_1 = 1 \text{ см}$ ,  $r_2 = 5 \text{ см}$ ,  $r_0 = 0,1 \text{ см}$ ,  $\epsilon_1 = 2,25\epsilon_0$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_0$ ,  $U_0 = 3000 \text{ В}$ .

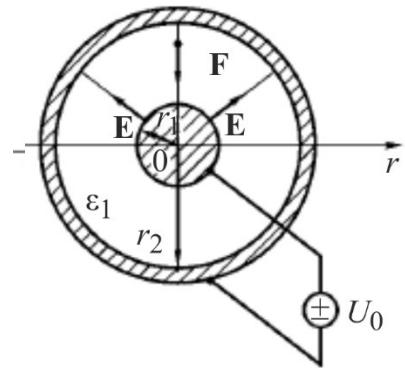


Рис. 1.25

Кабель с двухслойной изоляцией (рис. 1.26) находится под напряжением  $U$ , имеет размеры  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ . Задана относительная диэлектрическая проницаемость слоев изоляции  $\epsilon_r$ . Заданы дополнительно напряженность пробоя  $E_{\text{пр}}$  и напряжение пробоя  $U_{\text{пр}}$  изоляции, линейная  $\tau$  и поверхностная плотность  $\sigma$  заряда. Ниже приведены варианты заданий.

1.32. Дано  $U = 500 \text{ В}$ ,  $r_1 = 6 \text{ мм}$ ,  $r_2 = 9 \text{ мм}$ ,  $r_3 = 12 \text{ мм}$ ,  $\epsilon_1 = 6$ ,  $\epsilon_2 = 3$ . Найти  $\sigma$  на поверхности жилы и оболочки кабеля. Рассчитать и построить зависимость напряженности от радиуса  $E(r)$ .

1.33. Дано  $U = 800 \text{ В}$ ,  $r_1 = 4 \text{ мм}$ ,  $r_2 = 6 \text{ мм}$ ,  $r_3 = 10 \text{ мм}$ ,  $E_{\text{пр}1} = 60 \text{ кВ/см}$ ,  $E_{\text{пр}2} = 40 \text{ кВ/см}$ ,  $\epsilon_1 = 5$ ,  $\epsilon_2 = 3$ . Определить  $U_{\text{пр}}$ , рассчитать и построить зависимость потенциала  $U(r)$ .

1.34. Дано  $\tau = 10^{-6} \text{ Кл/м}$ ,  $r_1 = 2 \text{ мм}$ ,  $r_2 = 4 \text{ мм}$ ,  $E_{1\max} = E_{2\max}$ ,  $\epsilon_1 = 4$ ,  $\epsilon_2 = 3$ . Определить напряжение  $U$ , приложенное к кабелю, радиус  $r_3$ , рассчитать и построить зависимость поляризованности от радиуса  $P(r)$ .

1.35. Дано  $U = 1000 \text{ В}$ ,  $r_1 = 4 \text{ мм}$ ,  $r_2 = 8 \text{ мм}$ ,  $r_3 = 14 \text{ мм}$ ,  $\epsilon_1 = 6$ ,  $\epsilon_2 = 4$ ,  $l = 800$ . Определить заряд  $q$ , рассчитать и построить зависимость потенциала  $U(r)$ .

1.36. Дано  $\tau = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}$ ,  $r_1 = 5 \text{ мм}$ ,  $r_2 = 8 \text{ мм}$ ,  $r_3 = 16 \text{ мм}$ ,  $\epsilon_1 = 4$ ,  $\epsilon_2 = 3$ . Найти емкость кабеля на единицу длины  $C_0$ , напряжение, приложенное к кабелю  $U$ , рассчитать и построить зависимость поляризованности  $P(r)$ .

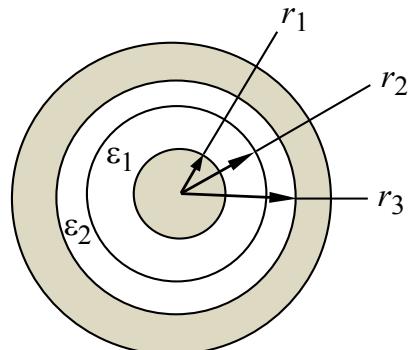


Рис. 1.26

Двухпроводная линия, состоящая из параллельных цилиндрических проводов (рис. 1.27), находится под напряжением  $U$  в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_r$ . Радиус провода  $r_0$ , расстояние между проводами  $d$ . Ниже приведены варианты заданий.

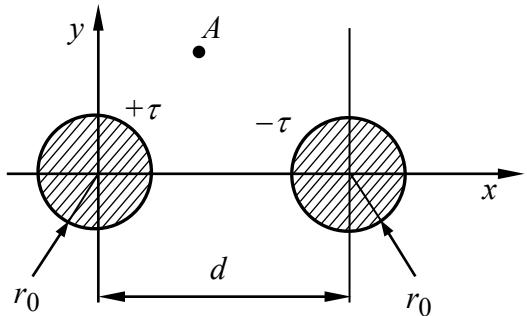


Рис. 1.27

1.37. Дано  $U = 500$  В,  $r_0 = 5$  мм,  $\epsilon_r = 1$ ,  $d = 50$  мм. Найти  $\tau$ , построить зависимость  $U(x)$  при  $r_0 \leq x \leq d - r_0$ .

1.38. Дано  $U = 600$  В,  $\epsilon_r = 2$ ,  $r_0 = 10$  мм,  $d = 30$  мм. Найти емкость на единицу линии  $C_0$ , рассчитать и построить зависимость  $E(x)$  при  $r_0 \leq x \leq d - r_0$ .

1.39. Дано  $\tau = 2 \cdot 10^{-6}$  Кл/м,  $\epsilon_r = 1$ ,  $r_0 = 20$  мм,  $d = 50$  мм. Найти потенциал  $U_A$  в точке  $A$  с координатами  $X_A = 0$ ,  $Y_A = 40$  мм, рассчитать и построить зависимость электрического смещения  $D(x)$  при  $r_0 \leq x \leq d - r_0$ .

1.40. Дано  $U = 800$  В,  $\epsilon_r = 4$ ,  $r_0 = 6$  мм,  $d = 60$  мм. Найти  $\sigma_A$  в точке  $A$  при  $X_A = r_0$ ,  $X_A = -r_0$ ,  $Y_A = 0$ , рассчитать и построить зависимость напряженности  $E(x)$  при  $-r_0 \leq x \leq d + r_0$ .

1.41. Дано  $U = 400$  В,  $r_0 = 15$  мм,  $d = 40$  мм,  $\epsilon_r = 2$ ,  $l = 400$  м. Найти  $q$ , рассчитать и построить зависимость поляризованности  $P(x)$  при  $r_0 \leq x \leq d - r_0$ .

Над плоской металлической поверхностью (рис.

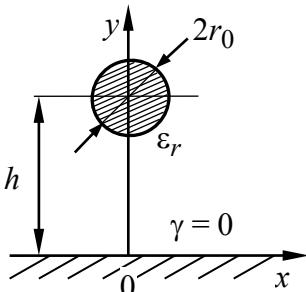


Рис. 1.28

1.28) на высоте  $h$  параллельно поверхности расположен круглый провод радиусом  $r_0$ . Диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon_r$ . Напряжение между проводом и проводящей поверхностью  $U$ . Ниже приведены варианты заданий.

1.42. Дано  $r_0 = 6$  мм,  $h = 50$  мм,  $\epsilon_r = 2$ ,  $U = 400$  В.

Найти напряженность  $E_A$  в точке  $A$  при  $X_A = 0$ ,  $Y_A = 25$  мм.

Рассчитать и построить зависимость  $\sigma(x)$  при  $-50$  мм  $\leq x \leq 50$  мм.

1.43. Дано  $r_0 = 20$  мм,  $h = 30$  мм,  $\epsilon_r = 1$ ,  $\tau = 10^{-5}$  Кл/м. Определить напряжение  $U$ , рассчитать и построить зависимость  $E(y)$  при  $0 \leq y \leq h - r_0$ .

1.44. Дано  $r_0 = 10$  мм,  $h = 50$  мм,  $\epsilon_r = 4$ ,  $U = 500$  В. Найти  $\sigma_A$  в точке  $A$  при  $X_A = 0$ ,  $Y = h - r$ , рассчитать и построить зависимость потенциала  $U(y)$  при  $0 \leq y \leq h - r_0$ .

1.45. Дано  $r_0 = 5$  мм,  $h = 25$  мм,  $\tau = 3 \cdot 10^{-6}$  Кл/м,  $\epsilon_r = 1$ ,  $\sigma_A = 0$  при  $X_A = 0$ ,  $Y_A = 0$ . Рассчитать и построить зависимость  $D(y)$  при  $0 \leq y \leq h - r_0$ .

1.46. Дано  $r_0 = 8$  мм,  $h = 30$  мм,  $U = 250$  В,  $\epsilon_r = 2$ . Найти  $E_A$  в точке  $A$  при  $X_A = 0$ ,  $Y_A = 20$  мм, рассчитать и построить зависимость  $P(y)$  при  $0 \leq y \leq h - r_0$ .

Над плоской границей раздела двух диэлектриков с  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  на высоте  $h$  находится заряженный провод с линейной плотностью заряда  $\tau$  (рис. 1.28), проводящий лист заменен диэлектриком  $\epsilon_2$ . Радиус провода  $r_0$ . Ниже приведены варианты заданий.

1.47. Дано  $\epsilon_1 = 4$ ,  $\epsilon_2 = 2$ ,  $h = 100$  мм,  $\tau = 2 \cdot 10^{-5}$  Кл/м,  $r_0 = 5$  мм. Найти поверхностную плотность связанных зарядов  $\sigma_{\text{св}A}$  на границе раздела диэлектриков в точке  $A$  ( $X_A = 100$  мм,  $Y_A = 0$ ). Рассчитать и построить зависимость напряженности  $E(y)$  при  $-200 \leq y \leq 200$ ,  $x = 0$ .

1.48. Дано  $\epsilon_1 = 2$ ,  $\epsilon_2 = 4$ ,  $h = 80$  мм,  $r_0 = 5$  мм,  $\tau = 3 \cdot 10^{-7}$  Кл/м. Найти электрическое смещение  $D_A$  в точке  $A$  при  $X_A = 0$ ,  $Y_A = h - r_0$  мм, рассчитать и построить зависимость напряженности  $E(x)$  при  $0 \leq x \leq 60$  мм,  $y = 0$ .

1.49. Дано  $\epsilon_1 = 3$ ,  $\epsilon_2 = 2$ ,  $h = 60$  мм,  $r_0 = 4$  мм,  $\tau = 5 \cdot 10^{-7}$  Кл/м. Найти потенциал  $U_A$  в точке  $A$  при  $X_A = 60$  мм,  $Y_A = 60$  мм, рассчитать и построить зависимость  $D(y)$  при  $-60$  мм  $\leq y \leq 60$  мм,  $x = 30$  мм.

1.50. Дано  $\epsilon_1 = 2$ ,  $\epsilon_2 = 1$ ,  $h = 40$  мм,  $r_0 = 4$  мм,  $\tau = 4 \cdot 10^{-7}$  Кл/м. Найти поляризованность  $P_A$  в точке  $A$  при  $X_A = 0$ ,  $Y_A = 30$  мм, рассчитать и построить зависимость  $\sigma_{\text{св}}(x)$  при  $-40$  мм  $\leq x \leq 40$  мм,  $y = 0$ .

1.51. Дано  $\epsilon_1 = 2$ ,  $\epsilon_2 = 5$ ,  $h = 50$  мм,  $r_0 = 4$  мм,  $\tau = 3 \cdot 10^{-7}$  Кл/м. Найти  $E_A$  в точке  $A$  при  $X_A = 50$  мм,  $Y_A = -50$  мм, рассчитать и построить зависимость потенциала  $U(y)$  при  $-50$  мм  $\leq y \leq 50$  мм и  $x = 0$ .

Бесконечный цилиндр из диэлектрика  $\epsilon_2$  находится в равномерном электрическом поле (рис. 1.29) с напряженностью  $E_0$ . Диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon_1$ . Радиус цилиндра  $R$ . Ниже приведены варианты задач, в которых необходимо найти заданные величины.

1.52. Дано  $E_0 = 10^4$  В/м,  $\epsilon_1 = 2$ ,  $\epsilon_2 = 2$ ,  $R = 2$  см. Найти напряженность поля в точке  $A$  с координатами  $x_A = 3$  см,  $y_A = 3$  см. Рассчитать и построить зависимость потенциала  $U(x)$  при  $0 \leq x \leq 10$  мм,  $y = 0$ .

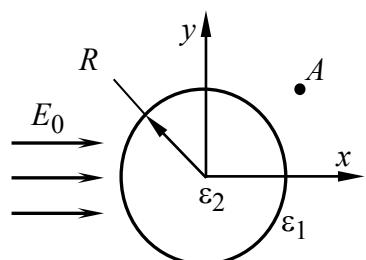


Рис. 1.29

1.53. Дано  $R = 1,5$  см,  $E_0 = 3 \cdot 10^4$  В/м,  $\epsilon_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 3$ .

Найти  $\sigma_A$  при  $x_A = -R$ ,  $y_A = 0$ . Рассчитать и построить зависимость  $D(x)$  при  $y = 0$ ,  $-R \leq x \leq 3R$ .

1.54. Дано  $R = 3,5$  см,  $E_0 = 4 \cdot 10^4$  В/м,  $\epsilon_1 = 2$ ,  $\epsilon_2 = 1$ . Рассчитать и построить зависимости  $E(x)$  при  $-R \leq x \leq R$  и потенциала  $U(x)$  при  $-2R \leq x \leq R$ .

1.55. Дано  $R = 4$  см,  $E_0 = 5 \cdot 10^4$  В/м,  $\epsilon_1 = 3$ ,  $\epsilon_2 = 1$ .

Найти  $E_A$  в точке  $A$  при  $X_A = 0$ ,  $Y_A = 5$  см. Рассчитать и построить зависимость поляризованности  $P(x)$  при  $y = 0$ ,  $-2R \leq x \leq 2R$ .

1.56. Дано  $R = 6$  см,  $E_0 = 6 \cdot 10^4$  В/м,  $\epsilon_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 4$ . Рассчитать и построить зависимости  $D(x)$  при  $-R \leq x \leq R$  и потенциала  $U(y)$  при  $x = 0$ ,  $-R \leq y \leq 3R$ .

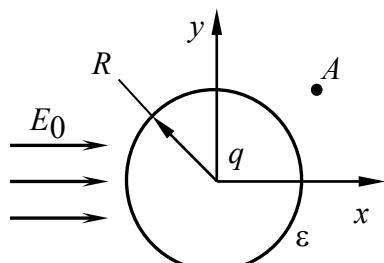


Рис. 1.30

Металлический шар радиусом  $R$  находится в однородном электрическом поле напряженностью  $E_0$  (рис. 1.30). Шар находится в среде с  $\epsilon_r$ . Заряд шара  $q$ . Ниже приведены варианты задач, в которых необходимо найти заданные величины.

1.57. Дано  $R = 5$  см,  $E_0 = 5 \cdot 10^4$  В/м,  $\epsilon_r = 2$ ,

$q = 10^{-8}$  Кл. Найти напряженность поля  $E_A$  в точке  $A$  с координатами  $X_A = 6$  см,  $Y_A = 6$  см. Рассчитать и построить зависимость потенциала  $U(x)$  при  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq 3R$ .

1.58. Дано  $R = 2,5$  см,  $E_0 = 4 \cdot 10^4$  В/м,  $\epsilon_r = 1$ ,  $q = 0$ . Найти напряжение  $U_A$  в точке  $A$  при  $X_A = 3$  см,  $Y_A = 3$  см. Рассчитать и построить зависимость напряженности  $E(x)$  при  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq 3R$ .

1.59. Дано  $R = 3,5$  см,  $E_0 = 2 \cdot 10^4$  В/м,  $\epsilon_r = 3$ ,  $q = 0$ . Найти  $\sigma_A$  при  $X_A = -R$ ,  $Y_A = 0$ . Рассчитать и построить зависимость  $D(x)$  при  $y = 0$ ,  $-3R \leq x \leq 3R$ .

1.60. Дано  $R = 1,5$  см,  $E_0 = 10^4$  В/м,  $\epsilon_r = 3$ ,  $q = 0$ . Найти поляризованность  $P_A$  в точке  $A$  при  $X_A = 3$  см,  $Y_A = 3$  см. Рассчитать и построить зависимость  $D(x)$  при  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq 3R$ .

1.61. Дано  $R = 5,5$  см,  $E_0 = 10^5$  В/м,  $\epsilon_r = 4$ ,  $q = 10^{-9}$  Кл. Найти потенциал  $U_A$  в точке  $A$  при  $X_A = 6$  см,  $Y_A = 6$  см. Рассчитать и построить зависимость  $P(x)$  при  $y = 0$ ,  $-3R \leq x \leq 0$ .

Шар из диэлектрика радиусом  $R$  (рис. 1.31) находится в равномерном поле напряженностью  $E_0$  в среде с  $\epsilon_1$ . Диэлектрическая проницаемость шара  $\epsilon_2$ . Заряд шара  $q$ . Ниже приведены варианты задач, в которых необходимо найти заданные величины.

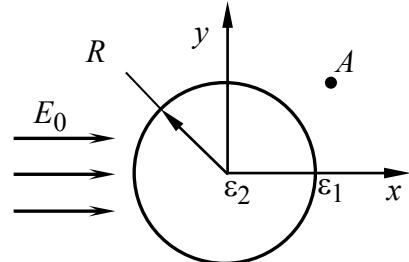


Рис. 1.31

1.62. Дано  $R = 4$  см,  $E_0 = 10^5$  В/м,  $\epsilon_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 4$ ,  $q = 10^{-8}$  Кл. Найти потенциал  $U_A$  в точке  $A$  при  $X_A = 5$  см,  $Y_A = 5$  см. Рассчитать и построить зависимость  $E(x)$  при  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq 3R$ .

1.63. Дано  $R = 5$  см,  $\epsilon_1 = 2$ ,  $\epsilon_2 = 1$ ,  $q = 0$ ,  $E_0 = 5 \cdot 10^4$  В/м. Найти поверхностную плотность связанных зарядов  $\sigma_{\text{св}A}$  в точке  $A$  при  $X_A = R$ ,  $Y_A = 0$ . Рассчитать и построить зависимость потенциала  $U(x)$  при  $y = 0$ ,  $-3R \leq x \leq 3R$ .

1.64. Дано  $R = 3,5$  см,  $\epsilon_1 = 2$ ,  $\epsilon_2 = 4$ ,  $q = 0$ ,  $E_0 = 4 \cdot 10^4$  В/м. Найти  $E_A$  в точке  $A$  при  $X_A = 2R$ ,  $Y_A = 0$ . Построить зависимость  $P(x)$  при  $-3R \leq x \leq 0$ ,  $y = 0$ .

1.65. Дано  $R = 2,5$  см,  $\epsilon_1 = 3$ ,  $\epsilon_2 = 1$ ,  $q = 0$ ,  $E_0 = 3 \cdot 10^4$  В/м. Найти поляризованность  $P_A$  при  $X_A = 3$  см,  $Y_A = 3$  см. Рассчитать и построить зависимость  $D(x)$  при  $-R \leq x \leq 3R$ ,  $y = 0$ .

Плоский конденсатор с двухслойным диэлектриком (рис. 1.32) находится под напряжением  $U$ . Толщина слоев изоляции  $d_1$  и  $d_2$ . Относительная диэлектрическая проницаемость изоляции  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ . Площадь пластины  $S$ . Ниже приведены варианты задач, в которых необходимо найти заданные величины.

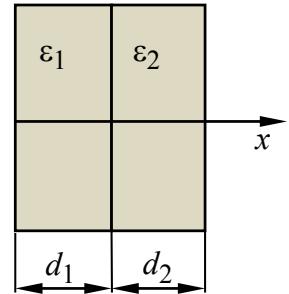


Рис. 1.32

1.66. Дано  $U = 1000$  В,  $d_1 = d_2 = 2$  мм,  $\epsilon_1 = 2$ ,  $\epsilon_2 = 4$ ,  $S = 40$  см $^2$ . Найти заряд конденсатора  $q$ . Рассчитать и построить зависимость потенциала  $U(x)$ .

1.67. Дано  $d_1 = d_2 = 1$  мм,  $U = 800$  В,  $S = 50$  см $^2$ ,  $\epsilon_1 = 3$ ,  $\epsilon_2 = 2$ . Найти поверхностную плотность заряда  $\sigma$ . Рассчитать и построить зависимость поляризованности  $P(x)$ .

1.68. Дано  $d_1 = 2,5$  мм,  $d_2 = 2,5$  мм,  $E_{\text{пр}1} = 40$  кВ/см,  $E_{\text{пр}2} = 80$  кВ/см,  $\epsilon_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 4$ . Найти напряжение пробоя изоляции  $U_{\text{пр}}$ . Рассчитать и построить зависимость поляризованности  $P(x)$ .

1.69. Дано  $d_1 = d_2 = 4$  мм,  $\epsilon_1 = 3$ ,  $\epsilon_2 = 2$ ,  $E_2 = 2 \cdot 10^5$  В/м,  $S = 40$  см<sup>2</sup>. Найти заряд  $q$ . Рассчитать и построить зависимость электрического смещения  $D(x)$ .

1.70. Дано  $d_1 = 2$  мм,  $d_2 = 1$  мм,  $\epsilon_1 = 4$ ,  $\epsilon_2 = 3$ ,  $E_1 = 4 \cdot 10^5$  В/м. Найти напряжение  $U$ , приложенное к конденсатору. Построить зависимость  $P(x)$ .

## 1.2. Электрическое поле постоянного тока

1.71. Плоский конденсатор заполнен несовершенным диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$  и удельной проводимостью  $\gamma = \gamma_1 - ax$ , где  $a$  – константа;  $x$  – координатная ось, перпендикулярная пластинам. Расстояние между пластинами  $h$ , напряжение конденсатора  $U_0$ . Найти напряженность электрического поля, распределение свободных и связанных объемных зарядов.

1.72. Между электродами сферического конденсатора находится несовершенный диэлектрик, удельная проводимость которого  $\gamma = a/r$ , где  $a$  – константа,  $r$  – координата, отсчитываемая от центра конденсатора. Радиусы внутреннего и внешнего электродов  $r_1$  и  $r_2$  соответственно. Ток утечки конденсатора равен  $I$ . Найти: 1) распределение потенциала в изоляции, считая, что внешний электрод заземлен; 2) сопротивление утечки, считая  $a = 10^{-5}$  Ом<sup>-1</sup>,  $r_1 = 1$  см и  $r_2 = 5$  см.

1.73. В коаксиальном кабеле с двухслойной изоляцией радиусы сечения внутренней жилы, границы раздела слоев и оболочки соответственно равны:  $r_1 = 1$  см,  $r_2 = 1,5$  см,  $r_3 = 2$  см. Удельная проводимость первого слоя изоляции  $\gamma_1 = 10^{-8}$  См/м, для второго слоя  $\gamma_2 = 10^{-9}$  См/м. Напряжение кабеля  $U_0 = 1000$  В. Найти: 1) сопротивление изоляции и ток утечки на единицу длины кабеля; 2) удельную проводимость  $\gamma$  однослойной изоляции с тем же значением сопротивления.

1.74. Двухпроводная линия проходит сквозь плоский слой несовершенного диэлектрика толщиной  $a$ . Расстояние между осями проводов  $h$ , радиусы сечения  $r_0 \ll h$ . Найти ток утечки через слой диэлектрика, если его удельная проводимость  $\gamma$ , а напряжение линии  $U_0$ .

1.75. При пробое изолятора высоковольтной линии передачи через заземлитель, имеющий форму полусфера радиуса  $r_0 = 1,5$  м, проходит ток короткого замыкания  $I = 200$  А. Удельная проводимость заземлителя значи-

тельно больше удельной проводимости грунта  $\gamma = 10^{-2}$  См/м. Найти: 1) сопротивление заземления; 2) шаговое напряжение вблизи заземлителя, приняв длину шага  $h = 0,8$  м.

1.76. В качестве заземлителя для электрической установки используется металлический шар радиуса  $r_0 = 5$  см. Расстояние от центра шара до поверхности равно  $h$ . Удельная проводимость грунта  $\gamma = 10^{-2}$  См/м. Найти сопротивление заземления в трех случаях: 1)  $h = 0$ ; 2)  $h = 30$  см; 3)  $h \gg r_0$ .

1.77. К плоской проводящей шайбе подводится напряжение  $U_0 = 1$  В при помощи двух радиально расположенных электродов (рис. 1.33). Размеры шайбы  $r_1 = 20$  мм,  $r_2 = 60$  мм, толщина  $h = 1$  мм. Удельная проводимость материалов шайбы  $\gamma_1 = 6 \cdot 10^3$  См/м,  $\gamma_2 = 4 \cdot 10^3$  См/м существенно меньше проводимости материала электродов. Найти ток  $i_0$ , протекающий по шайбе.

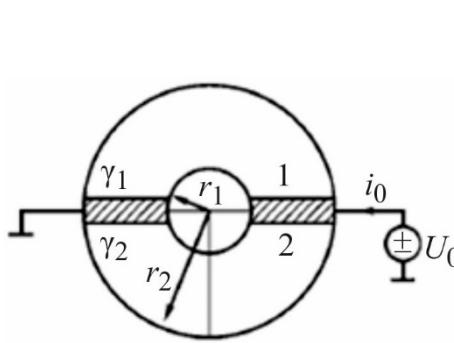


Рис. 1.33

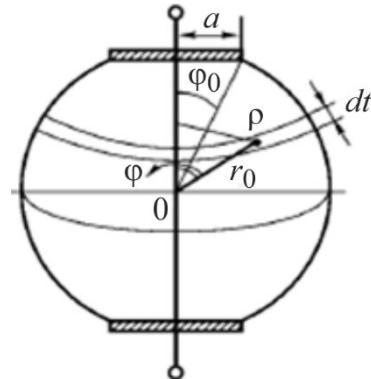


Рис. 1.34

1.78. Сфера радиуса  $r_0 = 5$  см выполнена из тонкого металлического листа толщины  $h = 1$  мм. Дисковые электроды радиусом  $a = 0,2$  см находятся на полюсах сферы (рис. 1.34). Удельная проводимость стали  $\gamma = 10^7$  См/м. Найти сопротивление сферы.

Коаксиальный кабель с несовершенной двухслойной изоляцией (см. рис. 1.26) находится под напряжением  $U$ , имеет размеры  $r_1, r_2, r_3$ . Удельная проводимость слоев изоляции  $\gamma_1, \gamma_2$ . Ниже приведены варианты задач, в которых необходимо найти заданные величины.

1.79. Дано  $r_1 = 5$  мм,  $r_2 = 8$  мм,  $r_3 = 10$  мм,  $\gamma_1 = 2 \cdot 10^{-12}$  См/м,  $\gamma_2 = 3 \times 10^{-12}$  См/м,  $U = 800$  В. Найти ток утечки на единицу длины кабеля.

1.80. Дано  $r_1 = 6$  мм,  $r_2 = 9$  мм,  $r_3 = 12$  мм,  $\gamma_1 = 10^{-13}$  См/м,  $\gamma_2 = 5 \cdot 10^{-12}$  См/м,  $U = 1000$  В. Рассчитать и построить зависимость  $E(r)$ .

1.81. Дано  $r_1 = 4$  мм,  $r_2 = 8$  мм,  $r_3 = 12$  мм,  $U = 600$  В,  $\gamma_1 = 2 \cdot 10^{-12}$  См/м,  $\gamma_2 = 4 \cdot 10^{-12}$  См/м. Рассчитать и построить зависимость плотности тока от радиуса  $J(r)$ .

1.82. Дано  $r_1 = 10$  мм,  $r_2 = 15$  мм,  $r_3 = 20$  мм,  $\gamma_1 = 2 \cdot 10^{-12}$  См/м,  $\gamma_2 = 2 \times 10^{-12}$  См/м. При  $r = 10$  мм напряженность электрического поля  $E = 10^5$  В/м. Найти напряжение, приложенное к кабелю.

1.83. Дано  $r_1 = 4$  мм,  $r_2 = 7$  мм,  $r_3 = 10$  мм,  $\gamma_1 = 6 \cdot 10^{-13}$  См/м,  $\gamma_2 = 3 \times 10^{-13}$  См/м. При  $r = 10$  мм плотность тока утечки  $J = 10^{-10}$  А/м<sup>2</sup>. Найти напряжение  $U$  между жилой и оболочкой кабеля.

Плоский конденсатор с двухслойным несовершенным диэлектриком (рис. 1.32) находится под напряжением  $U$ . Толщина слоев изоляции  $d_1$  и  $d_2$ . Удельная проводимость слоев изоляции  $\gamma_1, \gamma_2$ . Относительная диэлектрическая проницаемость изоляции  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ . Площадь пластин  $S$ . Ниже приведены варианты задач, в которых необходимо найти заданные величины.

1.84. Дано  $U = 1000$  В,  $S = 30$  см<sup>2</sup>,  $d_1 = d_2 = 1$  мм,  $\epsilon_1 = 2$ ,  $\epsilon_2 = 4$ ,  $\gamma_1 = 5 \times 10^{-12}$  См/м,  $\gamma_2 = 2,5 \cdot 10^{-12}$  См/м. Определить ток утечки конденсатора  $I_{\text{ут}}$ . Рассчитать и построить зависимость потенциала  $U(x)$ .

1.85. Дано  $U = 800$  В,  $d_1 = d_2 = 2$  мм,  $\epsilon_1 = 2$ ,  $\epsilon_2 = 4$ ,  $\gamma_1 = 3 \cdot 10^{-12}$  См/м,  $\gamma_2 = 6 \cdot 10^{-12}$  См/м,  $S = 30$  см<sup>2</sup>. Рассчитать емкость конденсатора  $C$ , рассчитать и построить зависимость напряженности  $E(x)$ .

1.86. Дано  $U = 600$  В,  $d_1 = 1$  мм,  $d_2 = 3$  мм,  $\epsilon_1 = 4$ ,  $\epsilon_2 = 2$ ,  $\gamma_1 = 2 \cdot 10^{-12}$  См/м,  $\gamma_2 = 4 \cdot 10^{-12}$  См/м. Найти напряжения, приложенные к каждому слою изоляции  $U_1$  и  $U_2$ . Рассчитать плотность тока утечки  $J_{\text{ут}}$ .

1.87. Дано  $d_1 = d_2 = 1$  мм,  $\epsilon_1 = 3$ ,  $\epsilon_2 = 5$ ,  $\gamma_1 = 5 \cdot 10^{-13}$  См/м,  $\gamma_2 = 10^{-12}$  См/м, напряженность в первом слое изоляции  $E_1 = 10^5$  В/м. Рассчитать напряжение, приложенное к конденсатору. Построить зависимость потенциала  $U(x)$ .

1.88. Дано  $U = 900$  В,  $d_1 = d_2 = 4$  мм,  $S = 40$  см<sup>2</sup>,  $\epsilon_1 = 3$ ,  $\epsilon_2 = 2$ ,  $\gamma_1 = 10^{-13}$  См/м,  $\gamma_2 = 2 \cdot 10^{-13}$  См/м. Рассчитать сопротивление утечки  $R_{\text{ут}}$  и емкость конденсатора  $C$ .

Двухпроводная линия (рис. 1.27) находится в слабо проводящей среде с удельной проводимостью  $\gamma$  под напряжением  $U$ . Радиус провода  $r_0$ , расстояние между проводами  $d$ . Ниже приведены варианты заданий.

1.89. Дано  $U = 100$  В,  $\gamma = 10^{-6}$  См/м,  $d = 100$  мм,  $r_0 = 10$  мм. Найти ток утечки на единицу длины линии  $I_{\text{ут}}$ . Рассчитать и построить зависимость напряженности электрического поля  $E(x)$ .

1.90. Дано  $U = 200$  В,  $\gamma = 10^{-8}$  См/м,  $d = 80$  мм,  $r_0 = 4$  мм. Рассчитать потенциал в точке  $A$  с координатами  $X_A = 20$  мм,  $Y_A = 0$  и проводимость утечки на единицу длины линии  $G_{\text{ут}}$ .

1.91. Дано  $U = 100$  В,  $\gamma = 10^{-5}$  См/м,  $d = 60$  мм,  $r_0 = 6$  мм. Рассчитать максимальную плотность тока утечки на единицу длины проводов.

1.92. Дано  $U = 80$  В,  $\gamma = 4 \cdot 10^{-6}$  См/м,  $d = 40$  мм,  $r_0 = 4$  мм. Найти плотность тока в точке  $A$  с координатами  $X_A = 20$  мм,  $Y_A = 0$ . Рассчитать и построить зависимость  $E(x)$  при  $r_0 \leq x \leq d - r_0$ .

1.93. Дано  $U = 30$  В,  $\gamma = 8 \cdot 10^{-3}$  См/м,  $d = 140$  мм,  $r_0 = 12$  мм. Найти проводимость на единицу длины линии  $G_0$ . Рассчитать и построить зависимость потенциала  $U(x)$ .

Над плоской поверхностью с высокой проводимостью  $\gamma \rightarrow \infty$  (см. рис. 1.28) на высоте  $h$  в среде с удельной проводимостью  $\gamma$  расположен провод радиусом  $r_0$ . Напряжение между проводом и проводящей поверхностью  $U$ . Ниже приведены варианты заданий.

1.94. Дано  $r_0 = 5$  мм,  $\gamma = 6 \cdot 10^{-3}$  См/м,  $h = 100$  мм,  $U = 20$  В. Найти ток утечки на единицу длины провода  $I_{\text{ут}}$ . Рассчитать и построить зависимость плотности тока  $J(y)$ .

1.95. Дано  $r_0 = 6$  мм,  $h = 60$  мм,  $\gamma = 10^{-2}$  См/м,  $U = 30$  В. Найти плотность тока  $J_A$  в точке  $A$  при  $X_A = 0$ ,  $Y_A = 0$ . Рассчитать и построить зависимость напряженности электрического поля  $E(y)$  при  $0 \leq y \leq h - r_0$ .

1.96. Дано  $r_0 = 5$  мм,  $h = 30$  мм,  $\gamma = 8 \cdot 10^{-4}$  См/м,  $J_{\max} = 100$  А/м<sup>2</sup>. Найти приложенное напряжение  $U$  и  $I_{\text{ут}}$  на единицу длины линии.

1.97. Дано  $r_0 = 6$  мм,  $h = 70$  мм,  $\gamma = 6 \cdot 10^{-3}$  См/м,  $U = 100$  В. Рассчитать и построить зависимость потенциала  $U(y)$  при  $x = 0$ .

В проводящей среде  $\gamma_1$  находится проводящий цилиндр радиуса  $R$ , изготовленный из материала с  $\gamma_2$ . Цилиндр находится в однородном электрическом поле напряженностью  $E_0$ . Вектор  $E_0$  направлен перпендикулярно оси цилиндра. Ниже приведены варианты заданий.

1.98. Дано  $\gamma_1 = 10^{-2}$  См/м,  $\gamma_2 = 2 \cdot 10^{-2}$  См/м,  $R = 10$  мм,  $E_0 = 100$  В/м.

Найти ток, проходящий через 1 м длины цилиндра.

1.99. Дано  $R = 20$  мм,  $\gamma_1 = 5 \cdot 10^{-3}$  См/м,  $\gamma_2 = 2 \cdot 10^{-3}$  См/м,  $E_0 = 200$  В/м.

Рассчитать и построить зависимость потенциала  $U(x)$  при  $0 \leq x \leq 3R$  (ось  $x$  начинается на оси цилиндра и совпадает по направлению с  $E_0$ ). Найти плотность тока внутри цилиндра.

1.100. Дано  $E_0 = 300$  В/м,  $\gamma_1 = 2 \cdot 10^{-4}$  См/м,  $\gamma_2 = 10^{-4}$  См/м,  $R = 15$  мм.

Рассчитать и построить зависимость плотности тока  $J(x)$  при  $0 \leq x \leq 3R$ . Найти напряженность поля внутри цилиндра.

1.101. Дано  $E_0 = 500$  В/м,  $\gamma_1 = 2 \cdot 10^{-4}$  См/м,  $\gamma_2 = 4 \cdot 10^{-4}$  См/м,  $R = 24$  мм.

Найти максимальную плотность тока у поверхности цилиндра. Определить потенциал точки  $A$  при  $X_A = R$ ,  $Y_A = R$ .

В проводящей среде с  $\gamma_1$  находится проводящий шар с  $\gamma_2$ . Радиус шара  $R$ . Напряженность однородного поля, в котором находится шар,  $E_0$ . Ниже приведены варианты заданий.

1.102. Дано  $\gamma_1 = 10^{-2}$  См/м,  $\gamma_2 = 3 \cdot 10^{-2}$  См/м,  $R = 10$  мм,  $E_0 = 50$  В/м. Рассчитать и построить зависимость  $U(x)$  при  $-3R \leq x \leq 3R$ . Ось  $x$  начинается в центре шара и совпадает по направлению с  $E_0$ .

1.103. Дано  $R = 30$  мм,  $E_0 = 20$  В/м,  $\gamma_1 = 10^{-2}$  См/м,  $\gamma_2 = 2 \cdot 10^{-2}$  См/м.

Найти ток через поперечное сечение шара. Определить разность потенциалов между точками  $A$  и  $B$  с координатами точек  $X_A = -R$ ,  $Y_A = 0$ ,  $X_B = R$ ,  $Y_B = 0$ .

1.104. Дано  $R = 25$  мм,  $E_0 = 500$  В/м,  $\gamma_1 = 2 \cdot 10^{-3}$  См/м,  $\gamma_2 = 10^{-3}$  См/м.

Найти плотность тока внутри шара  $J$ . Построить зависимость  $E(x)$  при  $-R \leq x \leq 3R$ .

1.105. Дано  $R = 16$  мм,  $E_0 = 60$  В/м,  $\gamma_1 = 5 \cdot 10^{-3}$  См/м,  $\gamma_2 = 10^{-2}$  См/м. Рассчитать и построить зависимость плотности тока  $J(x)$  при  $-R \leq x \leq 2R$ .

Сферический заземлитель (рис. 1.35) находится на глубине  $h$  в грунте с удельной проводимостью  $\gamma$ . Радиус заземлителя  $R_0$ . Проводимость материала, из которого выполнен заземлитель,  $\gamma_3 \gg \gamma$ . В грунт растекается ток  $I$ . Ниже приведены варианты заданий.

1.106. Дано  $h = 4$  м,  $\gamma = 2 \cdot 10^{-2}$  См/м,  $R_0 = 0,5$  м,  $I = 1000$  А. Найти разность потенциалов между точками  $A$  и  $B$ , если  $R = 4$  м.

1.107. Дано  $h = 3,5$  м,  $R_0 = 0,4$  м,  $\gamma = 6 \times 10^{-3}$  См/м,  $R = 4$  м,  $U_A - U_B = 40$  В. Найти ток заземления  $I$ .

1.108. Дано  $h = 6$  м,  $R_0 = 0,6$  м,  $\gamma = 5 \cdot 10^{-3}$  См/м,  $I = 1500$  А. Рассчитать и построить зависимость напряженности поля  $E(x)$ .

Заземлитель (рис. 1.36) выполнен в виде полусфера радиуса  $R_0$ , находится в грунте с удельной проводимостью  $\gamma$ . Задан ток заземлителя  $I$ . Ниже приведены варианты заданий.

1.109. Дано  $R_0 = 0,5$  м,  $\gamma = 5 \cdot 10^{-3}$  См/м,  $I = 600$  А. Найти проводимость заземления  $G_3$ , рассчитать и построить зависимость напряженности  $E(x)$ .

1.110. Дано  $R_0 = 0,6$  м,  $R = 4$  м,  $U_{AB} = 40$  В,  $\gamma = 8 \cdot 10^{-3}$  См/м. Найти ток заземления  $I_3$  и максимальную плотность тока в грунте  $J_{\max}$ .

1.111. Дано  $R_0 = 2$  м,  $\gamma = 6 \cdot 10^{-3}$  См/м,  $I = 1200$  А. Рассчитать и построить зависимость плотности тока от радиуса  $J(R)$ . Найти напряженность поля в точке, которая находится на глубине  $h = 6$  м под центром полусферы.

1.112. Дано  $R_0 = 1,5$  м,  $\gamma = 4 \cdot 10^{-3}$  См/м,  $R = 6$  м,  $U_{AB} = 40$  В. Найти ток заземлителя  $I_3$  и его потенциал  $U_B$  в точке  $B$ .

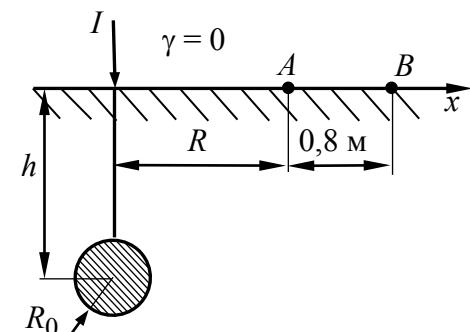


Рис. 1.35

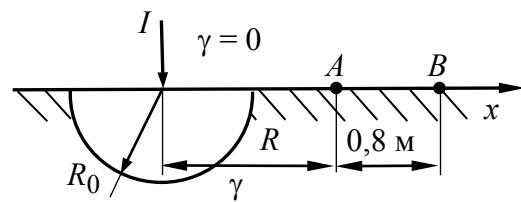


Рис. 1.36

### 1.3. Магнитное поле постоянного тока

1.113. Проводящая сферическая оболочка радиуса  $r_0$ , несущая заряд  $q$ , вращается с частотой вращения  $n$  вокруг оси  $z$  (рис. 1.37). Относительная магнитная проницаемость всюду равна единице. Найти напряженность маг-

магнитного поля на оси вращения внутри и вне сферической оболочки. Построить зависимость  $H = f(z)$ , приняв  $r_0 = 10$  см,  $q = 3 \cdot 10^{-7}$  Кл,  $n = 100$  с<sup>-1</sup>.

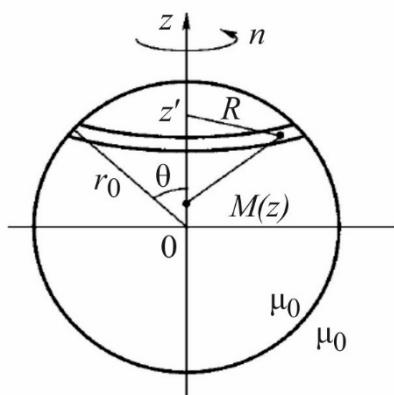


Рис. 1.37

1.114. Постоянный ток  $I$  стекает в землю из металлического полусферического заземлителя (рис. 1.38). Найти напряженность магнитного поля в земле. Показать, что ток, равномерно распределенный из сферы, не создает магнитного поля.

1.115. Длинный диэлектрический цилиндр радиуса  $r_0$ , имеющий внутри объемный заряд с постоянной плотностью  $\rho$ , вращается вокруг своей оси с частотой  $n$ . Найти напряженность магнитного поля внутри цилиндра.

1.116. Распределение тока в шнуре газового разряда в цилиндрической системе координат записывается в виде  $J = J_z = \frac{J_0}{r/a + 1}$ , где  $r$  – координата, отсчитываемая от оси шнура,  $J_0$ ,  $a$  – постоянные. Найти напряженность магнитного поля внутри шнура.

1.117. По длинной металлической ленте, ширина которой  $h$  значительно превышает толщину  $a$ , протекает постоянный ток  $I$  (рис. 1.39). Магнитная проницаемость всюду равна  $\mu_0$ . Найти магнитную индукцию  $B$  на осях  $x$  и  $y$ .

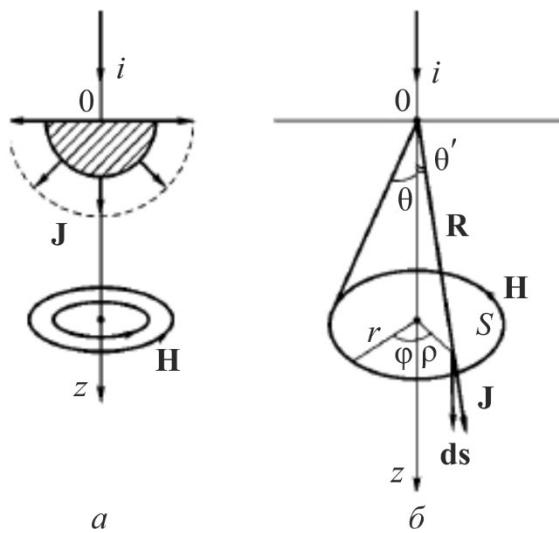


Рис. 1.38

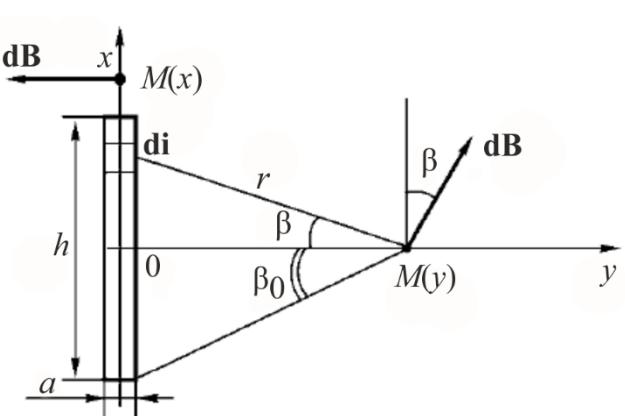


Рис. 1.39

1.118. Проводящая сферическая оболочка радиуса  $r_0$ , несущая заряд  $q$ , вращается с частотой  $n$  вокруг оси  $z$ , проходящей через ее центр (рис. 1.37). Относительная магнитная проницаемость всюду равна единице. Считая, что выражение для скалярного магнитного потенциала в сферической системе

координат равна  $U_m = (Ar + B / r^2) \cos \theta$ , где  $A$  и  $B$  – постоянные, найти напряженность магнитного поля внутри и вне сферической оболочки.

1.119. Сердечник тороидальной катушки с плотной обмоткой имеет малый воздушный зазор  $d$ . Длина средней (осевой) линии катушки  $l_0$ , а линии в сердечнике  $l_c = l_0 - d$ , причем  $d \ll l_c$ . Число витков обмотки  $n$ , ток  $I$ . Магнитная проницаемость материала сердечника  $\mu$ . Найти: 1) магнитную индукцию на средней линии и сравнить с магнитной индукцией при отсутствии зазора; 2) индуктивность катушки с зазором.

1.120. Определить внутреннюю индуктивность на единицу длины полого длинного цилиндрического проводника. Радиус полости  $r_1$ , наружный радиус проводника  $r_2$ . Магнитная проницаемость материала провода  $\mu$ .

1.121. Вблизи плоской границы раздела магнетиков с проницаемостями  $\mu_1$  и  $\mu_2$  на одинаковых расстояниях  $h$  находятся два тонких прямолинейных проводника с постоянными токами  $I_1$  и  $I_2$  (рис. 1.40). Найти силу, действующую на второй проводник.

1.122. По отрезку прямолинейного проводника течет ток  $I$ . Длина отрезка  $l$  (рис. 1.41). Найти напряженность магнитного поля.

1.123. По тонкому кольцу радиуса  $r_0$  протекает ток  $I$  (рис. 1.42). Найти напряженность поля  $\mathbf{H}$  на оси  $z$ .

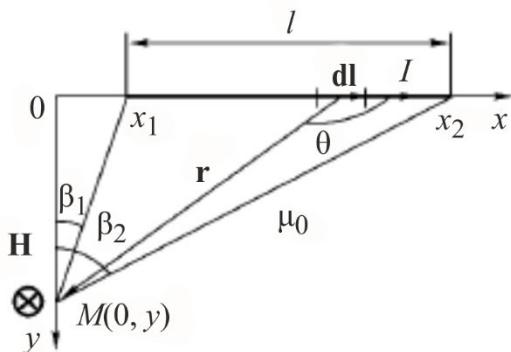


Рис. 1.41

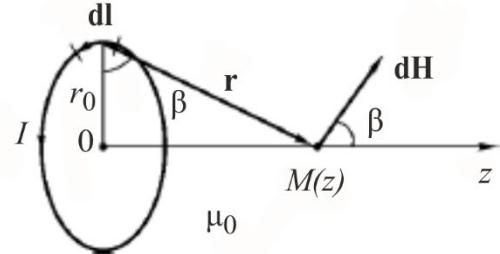


Рис. 1.42

1.124. Катушка (соленоид) с током  $I$  имеет длину  $l$  и радиус  $r_0$ . Число витков (намотка плотная) –  $n$  (рис. 1.43). Найти напряженность поля  $\mathbf{H}$  на оси катушки и записать приближенную формулу для поля внутри длинного (эталонного) соленоида.

1.125. Ток распределен с постоянной плотностью  $\mathbf{J}$  в области, ограниченной двумя цилиндрическими поверхностями, радиусы которых  $r_1$  и  $r_2$ . Причем  $r_1 > r_2$ . Оси цилиндров параллельны, расстояние между ними  $a$  (рис. 1.44). Магнитная проницаемость среды везде  $\mu_0$ . Показать, что поле внутри цилиндра меньшего радиуса однородно и равно  $\mathbf{H} = \frac{1}{2}[\mathbf{J}a]$ , где вектор  $\mathbf{a}$  направлен от оси большего к оси меньшего цилиндра.

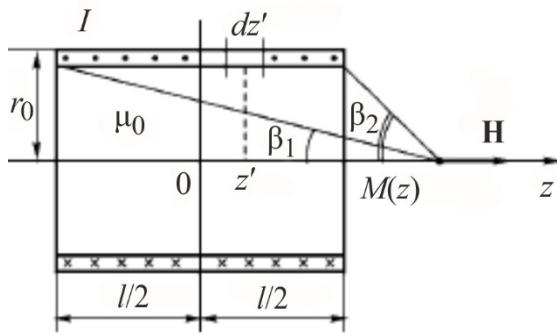


Рис. 1.43

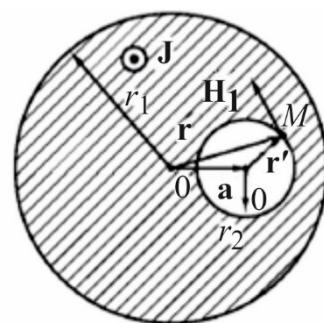


Рис. 1.44

1.126. На шар радиуса  $r_0$  нанесена плотная обмотка, так что плоскости всех витков параллельны. Число витков обмотки  $n$ , ток  $I$ . Магнитная проницаемость всюду равна  $\mu_0$ . Найти напряженность поля  $\mathbf{H}$  в центре шара.

1.127. Расстояние между осями проводов двухпроводной линии  $2h$  радиус провода  $r_0$ . Поперечное сечение линии приведено на рис. 1.45. Ток в прямом и обратном проводе равен  $I$ . Магнитная проницаемость везде  $\mu_0$ . Найти магнитную индукцию  $B$  при условии, что линейные провода тонкие с радиусом  $r_0 \ll h$ .

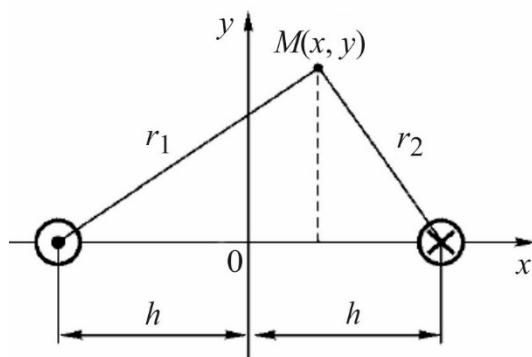


Рис. 1.45

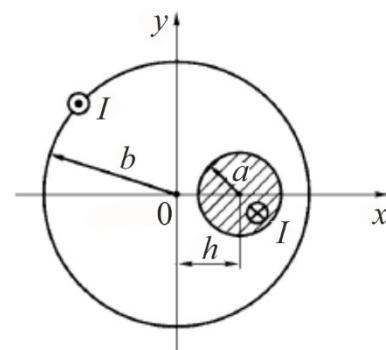


Рис. 1.46

1.128. Внутренняя жила цилиндрического кабеля радиусом  $a$  смешена на расстояние  $h$ . Радиус тонкостенной оболочки  $b$  (рис. 1.46). Прямой и обратный ток кабеля  $I$ , магнитная проницаемость везде  $\mu_0$ . Найти напряженность

магнитного поля на оси  $x$  и построить график  $H_y(x)$ , приняв,  $a = 0,2$  см,  $b = 1,2$  см,  $h = 0,5$  см,  $I = 2$  А.

1.129. Постоянный ток  $I$  протекает по бесконечно длинному цилиндрическому проводу радиуса  $r_0$  (рис. 1.47). Магнитная проницаемость провода и окружающей среды равна  $\mu_0$ . Найти: 1) векторный потенциал магнитного поля; 2) вектор магнитной индукции.

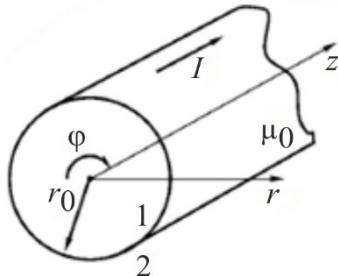


Рис. 1.47

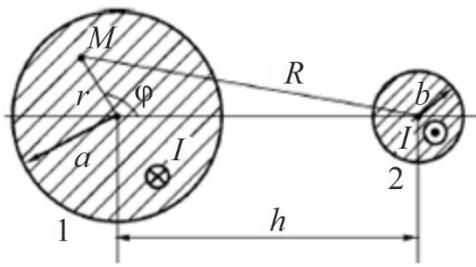


Рис. 1.48

1.130. Расстояние между осями проводов двухпроводной линии  $h$ , радиусы сечения  $a$  и  $b$  соизмеримы с  $h$  (рис. 1.48). Ток в прямом и обратном проводе  $I$ . Магнитная проницаемость проводов и окружающей среды равна  $\mu_0$ . Найти: 1) энергию магнитного поля на единицу длины линии; 2) погонную индуктивность линии, считая  $a = 2$  см,  $b = 1$  см,  $h = 3,1$  см.

1.131. На круглый сердечник с сечением прямоугольной формы плотно намотаны две обмотки с количеством витков  $n_1$  и  $n_2$  (рис. 1.49). Внутренний радиус сердечника  $r_1$ , внешний —  $r_2$ , толщина  $h$ . Магнитная проницаемость материала сердечника  $\mu$ . Найти: 1) собственную индуктивность  $L$  первой обмотки; 2) взаимную индуктивность обмоток.

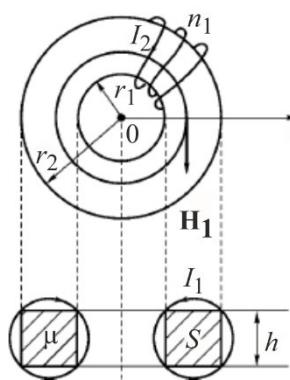


Рис. 1.49

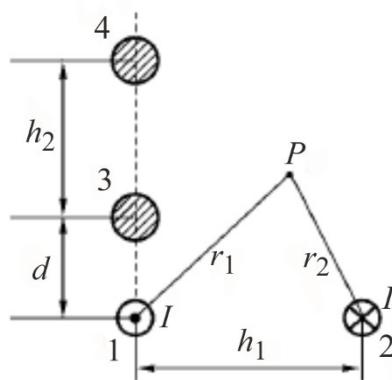


Рис. 1.50

1.132. Двухпроводные линии расположены в перпендикулярных плоскостях, как показано на рис. 1.50. Магнитная проницаемость везде  $\mu_0$ . Найти взаимную индуктивность участка линии длиной  $l$ .

1.133. Две одинаковых квадратных рамки из тонкого провода расположены в параллельных плоскостях на расстоянии  $h$  (рис. 1.51). Длина стороны рамки  $a$ , магнитная проницаемость везде  $\mu_0$ . Найти взаимную индуктивность, считая  $a = h = 5$  см.

1.134. Прямоугольная рамка, содержащая  $n$  витков тонкого провода, расположена параллельно бесконечно длинному проводу так, как показано на рис. 1.52, длина рамки в направлении провода  $b$ , магнитная проницаемость везде  $\mu_0$ . Найти взаимную индуктивность провода и рамки.

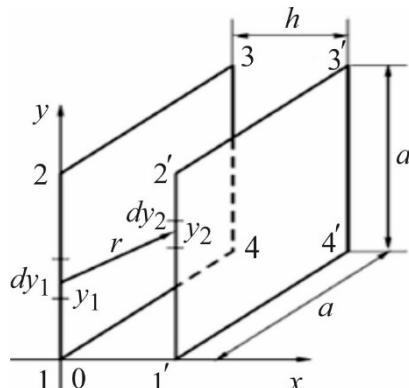


Рис. 1.51

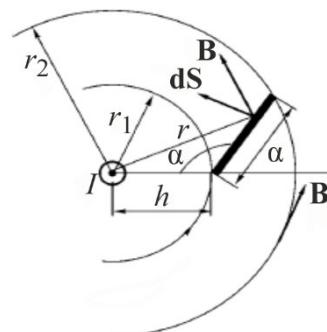


Рис. 1.52

1.135. Две рамки из тонкого провода и бесконечно длинный линейный провод расположены так, как показано на рис. 1.53. Найти взаимную индуктивность провода и рамок.

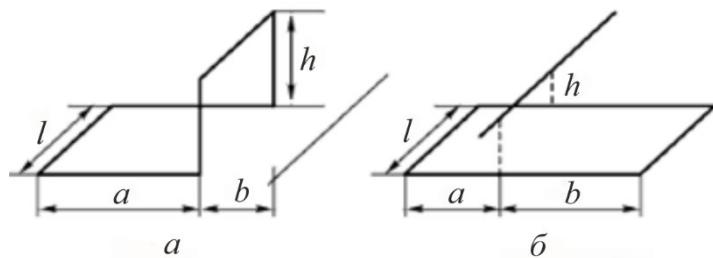


Рис. 1.53

1.136. Круглый виток из тонкого провода и линейный провод расположены в одной плоскости (рис. 1.54). Радиус витка  $r_0$ , расстояние от его центра до провода  $d$ . Окружающая среда – воздух. Найти взаимную индуктивность.

1.137. Тонкий провод с током  $I$  изогнут под прямым углом (рис. 1.55). Найти силу, действующую на отрезок провода с координатами  $\gamma_1 = a$ ,  $\gamma_2 = b$  при условии, что длина части провода на оси  $x$  значительно превышает  $b$ . Численное решение выполнить, положив  $I = 10^4$  А,  $a = 0,1$  м,  $b = 1,1$  м.

1.138. Круглый виток с током  $I$  расположен в плоскости  $xy$ , как показано на рис. 1.56. Радиус витка  $r_0$ . Вектор  $\mathbf{B}$  направлен по оси  $z$  и изменяется вдоль  $x$  по линейному закону  $B_z = B_0(x/a - 1)$ , где  $a = \text{const}$ . Найти силу, действующую на виток.

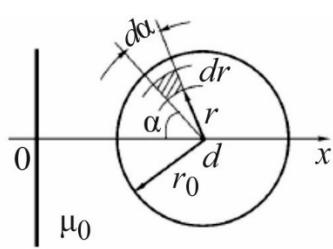


Рис. 1.54

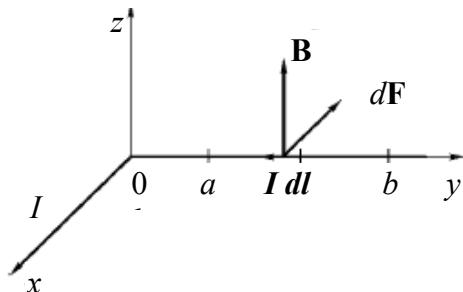


Рис. 1.55

1.139. Ток  $i$  подводится к центру тонкого диска и равномерно снимается с его периметра так, что векторные линии тока радиальные. Радиус диска  $r_0$  толщина  $h$  (рис. 1.57). Диск находится в однородном поле  $\mathbf{B}$ , перпендикулярном его плоскости. Найти момент сил, приложенный к диску.

1.140. Круглый ферромагнитный цилиндр (стержневой магнит) имеет однородную остаточную намагниченность  $\mathbf{M} = \text{const}$  вдоль своей оси. Радиус цилиндра  $r_0$  длина  $l$  (рис. 1.58) Окружающая среда – воздух. Найти магнитную индукцию и напряженность поля на оси цилиндра.

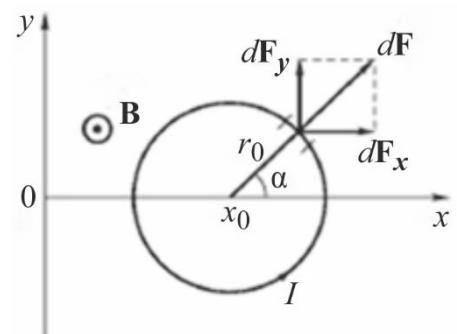


Рис. 1.56

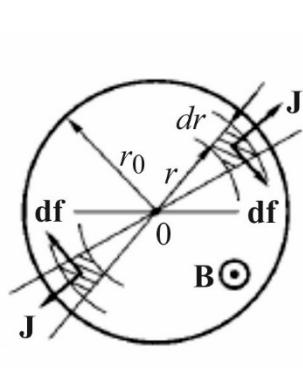


Рис. 1.57

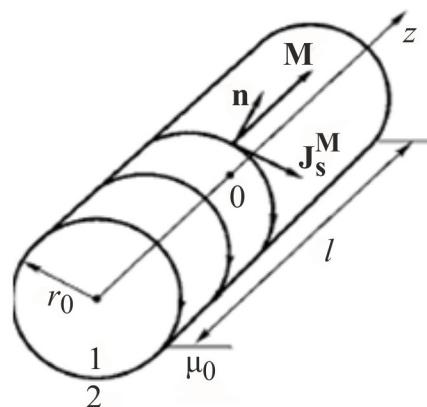


Рис. 1.58

1.141. Шар радиуса  $r_0$  (шаровой магнит) имеет однородную остаточную намагниченность  $\mathbf{M} = \text{const}$ . Окружающая среда – воздух (рис. 1.59, а). Найти напряженность магнитного поля внутри и вне шара.

1.142. Тонкая пленка толщиной  $a$  имеет поперечную намагниченность, зависящую только от одной координаты:  $M = M_x = M_0 \cos ky$  (рис. 1.60). Окружающая среда – воздух. Найти магнитное поле в данной краевой задаче, используя скалярный потенциал поля.

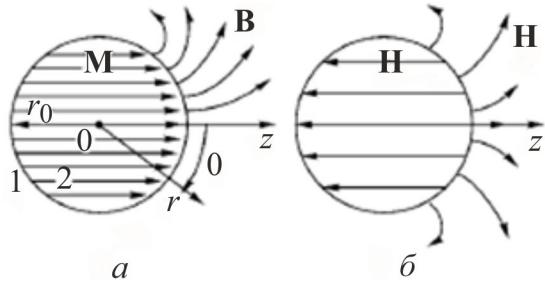


Рис. 1.59

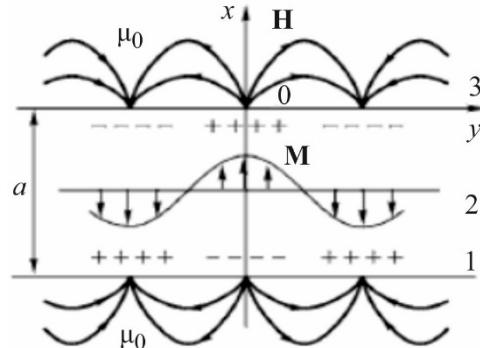


Рис. 1.60

В коаксиальном кабеле (рис. 1.61) жила и оболочка используются, как прямой и обратный провод линии передачи постоянного тока. Жила и оболочка выполнены из немагнитного материала  $\mu_r = 1$ .

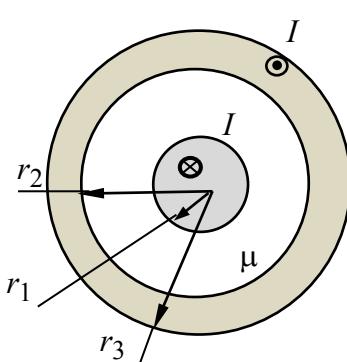


Рис. 1.61

Размеры кабеля:  $r_1$  – радиус внутренней жилы,  $r_2$  и  $r_3$  – внутренний и внешний радиус оболочки. Ниже приведены варианты задач, в которых необходимо найти заданные величины.

1.143. Дано  $r_1 = 5$  мм,  $r_2 = 8$  мм,  $r_3 = 10$  мм,  $\mu = \mu_0$ ,  $I = 100$  А. Найти максимальную индукцию магнитного поля в кабеле  $B_{\max}$ . Рассчитать и построить зависимость напряженности поля от радиуса  $H(r)$ .

1.144. Дано  $r_1 = 6$  мм,  $r_2 = 8$  мм,  $r_3 = 10$  мм,  $\mu = \mu_0$ ,  $I = 96$  А. Найти  $H_{\max}$ , рассчитать и построить зависимость векторного магнитного потенциала от радиуса  $A(r)$ .

1.145. Дано  $r_1 = 8$  мм,  $r_2 = 12$  мм,  $r_3 = 16$  мм,  $\mu = \mu_0$ ,  $H_{\max} = 4000$  А/м. Найти  $I$ , рассчитать и построить зависимость напряженности  $H(r)$ .

1.146. Дано  $r_1 = 3$  мм,  $r_2 = 5$  мм,  $r_3 = 7$  мм,  $\mu = \mu_0$ ,  $B_{\max} = 10^{-2}$  Тл. Найти  $I$ , рассчитать и построить зависимость векторного магнитного потенциала от радиуса  $A(r)$ .

1.147. Дано  $r_1 = 10$  мм,  $r_2 = 16$  мм,  $r_3 = 22$  мм,  $\mu = \mu_0$ ,  $I = 160$  А. Найти внешнюю индуктивность кабеля на единицу длины  $L_{\text{внеш}}$ , рассчитать и построить зависимость  $H(r)$ .

Линия передачи из двух цилиндрических немагнитных проводников радиусом  $r_0$  и расстоянием  $d$  между проводами находится в воздухе ( $\mu = \mu_0$ ). Ток в линии  $I$  (рис. 1.62). Ниже приведены варианты задач, в которых необходимо найти заданные величины.

1.148. Дано  $r_0 = 5$  мм,  $d = 50$  мм,  $I = 120$  А. Провода из немагнитного материала. Найти магнитную индукцию в точке А с координатами  $X_A = 25$  мм,  $Y_A = 25$  мм. Рассчитать и построить зависимость  $H(x)$  при  $0 \leq x \leq d$ .

1.149. Дано  $r_0 = 10$  мм,  $d = 50$  мм,  $I = 160$  А. Материал проводов  $\mu_r = 1$ . Найти индуктивность на единицу длины линии  $L_0$ . Рассчитать и построить зависимость  $B(x)$  при  $0 \leq x \leq d$ .

1.150. Дано  $r_0 = 20$  мм,  $d = 100$  мм,  $I = 200$  А, провода выполнены из стали  $\mu_r = 100$ . Найти  $B_A$  в точке А с координатами  $X_A = r_0$ ,  $Y_A = 0$ . Рассчитать и построить зависимость векторного магнитного потенциала  $A(x)$  при  $0 \leq x \leq d$ .

1.151. Дано  $r_0 = 15$  мм,  $d = 70$  мм,  $I = 180$  А. Материал проводов  $\mu_r = 1$ . Найти магнитный поток между проводами на единицу длины линии  $\Phi_0$ . Рассчитать и построить зависимость скалярного магнитного потенциала  $U_M(x)$  при  $0 \leq x \leq d$ .

1.152. Дано  $r_0 = 10$  мм,  $d = 100$  мм,  $I = 140$  А. Провода выполнены из стали  $\mu_r = 10$ . Найти  $U_{MA}$  в точке с координатами  $X_A = 0$ ,  $Y_A = 50$  мм. Рассчитать и построить зависимость напряженности поля  $H(x)$  при  $d - r_0 \leq x \leq d + r_0$ .

Провод круглого сечения радиусом  $r_0$  и постоянным током  $I$  расположен в ферромагнитной среде  $\mu_1$  и проходит параллельно плоской границе раздела двух ферромагнетиков с  $\mu_2$  (рис. 1.63). Расстояние от оси провода до границы раздела  $h = 50$  мм. Ниже приведены варианты задач, в которых необходимо найти заданные величины.

1.153. Дано  $r_0 = 5$  мм,  $\mu_1 = 200$ ,  $\mu_2 = 100$ ,  $h = 50$  мм,  $I = 50$  А. Найти магнитную индукцию  $B_A$  при  $X_A = 0$ ,  $Y_A = h - r_0$ . Рассчитать и построить зависимость  $H(y)$  при  $-h \leq y \leq h$ .

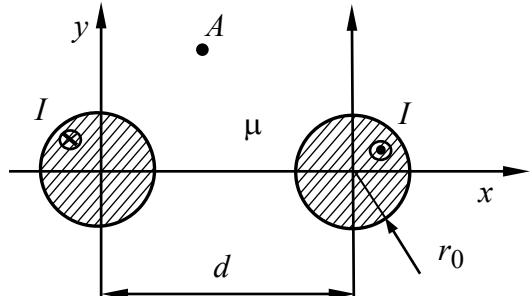


Рис. 1.62

1.154. Дано  $r_0 = 6$  мм,  $h = 45$  мм,  $\mu_1 = 200$ ,  $\mu_2 = 300$ ,  $I = 0,5$  А. Найти магнитный поток  $\Phi_0$  через плоскость, ограниченную границей раздела и нижней

поверхностью провода на 1 м длины провода. Рассчитать и построить зависимость  $B(y)$  при  $0 \leq y \leq h + r_0$ .

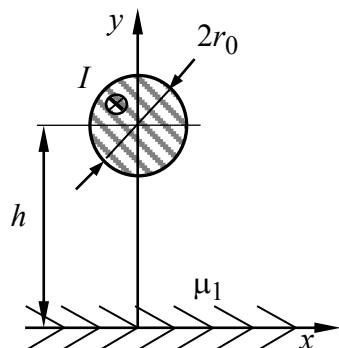


Рис. 1.63

1.155. Дано  $r_0 = 10$  мм,  $h = 60$  мм,  $\mu_1 = 100$ ,  $\mu_2 = 200$ ,  $H_A = 10^3$  А/м при  $X_A = 0$ ,  $Y_A = h - r_0$ . Найти ток  $I$ . Рассчитать и построить зависимость  $H(x)$  при  $-h \leq x \leq h$ ,  $y = 0$ .

1.156. Дано  $r_0 = 16$  мм,  $h = 80$  мм,  $\mu_1 = 120$ ,  $\mu_2 = 360$ ,  $H_A = 5 \cdot 10^3$  А/м при  $X_A = 0$ ,  $Y_A = h$ . Найти ток  $I$ . Построить зависимость  $B(y)$  при  $x = 0$ ,  $-h \leq y \leq 0$ .

1.157. Дано  $r_0 = 15$  мм,  $h = 75$  мм,  $\mu_1 = 500$ ,  $\mu_2 = 300$ ,  $I = 120$  А. Найти  $B_A$  при  $X_A = 75$  мм,  $Y_A = 75$  мм. Построить зависимость  $H(x)$  при  $y = h$ ,  $r_0 \leq x \leq h$ .

Биметаллический круглый провод с постоянным током  $I$  (рис. 1.64) имеет размеры  $r_1$  и  $r_2$ , выполнен из материалов с удельной проводимостью  $\gamma_1$

$r_1$  и  $\gamma_2$  и относительной магнитной проницаемостью  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Ниже приведены варианты задач, в которых необходимо найти заданные величины.

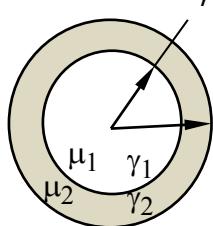


Рис. 1.64

1.158. Дано  $r_1 = 10$  мм,  $r_2 = 15$  мм,  $\gamma_1 = 3,4 \cdot 10^7$  См/м,  $\gamma_2 = 5,7 \cdot 10^7$  См/м,  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ,  $I = 150$  А. Рассчитать и построить зависимость  $H(r)$  при  $0 \leq r \leq \infty$ .

1.159. Дано  $r_1 = 12$  мм,  $r_2 = 20$  мм,  $\gamma_1 = 3,4 \cdot 10^7$  См/м,  $\gamma_2 = 5 \cdot 10^6$  См/м,  $I = 180$  А,  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 100$ . Рассчитать и построить зависимость  $A(r)$  при  $0 \leq r \leq \infty$ .

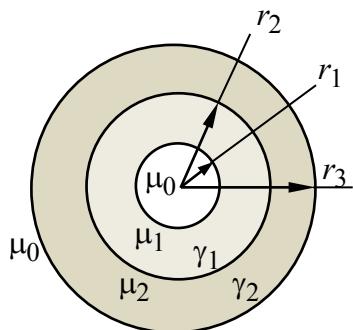


Рис. 1.65

Биметаллический провод с током  $I$  представляет собой две трубы, вложенные одна в другую (рис. 1.65), размеры  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ . Относительная магнитная проницаемость проводников  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ . Удельная проводимость материалов  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ . Ниже приведены варианты задач, в которых необходимо найти заданные величины.

1.160. Дано  $r_1 = 6$  мм,  $r_2 = 8$  мм,  $r_3 = 10$  мм,  $I = 60$  А,  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ,  $\gamma_1 = 5,7 \cdot 10^7$  См/м,  $\gamma_2 = 3,2 \cdot 10^7$  См/м. Рассчитать и построить зависимость  $H(r)$  при  $0 \leq r \leq \infty$ .

1.161. Дано  $r_1 = 20$  мм,  $r_2 = 25$  мм,  $r_3 = 30$  мм,  $\mu_1 = 200$ ,  $\mu_2 = 100$ ,  $\gamma_1 = 5,2 \cdot 10^6$  См/м,  $\gamma_2 = 5,8 \cdot 10^6$  См/м,  $I = 140$  А. Рассчитать и построить зависимость магнитной индукции  $B(r)$  при  $0 \leq r \leq 60$  мм.

Линия передачи постоянного тока  $I$  состоит из двух параллельных немагнитных труб (рис. 1.66) с размерами  $R_1$ ,  $R_2$ , расстоянием между проводами  $d$ . Ниже приведены варианты задач, в которых необходимо найти заданные величины.

1.162. Дано  $R_1 = 10$  мм,  $R_2 = 16$  мм,  $d = 80$  мм,  $I = 80$  А. Рассчитать и построить зависимость  $H(x)$  при  $-R_2 \leq x \leq R_2$ .

1.163. Дано  $R_1 = 8$  мм,  $R_2 = 12$  мм,  $d = 70$  мм,  $I = 60$  А. Найти магнитный поток  $\Phi_0$  на единицу длины линии в пространстве между трубами. Определить магнитную индукцию на оси трубы.

1.164. Дано  $R_1 = 6$  мм,  $R_2 = 10$  мм,  $d = 40$  мм. Напряженность поля на оси трубы  $H_0 = 800$  А/м. Найти ток в трубах  $I$ , рассчитать внешнюю индуктивность на единицу длины линии  $L_0$ .

1.165. По стальному цилиндрическому проводнику с  $\mu_r = 200$  и радиусом  $r_0 = 10$  мм течет постоянный ток  $I = 100$  А (рис. 1.67). Рассчитать и построить зависимость векторного магнитного потенциала  $A(r)$  внутри и вне проводника. Найти внутреннюю индуктивность провода на единицу длины  $L_0$ .

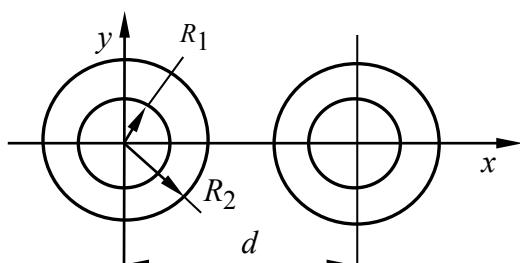


Рис. 1.66

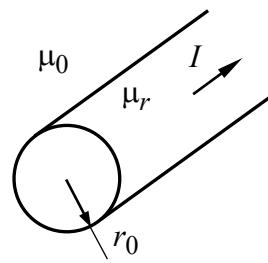


Рис. 1.67

Постоянный ток  $I$  течет по линии из двух плоских немагнитных шин  $\mu_r = 1$  (рис. 1.68) с размерами  $2a$ ,  $2b$ ,  $h$ . Ниже приведены варианты задач, в которых необходимо найти заданные величины.

1.166. Дано  $I = 200$  А,  $2a = 10$  мм,  $2b = 30$  мм,  $h = 100$  мм. Рассчитать и построить зависимость векторного магнитного потенциала  $A(x)$  внутри и вне шин.

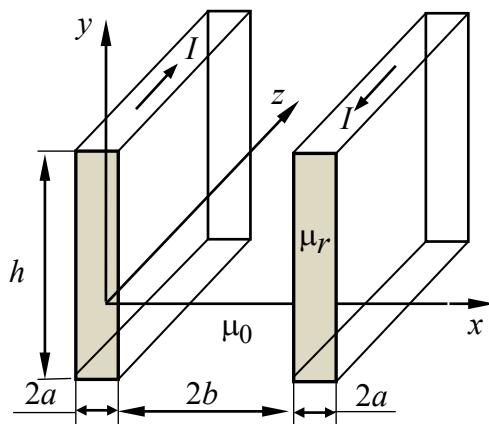


Рис. 1.68

1.167. Дано  $I = 150$  А,  $h = 8$  мм,  $2a = 4$  мм,  $2b = 6$  мм. Рассчитать внешнюю индуктивность на единицу длины линии. Рассчитать магнитную индукцию на оси  $x$  в точке с координатами  $x = 3a + 2b$ .

1.168. Дано  $I = 120$  А,  $2a = 4$  мм,  $2b = 8$  мм,  $h = 5$  мм. Рассчитать магнитную индукцию на оси  $x$  в точках  $X_A = 0$  и  $X_B = 3a + 2b$ . Определить магнитный поток  $\Phi_0$  на единицу длины линии, пронизывающий пространство между шинами.

## 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

### 2.1. Электростатическое поле

2.1 (к задаче 1.1). Последовательно рассмотрим две модели. В первой заряд с плотностью  $\rho$  заполняет весь объем цилиндра радиуса  $r_1$ . Тогда напряженность поля в точке наблюдения  $M$  легко находится с использованием третьего уравнения Максвелла:  $E_1 = \rho r / 2\epsilon_0$ . Во второй модели заряд с плотностью  $(-\rho)$  заполняет объем цилиндра радиуса  $r_2$ . Напряженность поля в точке  $M$ :  $E_2 = -\rho r' / 2\epsilon_0$ .

Наложение двух моделей и соответствующих решений приводит к исключому выражению  $E = E_1 + E_2 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (r - r') = \frac{\rho a}{2\epsilon_0}$ .

Вектор  $\mathbf{E}$  по направлению совпадает с вектором  $\mathbf{a}$ . Модуль напряженности  $E = \frac{\rho a}{2\epsilon_0} = 1,1 \cdot 10^3$  В/м. При совпадении осей (концентрические цилиндры)  $E = 0$ .

2.2 (к задаче 1.2). Задача сводится к решению уравнения Пуассона  $\Delta U = -\rho / \epsilon_0$  при заданных краевых условиях. Поскольку задача одномерная,

т. е.  $\partial U / \partial y = 0$ ,  $\partial U / \partial z = 0$ , то дифференциальное уравнение становится простым:  $d^2U/dx^2 = -\rho/\epsilon_0$ . Его решение после двукратного интегрирования:

$$U(x) = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} + C_1 x + C_2,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные, определяемые из краевых условий. Так как  $U(0) = 0$ , то  $C_2 = 0$ , константа  $C_1$  находится из условия:

$$U(h) = -\rho h^2 / 2\epsilon_0 + C_1 h.$$

Таким образом, искомый потенциал  $U(x) = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} + \left(\frac{U_0}{h} + \frac{\rho h}{2\epsilon_0}\right)x$ .

Если заземлена и правая пластина ( $U_0 = 0$ ), то

$$U(x) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} + \left(x^2 - hx\right) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[ \left(x - \frac{h}{2}\right)^2 - \frac{h^2}{4} \right].$$

Напряженность поля в этом случае  $E_x(x) = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(x - \frac{h}{2}\right)$ . Распределение потенциала (парабола) и напряженности поля

(прямая) при  $\rho < 0$  показаны на рис. 2.1.

Линии вектора  $\mathbf{E}$  направлены от пластин к плоскости симметрии  $x = h/2$ , где  $\mathbf{E} = 0$ . Очевидно, что пластины заряжены положительно.

2.3 (к задаче 1.3). Решая уравнение Пуассона, получим:

$$U(x) = -\frac{ax^3}{6\epsilon} + \frac{ahx^2}{6\epsilon} + C_1 x + C_2.$$

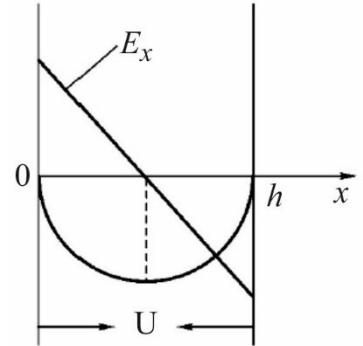


Рис. 2.1

Из краевых условий  $U(0) = 0$  и  $U(h) = 0$  следует, что обе константы равны нулю, и поэтому:

$$U(x) = -\frac{ax^3}{6\epsilon} + \frac{ahx^2}{6\epsilon}; \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} U = -\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{e}_x = \frac{ax}{2\epsilon} \left(x - \frac{2h}{3}\right) \mathbf{e}_x.$$

Плотность свободного заряда на пластинах находится из граничного условия  $\sigma = D_n = \epsilon E_n$ . Поскольку при  $x = 0$  вектор напряженности поля  $\mathbf{E} = 0$ ,

заряженной оказывается только правая пластина, причем  $\sigma = -ah^2/6$ . Плотность связанного заряда на поверхности диэлектрика:

$$\sigma_{\text{св}} = -P_n = P_x = (\epsilon - \epsilon_0) E_x \Big|_{x=h} = ah^2 (\epsilon - \epsilon_0) / 6\epsilon_0,$$

что соответствует [1, с. 492–493].

2.4 (к задаче 1.4). Задача сводится к решению уравнения Пуассона при краевых условиях  $U(\pm h) = 0$ :  $U(x) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[ x^2 - \frac{x^4}{6h^2} - \frac{5h^2}{6} \right]$ .

2.5 (к задаче 1.5). В рассматриваемой задаче поле является плоскопараллельным. Его потенциал – функция двух координат  $x$  и  $y$ . Он удовлетворяет уравнению Лапласа  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ . Общее решение уравнения можно найти методом разделения переменных [1, с. 517–519]:

$$U(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos mx + B_m \sin mx)(C_m \operatorname{ch} my + D_m \operatorname{sh} my).$$

Очевидно, что искомое поле должно быть симметричным относительно осей  $x$  и  $y$ . Поэтому в решении должны отсутствовать нечетные функции. Введя новое обозначение для постоянных, получим:

$$U(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m \cos mx \cdot \operatorname{ch} my.$$

Для определения  $F_m$  используются краевые условия:

$$\text{при } x = \pm a/2 \quad U = 0; \quad \text{при } y = \pm b/2 \quad U = U_0.$$

Из первого условия следует:  $\cos m \frac{\pi}{2} = 0$ ,  $m \frac{a}{2} = k \frac{\pi}{2}$ ,  $m = \frac{\pi}{a} k$ , где  $k = 1, 3, 5, \dots$ . Обозначив для таких  $k$  коэффициенты  $F_m = A_k$ , перепишем решение в следующем виде:  $U(x, y) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} A_k \cos \frac{k\pi}{a} x \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi}{a} y$ .

Коэффициенты  $A_k$  находятся из второго краевого условия. При этом можно ограничиться конечным числом слагаемых. Например, учитывая четыре члена ряда, запишем:  $U(x, y) \approx \sum_{k=1,3}^7 A_k \cos \frac{k\pi}{a} x \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi}{a} y$ .

Подставив сюда  $y = b/2$  и придавая  $x$  последовательно значения  $a/2$ ,  $a/4$ ,  $a/8$ ,  $0$ , получим четыре уравнения для определения четырех  $A_k$ .

2.6 (к задаче 1.6). В однородном диэлектрике поле описывается уравнением Пуассона  $\Delta U = -\rho/\epsilon$ . Следовательно, распределение объемных

зарядов  $\rho = -\epsilon \Delta U = -\epsilon \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2\epsilon a$ . Плотность объемных зарядов оказывается

постоянной. Плотность свободных поверхностных зарядов на пластинах находится из граничного условия  $\sigma = D_n = \epsilon E_n$ , где предполагается, что нормаль  $\mathbf{n}$  направлена из металла (пластины) в диэлектрик. Поэтому на левой пластине  $E_n = E_x|_{x=-h/2}$ , а на правой  $E_n = E_x|_{x=h/2}$ . Определив напряженность поля  $E_x = -\partial U / \partial x = 2ax$ , находим плотность заряда  $\sigma = -\epsilon ah$ , которая оказывается одинаковой по величине и знаку ( $\sigma < 0$ , если  $a > 0$ ).

Поверхностная плотность связанных зарядов в диэлектрике у пластины  $\sigma_{cb} = -P_n = (\epsilon_0 - \epsilon)E_n$ , откуда следует  $\sigma_{cb} = (\epsilon - \epsilon_0)ah > 0$ .

Объемная плотность связанных зарядов:

$$\rho_{cb} = -\operatorname{div} \mathbf{E} = (\epsilon_0 - \epsilon) \frac{dE_x}{dx} = 2a(\epsilon_0 - \epsilon).$$

2.7 (к задаче 1.7). Задача подобна предыдущей и является типичной обратной задачей электростатики [1, с. 495–497].

Поскольку поле  $U(r)$  является центрально-симметричным, при определении объемной плотности заряда ограничиваемся первым слагаемым опера-

тора Лапласа в сферических координатах:  $\rho = -\epsilon \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) = -\frac{a^2 b}{4\pi r} e^{-ar}$ .

Заданная функция  $U(r)$  имеет особую точку в начале координат: при  $r \rightarrow 0$  потенциал  $U \rightarrow \infty$ . Такой особенностью обладает поле точечного заряда.

Чтобы определить заряд  $q$  в особой точке, построим сферу произвольного радиуса  $r$ . Поток вектора смещения  $\mathbf{D}$  через поверхность этой сферы равен заряду, находящемуся внутри:  $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q + \int_V \rho dV$ , где  $V$  – объем, ограниченный сферой.

Вектор смещения  $\mathbf{D} = -\epsilon \operatorname{grad} U = \frac{b(ar+1)}{4\pi r^2} e^{-ar} \cdot \mathbf{e}_r$ .

Поток вектора смещения  $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r S = D_r 4\pi r^2 = b(ar+1)e^{-ar}$ .

Объемный заряд внутри сферы  $\int_V \rho dV = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr = b(ar+1)e^{-ar} - b$ .

Искомый точечный заряд  $q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} - \int_V \rho dV = b$ .

2.8 (к задаче 1.8). Решение обратной задачи электростатики проводится следующим образом. Объемная плотность заряда находится из уравнения Пуассона. Лапласиан в данном случае следует записать в цилиндрической системе координат. Поскольку потенциал не зависит от  $\varphi$  и  $z$ ,

$$\rho = -\epsilon_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right).$$

Для определения линейной плотности заряда на нити, т. е. в особой точке  $r = 0$ , нужно воспользоваться третьим уравнением Максвелла в интегральной форме (см. решение задачи 2.6). Окружив нить цилиндрической поверхностью радиуса  $r$  и длиной  $l$ , можно записать:

$$D_r \cdot 2\pi r l = -\epsilon_0 \frac{\partial U}{\partial r} \cdot 2\pi r l = \tau l + \int_V \rho dV,$$

где  $V$  – объем цилиндра. Совершая предельный переход, получим:

$$\tau = -2\pi\epsilon_0 \lim_{r \rightarrow 0} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right).$$

Поверхностная плотность заряда находится из граничных условий:  $\sigma = D_n = -D_r$  при  $r = d/2$ .

Окончательные результаты:

$$\rho = 4\epsilon_0 a = 10^{-8} \text{ Кл}/\text{м}^3; \quad \tau = -2\pi\epsilon_0 ab = -10^{-7} \text{ Кл}/\text{м};$$

$$\sigma = \epsilon_0 a (2b/d - d) = 1,28 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}/\text{м}^2.$$

Система зарядов нейтральна.

2.9 (к задаче 1.9). Исследуемое поле является плоскопараллельным и имеет особую точку с координатами  $x = b$ ,  $y = 0$  в месте расположения нити. Будем искать потенциал  $U(x, y)$ , используя общее решение уравнения Лапласа (см. решение задачи 2.4) и представление об импульсной функции.

Введем одномерную импульсную функцию  $\delta(x - b)$ , описывающую распределение зарядов в горизонтальной плоскости  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq a$ . Поверх-

ностная плотность заряда  $\sigma(x) = \tau\delta(x - b)$ . Таким образом, заданная область разделяется на две области условно заряженной поверхностью.

Искомые потенциалы  $U_1(x, y)$  и  $U_2(x, y)$  в первой и второй областях должны удовлетворять краевым условиям  $U_{1,2}(0, y) = 0$ ,  $U_{1,2}(a, y) = 0$  и условию на бесконечности  $U_{1,2}(x, y) \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \infty$ . Это позволяет переписать общее решение уравнения Лапласа для каждой области в виде

$$U_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\frac{n\pi}{a}y} \sin \frac{n\pi}{a}x, \quad U_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{\frac{n\pi}{a}y} \sin \frac{n\pi}{a}x.$$

В точках заряженной поверхности потенциалы подчиняются граничным условиям:

$$U_1 = U_2; \quad \frac{\partial U_1}{\partial y} - \frac{\partial U_2}{\partial y} = \frac{\sigma}{\epsilon}.$$

Из первого условия следует равенство  $A_n = B_n$ . Тогда второе условие приводит к соотношению:  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{2n\pi}{a} \sin \frac{n\pi}{a}x = \frac{\tau}{\epsilon} \delta(x - b)$ , которое представляет собой разложение функции  $f(x) = \frac{\tau}{\epsilon} \delta(x - b)$  в ряд Фурье. Коэффициенты ряда определяются выражением

$$A_n \frac{2n\pi}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi}{a}x \, dx,$$

$$\text{откуда следует } A_n = \frac{\tau}{\pi \epsilon n} \sin \frac{n\pi}{a}b.$$

Таким образом, потенциал поля в рассматриваемой задаче находится как

сумма пространственных гармоник:  $U(x, y) = \frac{\tau}{\pi \epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{a}b e^{-\frac{n\pi}{a}y} \sin \frac{n\pi}{a}x$ .

2.10 (к задаче 1.10). Поскольку коэффициент деполяризации эллипсоида известен, его внутреннее поле может быть найдено простым способом, без полного решения краевой задачи. При этом используется соотношение

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}' = \mathbf{E}_0 - \frac{1}{\epsilon_0} (N) \mathbf{P} = \mathbf{E}_0 - (N) \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_0} \mathbf{E},$$

где  $\mathbf{E}'$  – вектор напряженности поля деполяризации;  $\mathbf{P}$  – вектор поляризации;  $(N)$  – коэффициент деполяризации, зависящий от соотношения осей

эллипсоида, причем  $N_x + 2N_r = 1$ . Разрешив соотношение относительно  $\mathbf{E}$ , получим:

$$E_x = \frac{E_0 \cos \varphi_0}{1 + N_x(\varepsilon/\varepsilon_0 - 1)}, \quad E_r = \frac{E_0 \sin \varphi_0}{1 + N_r(\varepsilon/\varepsilon_0 - 1)}.$$

Направления векторов  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{E}$  не совпадают, так как для вытянутого эллипса вращения  $N_x \leq N_r$ .

Энергия эллипса вращения находится как энергия индуцированного диполя во внешнем поле:  $W = -\frac{1}{2}\mathbf{p}\mathbf{E}_0 = -\frac{1}{2}pE_0 \cos \alpha$ , где  $\mathbf{p}$  – эквивалентный дипольный момент, определяемый через вектор поляризации и объем эллипса. Минимум энергии соответствует ориентации длинной оси эллипса вдоль линий поля.

2.11 (к задаче 1.11). Построим расчетную модель – систему двух точечных зарядов  $Q$  и  $Q'$  в однородной среде с проницаемостью  $\varepsilon$ . В соответствии с теоремой единственности местоположение и величина заряда зеркального изображения  $Q'$  выбираются так, чтобы в поле зарядов  $Q$  и  $Q'$ , как и в исходной задаче, имелась эквипотенциаль  $U = 0$  в виде сферы. Для определения двух неизвестных  $a$  и  $Q'$  составляется система уравнений:

$$\begin{aligned} U(M) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon h} + \frac{Q'}{4\pi\varepsilon a} = 0, \\ U(N) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon(h + 2r_0)} + \frac{Q'}{4\pi\varepsilon(2r_0 + a)} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда определяются параметры расчетной модели:

$$Q' = -\frac{r_0}{r_0 + h} Q; \quad a = \frac{r_0}{r_0 + h} h.$$

Напряженность поля в точке  $M$  – результат суперпозиции:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left( \frac{1}{h^2} + \frac{r_0 + h}{r_0 h^2} \right).$$

Осуществляя предельный переход  $r_0 \rightarrow \infty$ , приходим к известным соотношениям для отражения в проводящей плоскости:

$$Q' = -Q; \quad a = h; \quad E = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon h^2}.$$

2.12 (к задаче 1.12). Пусть линейные плотности зарядов проводов  $\tau_1 = \tau$  и  $\tau_2 = -\tau$ . По определению, погонная емкость  $C = \tau/(U_1 - U_2)$ . Для определения

разности потенциалов между проводами линии рекомендуется использовать формулу для потенциала поля разноименно заряженных нитей [1, с. 505]:

$$U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Определив  $U_1$  в точке 1 и  $U_2$  в точке 2, с учетом неравенства  $r_0 \ll h$  получим  $C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln h/r_0}$ . Второй подход заключается в определении напряженности поля между проводами при  $r_0 \ll x \ll (h - r_0)$ :

$$E = E_1 + E_2 = \tau/(2\pi\epsilon_0 x) + \tau/[2\pi\epsilon_0(h - x)].$$

$$\text{Разность потенциалов } U_1 - U_2 = \int_{r_0}^{h-r_0} E \, dx.$$

2.13 (к задаче 1.13). В соответствии с методом зеркальных изображений расчетная модель задачи есть система двух разноименно заряженных нитей  $\tau$  и  $\tau' = -\tau$ , расположенных в однородном диэлектрике с проницаемостью  $\epsilon$  [1, с. 510–512]. Для определения погонной емкости следует найти потенциал провода  $U_{\text{пр}}$  и плоскости  $U_{\text{пл}}$  по формулам двухпроводной линии. С учетом неравенства  $r_0 \ll h$  емкость  $C = \frac{\tau}{U_{\text{пр}} - U_{\text{пл}}} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{2h}{r_0}}$ .

Поверхностная плотность заряда находится из граничного условия:  $\sigma = D_n = \epsilon E_n = -2\epsilon E_\tau \cos \alpha$ , где  $\mathbf{E}$  – вектор напряженности поля в точках плоскости;  $E_\tau$  – напряженность поля одной нити. Принимая во внимание, что

$$\tau = CU_0, \text{ получим: } \sigma(x) = -\frac{2\epsilon h U_0}{(h^2 + x^2) \ln \frac{2h}{r_0}}.$$

2.14 (к задаче 1.14). Расчетная модель, обеспечивающая эквипотенциальность проводящих плоскостей содержит четыре заряда. Их можно попарно объединить в две двухпроводные линии. Применив формулу для расчета потенциала поля линии (см. решение задачи 2.12) и принципы наложения, находим потенциалы провода и плоскостей. Окончательное выражение для емкости:

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}}.$$

При  $b \gg a$  получаем формулу для конструкции «провод – плоскость».

2.15 (к задаче 1.15). Задача расчета поля в кусочно-однородной среде сводится к задаче расчета в однородной среде с помощью метода зеркальных изображений [1, с. 512–514].

Модель для расчета поля в первом полупространстве содержит три заряда, расположенных в однородном диэлектрике  $\epsilon_1$  (рис. 1.12,  $\delta$ ): реальный заряд  $\tau_1 = \tau$ , заряд-изображение  $\tau'_1 = \tau_1(\epsilon_1 - \epsilon_2)/(\epsilon_1 + \epsilon_2)$  и заряд-изображение  $\tau''_2 = 2\epsilon_1\tau_2/(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ . В точках оси  $x$  при  $r_0 \leq x \leq a$  напряженность поля

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_1 x} - \frac{\tau'_1}{2\pi\epsilon_1(2a-x)} - \frac{\tau''_2}{2\pi\epsilon_1(a+b-x)} = \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_1} \left( \frac{1}{x} - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{1}{2a-x} + \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{1}{a+b-x} \right). \end{aligned}$$

Для определения поля  $E_2$  во втором полупространстве ( $x \geq a$ ) нужно построить другую расчетную модель. Затем находится разность потенциалов между проводами линии:

$$U_1 - U_2 = \int_{r_0}^a E_1 dx + \int_a^{a+b-r_0} E_2 dx$$

и емкость  $C = \tau/(U_1 - U_2)$ . При  $a = b$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_0$ ,  $\epsilon_2 = 3\epsilon_0$  получим:

$$C = 3\pi\epsilon_0 / [2\ln(2a/r_0)].$$

2.16 (к задаче 1.16). Пусть имеем погонный заряд  $\tau$  на проводе. На поверхности цилиндра находится неравномерно распределенный заряд  $(-\tau)$ . Заменим этот заряд его изображением вне цилиндра, находящимся на расстоянии  $H$  от поверхности. При этом все пространство заполнено диэлектриком.

В расчетной модели расстояние  $H$  находится так, чтобы поле зарядов  $\tau$  и  $(-\tau)$  имело эквипотенциаль, совпадающую с поверхностью цилиндра.

Воспользуемся выражением для потенциала поля двухпроводной линии (см. решение задачи 2.12). В точке 1 потенциал  $U_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{H}{h}$ . В точке 2 потенциал  $U_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2a+H}{2a-h}$ . Из равенства  $U_1 = U_2$  следует  $H = ah/(a-h)$ .

Теперь в построенной модели находим потенциал проводника  $U_{\text{пр}}$  (соответствующие расстояния  $r_2 = H + h - r_0$ ,  $r_1 = r_0$ ) и потенциал цилиндра  $U_{\text{ц}}$

(с учетом  $r_2 = H$ ,  $r_1 = h$ ). Погонная емкость конструкции при условии  $r_0 \ll h$ ;  $r_0 \ll H$ :

$$C = \frac{\tau}{U_{\text{пр}} - U_{\text{п}}} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{h(H-h)}{r_0H}} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{h(2a-h)}{r_0a}}.$$

2.17 (к задаче 1.17). Пусть заряд на единицу длины жилы кабеля (погонный заряд)  $\tau$ . Диэлектрическое заполнение кабеля кусочно-однородно. Поле обладает осевой симметрией, его векторные линии радиальны. Третье уравнение Максвелла в интегральной форме позволяет найти смещение  $D = \tau/(2\pi r)$ , причем  $r_1 \leq r \leq r_3$ .

Напряженность поля в первом слое  $E_1 = D/\epsilon_1$ , а во втором слое  $E_2 = D/\epsilon_2$ . Вычислив разность потенциалов  $(U_1 - U_2)$  между электродами кабеля в известном поле  $\mathbf{E}$ , приходим к искомому результату:

$$C = \frac{\tau}{U_1 - U_2} = \frac{2\pi}{\frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{r_3}{r_2}} = 202 \text{ пФ/м.}$$

2.18 (к задаче 1.18). Рекомендуется использовать указания к решению задачи 2.20. Напряженность поля  $E_1 = \tau/(\pi\epsilon_1 r)$ , разность потенциалов между электродами  $U_1 - U_2 = \frac{\tau_1}{\pi\epsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1}$ .

Так как в силу граничных условий  $E_1 = E_2$ ;  $D_1/\epsilon_1 = D_2/\epsilon_2$  и  $\tau_2 = \tau_1\epsilon_2/\epsilon_1$ , искомая емкость:  $C = \frac{(\tau_1 + \tau_2)}{U_1 - U_2} = \frac{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 240 \text{ пФ/м.}$

2.19 (к задаче 1.19). Напряженность поля бесконечно малого элемента каждой нити в точке наблюдения  $M$  находится согласно закону Кулона:

$$d\mathbf{E}_1 = \frac{\tau_1 dx}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_1}{r_1}; \quad d\mathbf{E}_2 = \frac{\tau_2 dx}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_2}{r_2}.$$

Поскольку равномерно заряженные нити образуют систему, симметричную относительно оси  $y$ , искомое поле определяется составляющими:

$$dE_{1y} = \frac{\tau_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{y dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}; \quad dE_{2y} = \frac{\tau_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(h-y) dx}{[x^2 + (h-y)^2]^{3/2}}.$$

В соответствии с принципом суперпозиции (наложения) напряженность поля при одинаковых знаках зарядов:

$$E = E_y = 2 \int_0^{l/2} \frac{\tau_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{y dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - 2 \int_0^{l/2} \frac{\tau_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(h-y) dx}{[x^2 + (h-y)^2]^{3/2}} = \\ = \frac{l}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\tau_1}{y\sqrt{(l/2)^2 + y^2}} - \frac{\tau_2}{(h-y)\sqrt{(l/2)^2 + (h-y)^2}} \right] = 7200 \text{ В/м.}$$

2.20 (к задаче 1.20). Очевидно, что нейтральная линия может располагаться только в плоскости нитей. Справа от второй нити при  $x > h$  в точке  $M$  напряженности поля

$$E_{1x} = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0 x}; \quad E_{2x} = \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0(x-h)}.$$

В точке равновесия  $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 0$ , т. е.  $E_{1x} + E_{2x} = 0$ . Отсюда следует, что координата нейтральной линии  $x_0 = h/(1 + \tau_2/\tau_1)$ . Полагая  $\tau_1 = 10^{-7}$  Кл/м,  $\tau_2 = -0,5 \cdot 10^{-7}$  Кл/м,  $h = 10$  см, получим  $x_0 = 20$  см.

2.21 (к задаче 1.21). Потенциал поля элементарного заряда  $\tau dx$  в точке наблюдения  $M$  (кулоновский потенциал)  $dU = \frac{\tau dx}{4\pi\epsilon_0 r}$ , а искомый потенциал поля нити:

$$U = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{dx}{[(x_1 - x)^2 + y_1^2]^{1/2}} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{x_1 + l + \sqrt{(x_1 + l)^2 + y_1^2}}{x_1 - l + \sqrt{(x_1 - l)^2 + y_1^2}}.$$

Покажем, что линии равного потенциала в плоскости  $xOy$  представляют собой эллипсы. Введем в рассмотрение расстояния от концов нити до точки  $M$ :  $r_1 = \sqrt{(x_1 - l)^2 + y_1^2}$ ;  $r_2 = \sqrt{(x_1 + l)^2 + y_1^2}$ . При этом  $x_1 = (r_2^2 - r_1^2)/4l$  и выражение для потенциала принимает вид:

$$U = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1 + r_2 + 2l}{r_1 + r_2 - 2l}.$$

Уравнение эквипотенциали  $r_1 + r_2 = \text{const}$  есть уравнение эллипса, фокусы которого расположены на концах нити. Так как поле имеет осевую симметрию, то эквипотенциальными поверхностями являются конфокальные эллипсоиды. Направление  $\mathbf{E} = -\text{grad}U$  в точке  $M$  делит угол  $(\widehat{r_1; r_2})$  пополам (свойство нормали к эллипсу).

2.22 (к задаче 1.22). Потенциал поля в точке  $M$  находится как потенциал линейного заряда  $U = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dl}{l R}$ , где  $l$  – длина кольца. Вследствие симметрии системы поле не зависит от азимутального угла  $\varphi$  и в цилиндрической системе координат

$$U = \frac{\tau r_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(z^2 + r^2 + r_0^2 - 2r_0 r \cos\varphi)^{1/2}}.$$

Для расчета потенциала используем следующие выражения:  $\varphi = \pi - 2\beta$ ,  $\cos\varphi = -\cos 2\beta = 2\sin^2\beta - 1$ ,  $d\varphi = -2d\beta$ .

2.23 (к задаче 1.23). Нейтральные точки расположены на оси  $z$ , причем одна из них находится в центре колец  $z = 0$ . Далее нужно использовать условие  $E_{1z} + E_{2z} = 0$  и формулу для напряженности поля:

$$E = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r_0^2)^{3/2}} + \frac{kqz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + 4r_0^2)^{3/2}} = 0.$$

Отсюда следует, что координаты нейтральных точек  $z_0 = \pm r_0 \sqrt{\frac{4 - k^{2/3}}{k^{2/3} - 1}}$ .

При  $k = \sqrt{8}$  имеем  $z_0 = \pm r_0 \sqrt{2}$ , а при  $k = \sqrt{27}$  получим  $z_0 = \pm r_0 / \sqrt{2}$ .

2.24 (к задаче 1.24). Диск можно рассматривать как систему заряженных колец. Элементарное кольцо радиуса  $r$  и толщиной  $dr$  несет заряд  $dq = \sigma \cdot 2\pi r dr$ . Потенциал поля в точке наблюдения  $M$ :  $dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)^{1/2}}$ .

Суммируя (интегрируя) элементарные потенциалы, получим

$$U = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ (z^2 + r_0^2)^{1/2} - z \right].$$

$$\text{Напряженность поля } E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{z}{(z^2 + r_0^2)^{1/2}} \right] = 2 \cdot 10^5 \text{ В/м.}$$

Если точка наблюдения находится около диска ( $z \ll r_0$ ), то  $E_z = \sigma / 2\epsilon_0$ .

2.25 (к задаче 1.25). Решение задачи обсуждается в [1, с. 509–510].

2.26 (к задаче 1.26). В каждой из трех областей потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta U_k = 0$ . Так как задача одномерна,  $U_k = U_k(x)$  и уравнение принимает вид  $\partial^2 U_k / \partial x^2 = 0$  при  $k = 1, 2, 3$ . Соответствующие решения – линейные функции:  $U_1 = A_1 x + B_1$ ;  $U_2 = A_2 x + B_2$ ;  $U_3 = A_3 x + B_3$ .

Для определения шести постоянных интегрирования используем краевые (граничные) условия:

$$1) U_1(0) = B_1 = 0;$$

$$2) U_1(a) = U_2(a) \text{ или } A_1 a = A_2 a + B_2;$$

$$3) \left( \frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial x} \right) \Big|_{x=a} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \text{ или } A_2 - A_1 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0};$$

$$4) U_3(b) - U_2(b) = \frac{\tau}{\varepsilon_0} \text{ или } A_3 b + B_3 - A_2 b - B_2 = \frac{\tau}{\varepsilon_0};$$

$$5) \left( \frac{\partial U_3}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial x} \right) \Big|_{x=b} = 0 \text{ или } A_3 - A_2 = 0;$$

$$6) U_3(h) = U_0 \text{ или } A_3 h + B_3 = U_0.$$

Отметим, что третье условие характеризует скачок нормальной составляющей  $\mathbf{E}$  на заряженной поверхности [1, с. 496], пятое условие – отсутствие такого скачка и четвертое – скачок потенциала при переходе через двойной слой [1, с. 507–508]. Решив систему уравнений, найдем постоянные. Окончательный результат:

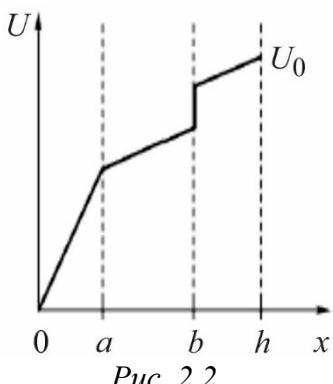


Рис. 2.2

$$U_1 = \left[ U_0 + (h-a) \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\tau}{\varepsilon_0} \right] \frac{x}{h};$$

$$U_2 = \left[ U_0 - a \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\tau}{\varepsilon_0} \right] \frac{x}{h} + a \frac{\sigma}{\varepsilon_0};$$

$$U_3 = \left[ U_0 - a \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\tau}{\varepsilon_0} \right] \frac{x}{h} + a \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\tau}{\varepsilon_0}.$$

График функции  $U(x)$  представлен на рис. 2.2.

2.27 (к задаче 1.27). Выделяем две области. В первой при  $0 < x < h$  поле описывается уравнением Лапласа  $\Delta U_1 = 0$ , во второй при  $x > h$  – уравнением Пуассона  $\Delta U_2 = -\rho/\varepsilon$ . Общие решения этих уравнений в случае одномерной задачи:

$$U_1 = C_1x + C_2; \quad U_2 = -\frac{0,2\sigma h}{\varepsilon} e^{-(x/h-1)} + C_3x + C_4.$$

Краевые (граничные) условия для определения четырех постоянных интегрирования:

1) при  $x = 0$ :  $U_1 = 0$ ;

2) при  $x = h$ :  $U_1 = U_2(a)$ ,  $\frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial x} = -\frac{\sigma_2}{\varepsilon}(b)$ ;

3) при  $x \rightarrow \infty$  (удаление от заряженной области) напряженность  $E \rightarrow 0$  и, следовательно,  $U_2 \rightarrow \text{const}$ .

Применив условия 1 и 3, получим:

$$U_1 = C_1x; \quad U_2 = -\frac{0,2\sigma h}{\varepsilon} e^{-(x/h-1)} + C_4.$$

Далее из условия 2(б) следует:  $\frac{0,2\sigma}{\varepsilon} - C_1 = -\frac{0,8\sigma}{\varepsilon}$ ;  $C_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ .

Условие 2(а) дает:  $\sigma h/\varepsilon = -0,2\sigma h/\varepsilon + C_4$ ;  
 $C_4 = 1,2\sigma h/\varepsilon$ .

Окончательные результаты:

$$U_1(x) = \frac{\sigma}{\varepsilon}x; \quad U_2 = -\frac{0,2\sigma h}{\varepsilon} e^{-(x/h-1)} + \frac{1,2\sigma h}{\varepsilon};$$

$$E_1(x) = -\frac{\sigma}{\varepsilon}; \quad E_2(x) = -\frac{0,2\sigma}{\varepsilon} e^{-(x/h-1)}.$$

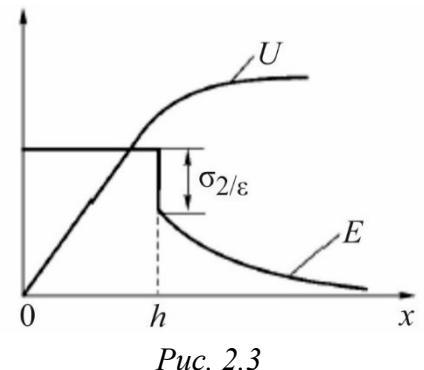


Рис. 2.3

Графики зависимостей  $U(x)$  и модуля  $E(x)$  представлены на рис. 2.3.

2.28 (к задаче 1.28). Вектор электрического смещения имеет только нормальную составляющую на границах слоев. В этом случае, как следует из граничных условий,  $D_1 = D_2 = D_3$ . Далее, используя уравнение связи  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ , получим

$$U_{\Delta} = E_1 h_1 + E_2 h_2 + E_3 h_3 = \left( \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} h_1 + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} h_2 + h_3 \right) E_{3\Delta} = 4,05 \text{ кВ.}$$

2.29 (к задаче 1.29). Пусть заряд эллипсоида  $q$ . Эквипотенциалами заряженной нити являются эллипсоиды вращения, причем потенциал поля при

замене  $\tau = q/2l$ . Потенциал заряда  $q$  определится:  $U = \frac{q}{8\pi\varepsilon l} \ln \frac{r_1 + r_2 + 2l}{r_1 + r_2 - 2l}$ .

Используя известные геометрические равенства  $r_1 + r_2 = 2a$  и  $l = \sqrt{a^2 - b^2}$ , можно переписать формулу потенциала и затем получить выражение для емкости эллипсоида

$$C = \frac{q}{U} = \frac{8\pi\epsilon\sqrt{a^2 - b^2}}{\ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}}.$$

2.30 (к задаче 1.30). Рекомендуется использовать указания к решению задачи 2.29. Напряженность поля  $E_1 = \tau/(\pi\epsilon_1 r)$ . Разность потенциалов между

$$\text{электродами: } U_1 - U_2 = \frac{\tau_1}{\pi\epsilon_1} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Так как в силу граничных условий:  $E_1 = E_2$ ,  $D_1/\epsilon_1 = D_2/\epsilon_2$  и  $\tau_2 = \tau_1\epsilon_2/\epsilon_1$ , то искомая емкость:  $C = \frac{(\tau_1 + \tau_2)}{U_1 - U_2} = \frac{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 240 \text{ пФ/м.}$

2.31 (к задаче 1.31). Расчетная модель состоит из двух двупроводных линий I и II, расположенных в однородном диэлектрике. Погонная емкость линии  $C = \tau/(U_1 - U_2)$ . Потенциал в точке 1 находится в соответствии с принципом наложения:  $U_1 = U_I + U_{II}$ . Очевидно, что в точке 2 потенциал  $U_2 = -U_1$ . С учетом условия «тонких проводов» емкость определится:

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{2Hh}{r_0 \sqrt{h^2 + (2H)^2}}}.$$

При увеличении  $H$  емкость уменьшается. В пределе при  $H \gg h$  получаем формулу «свободной» линии (см. решение задачи 2.12).

## 2.2. Электрическое поле постоянного тока

2.32 (к задаче 1.71). Решение задачи обсуждается в [1, с. 542]. Дополнительно запишем плотность свободного заряда:  $\rho = \frac{\epsilon a^2 U_0}{(\gamma_1 - ax)^2 \ln [\gamma_1 / (\gamma_1 - ah)]}$  и плотность связанного заряда  $\sigma_{CB} = (\epsilon_0 / \epsilon - 1)$ .

2.33 (к задаче 1.72). В силу сферической симметрии векторные линии поля тока радиальны. Плотность тока  $J = I/(4\pi r^2)$ , и по закону Ома  $E = J/\gamma = I/4\pi ar$ .

$$\text{Потенциал в заданном поле } \mathbf{E}: U(r) = \int_r^{r_2} E dr = \frac{I}{4\pi a} \ln \frac{r_2}{r}.$$

$$\text{Сопротивление утечки: } R = \frac{U_1 - U_2}{I} = \frac{1}{4\pi a} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

2.34 (к задаче 1.73). Следует воспользоваться решением задачи 2.25, где найдена емкость  $C$  на единицу длины такого кабеля. На основании математической аналогии поля постоянного тока и электростатического поля сопротивление изоляции

$$R = \frac{1}{C} \Big|_{\varepsilon \rightarrow \gamma} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\gamma_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\gamma_2} \ln \frac{r_3}{r_2} \right) = 5,22 \cdot 10^7 \text{ Ом/м.}$$

Ток утечки по закону Ома  $I = U_0/R = 5,75 \cdot 10^{-8}$  А. Принимая в выражении для сопротивления  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$  (однослойная изоляция), получим:

$$\gamma = \left( \frac{1}{\gamma_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\gamma_2} \ln \frac{r_3}{r_2} \right)^{-1} \ln \frac{r_3}{r_1} = 2,11 \cdot 10^{-9} \text{ См/м.}$$

2.35 (к задаче 1.74). Для решения нужно использовать выражение для погонной емкости двухпроводной линии и принцип математической аналогии полей. Ток утечки определится:  $I = GU_0 = Ca \Big|_{\varepsilon \rightarrow \gamma} U_0 = \frac{\pi \gamma a}{\ln(h/r_0)} U_0$ .

2.36 (к задаче 1.75). По условию задачи эквипотенциальные поверхности в грунте имеют форму полусфер [1, с. 545]. Векторные линии поля радиальны, причем:

$$J_r = \frac{I}{2\pi r^2}; \quad E_r = \frac{I}{2\pi \gamma r^2}, \text{ где } r - \text{расстояние от центра заземлителя.}$$

Потенциал заземлителя относительно бесконечно удаленной точки  $U = \int_{r_0}^{\infty} E_r dr$ , а сопротивление заземлителя  $R = U/I = 1/(2\pi \gamma r_0) = 10,6$  Ом.

$$\text{Шаговое напряжение определится } U_h = \frac{I}{2\pi \gamma} \cdot \frac{h}{r_0(r_0+h)} = IR \frac{h}{r_0+h} = 738 \text{ В.}$$

2.37 (к задаче 1.76). В случаях 1 и 3 векторные линии поля радиальны. В случае 2 для расчета электрического поля необходимо применить метод зеркальных изображений [1, с. 55]. Сопротивления заземления:

$$R_1 = \frac{1}{2\pi\gamma r_0} = 318 \text{ Ом}; \quad R_2 = \frac{1}{4\pi\gamma} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{2h - r_0} \right) = 172 \text{ Ом};$$

$$R_3 = \frac{1}{4\pi\gamma r_0} = \frac{R_1}{2} = 159 \text{ Ом.}$$

2.38 (к задаче 1.77). Задача сводится к определению проводимости шайбы. Метод решения изложен в [1, с. 547]. Проводимость  $G = G_1 + G_2 = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)h}{\pi} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = 7 \text{ См}$ . Здесь  $G_1$  и  $G_2$  – проводимости первой и второй полушайб. Ток в шайбе определится  $i_0 = GU_0 = 7 \text{ А}$ .

2.39 (к задаче 1.78). Две близко расположенные параллели вырезают из сферы тонкостенное кольцо, длина которого в направлении тока определяется  $dl = r_0 d\theta$ , а площадь поперечного сечения  $S = 2\pi\rho h = 2\pi h r_0 \sin\theta$ . Сопротивление кольца, поле в котором можно считать однородным, будет:

$$dR = \frac{dl}{\gamma S} = \frac{d\theta}{2\pi\gamma h \sin\theta}.$$

Сопротивление сферы находится путем суммирования сопротивлений последовательно соединенных колец:

$$R = 2 \int_{\theta_0}^{\pi/2} dR = -\frac{1}{2\pi\gamma h} \ln \left( \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \right) = \frac{1}{2\pi\gamma h} \ln \left( \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} \right), \text{ где } \theta_0 = \arcsin(a/r_0).$$

При условии малых электродов ( $a \ll r_0$ ) получим:

$$R = \frac{1}{\pi\gamma h} \ln \frac{2r_0}{a} = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ Ом.}$$

### 2.3. Магнитное поле постоянного тока

2.40 (к задаче 1.113). Вращающуюся сферу можно рассматривать как систему замкнутых кольцевых токов. Искомое поле определяется в результате суммирования элементарных полей этих токов.

Заряд на кольце, радиус которого  $R$  и ширина  $r_0 d\theta$ , будет  $dq = 2\pi\sigma r_0 R d\theta$ , где  $\sigma = q / 4\pi r_0^2$  – поверхность плотность заряда. Соответствующий кольцевой ток  $di = ndq$ .

Магнитное поле постоянного тока в точке наблюдения  $M(z)$  определяется известным соотношением [см. задачу 1.123]:

$$dH = dH_z = \frac{R^2 di}{2(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \frac{qn}{4r_0} \cdot \frac{R^3}{\rho^3} d\theta,$$

где  $z'$  – координата центра кольца. При интегрировании этой функции целесообразно в качестве переменной избрать  $\rho$ . После преобразований получим:

$$dH = -\frac{qn}{16r_0 z^3} \left[ \rho^2 - 2(r_0^2 + z^2) + \frac{(r_0^2 - z^2)^2}{\rho^2} \right] d\rho.$$

Поле внутри оболочки находим, интегрируя  $dH$  в пределах от  $\rho_1 = r_0 - z$  до  $\rho_2 = r_0 + z$ . В результате  $H_z = \frac{qn}{3r_0} = 10^{-3}$  А/м.

Поле одинаково во всех точках оси при  $|z| \leq r_0$ . При определении поля вне оболочки ( $z > a$ ) пределы интегрирования  $\rho_1 = r_0 - z$ ;  $\rho_2 = r_0 + z$ .

Напряженность поля на оси  $H_z = \frac{qnr_0^3}{3z^3}$ .

Зависимость  $1/z^3$  характерна для поля диполя.

2.41 (к задаче 1.114). В задаче ось  $z$  является осью симметрии в распределении тока и поля. Векторные линии **H** совпадают с окружностями, плоскость которых перпендикулярна оси  $z$  (см. рис. 1.38, *a*). Применяя закон полного тока в интегральной форме, легко найти напряженность поля в некоторой плоскости  $z = \text{const}$  на расстоянии  $r$  от оси (рис. 1.38, *b*):  $H = \frac{i_S}{2\pi r}$ , где  $i_S$  – ток, протекающий через площадь  $S$  круга радиуса  $r$ . Этот ток по определению равен:

$$i_S = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S J \cos \theta' dS,$$

где **J** – вектор плотности тока на элементе площади  $dS$ . Подинтегральные функции:

$$J = i / (2\pi R^2); \quad \cos \theta' = z/R; \quad R = (z^2 + \rho^2)^{1/2}; \quad dS = \rho d\rho d\phi.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$H = \frac{i}{2\pi r} \left[ 1 - \frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right] = \frac{i}{2\pi r} \cdot (1 - \cos \theta).$$

На оси  $z$  имеем  $H = 0$ . На поверхности земли  $H = i/(2\pi r)$ . Ток, равномерно растекающийся из сферы, не имеет магнитного поля. Это следует из принципа суперпозиции. Достаточно мысленно рассечь сферу диаметральной плоскостью.

Проведем решение этой же задачи, используя первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$ . В сферической системе координат  $R, \theta, \varphi$  плотность тока имеет только радиальную составляющую  $J = J_R = i/(2\pi R^2)$ , а магнитное поле не зависит от координаты  $\varphi$ . Проецируя обе части уравнения на ось  $R$ , получим:

$$\text{rot}_R \mathbf{H} = J_R; \quad \frac{1}{R \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (H_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \varphi} \right) = \frac{i}{2\pi R^2}.$$

Интегрирование приводит к выражениям:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (H_\varphi \sin \theta) = \frac{i \sin \theta}{2\pi R}; \quad H_\varphi \sin \theta = -\frac{i \cos \theta}{2\pi R} + C.$$

Из условий на оси симметрии  $z$  (при  $\theta = 0$ ) следует  $C = 1/(2\pi R)$ . Таким образом, магнитное поле в земле:  $H_\varphi = \frac{i}{2\pi R \sin \theta} (1 - \cos \theta) = \frac{i}{2\pi r} (1 - \cos \theta)$ .

**2.42** (к задаче 1.115). Рассматривая весьма длинный вращающийся цилиндр как систему колецевых токов, можно считать, что в средней его части напряженность поля имеет только осевую составляющую. Вне цилиндра напряженность поля близка к нулю, как в известном случае длинного (эталонного) соленоида.

Для определения внутреннего поля применим закон полного тока в дифференциальной форме  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$ . В цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , ось  $z$  которой совпадает с осью цилиндра,  $H = H_z$  и не зависит от  $\varphi$  и  $z$ . Вектор плотности тока имеет только одну составляющую  $J = J_\varphi = \rho v = \rho 2\pi r n$ , где  $v$  – скорость заряда в точке с координатой  $r$ .

Проецируя обе части уравнения на ось  $\varphi$ , получим:

$$\text{rot}_\varphi \mathbf{H} = J_\varphi; \quad \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = 2\pi \rho n r.$$

Отсюда следует, что  $H_z = -\pi \rho n r^2 + C$ .

Постоянная интегрирования определяется из граничного условия: при  $r = r_0$  имеем  $H_z = 0$ . Окончательно получаем  $H_z = \pi \rho n (r_0^2 - r^2)$ .

2.43 (к задаче 1.116). Симметрия задачи ( $J = J_z$ ,  $H = H_\varphi$ ) позволяет использовать для расчета уравнения закона полного тока в интегральной или дифференциальной формах.

Уравнение  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$  в условиях задачи имеет вид:  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) = \frac{J_0}{1 + r/a}$ .

Постоянная интегрирования определяется из условия  $H_\varphi = 0$  при  $r = 0$ .

$$\text{Напряженность поля } H = a J_0 \left[ 1 - \frac{a}{r} \ln \left( \frac{r}{a} + 1 \right) \right].$$

2.44 (к задаче 1.117). Поскольку  $h \gg a$ , ленту можно разбить на тонкие нити с токами  $di = idx/h$ , текущими вдоль оси  $z$ . Магнитная индукция в точке  $M(y)$  находится по формуле для бесконечно длинного проводника (см.

указания к решению задачи 1.122):  $dB = \mu_0 dH = \frac{\mu_0 i}{2\pi h} dx$ .

Вследствие симметрии относительно оси  $y$  составляющая  $B_y = 0$ . Единственная составляющая  $B_z$  находится по принципу наложения:

$$B = B_x = \int_{-h/2}^{h/2} dB \cos \beta = \frac{\mu_0 y}{\pi h} \int_0^{h/2} \frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{\mu_0 i}{\pi h} \operatorname{arctg} \frac{h}{2y} = \frac{\mu_0 i}{\pi h} \beta_0.$$

В области около ленты ( $\beta_0 \rightarrow \pi/2$ ) имеем  $B_x = \mu_0 i / (2h)$  – практически однородное поле.

На оси  $x$  вне ленты ( $|x| > h/2$ ) расчет проводится аналогично. Здесь есть только одна составляющая:  $B_x = -\frac{i}{2\pi h} \ln \frac{x + h/2}{x - h/2}$ .

2.45 (к задаче 1.118). Задача обсуждается в [1, с. 561–562]. Поле внутри оболочки оказывается однородным  $H_z = qn/(3\epsilon_0)$ . Оно совпадает с частным решением для оси вращения, полученным в задаче 1.113.

2.46 (к задаче 1.119). Задача обсуждается в [1, с. 568–569]. При  $d \ll l_c$  из граничных условий следует, что индукции в сердечнике и зазоре равны, причем

$$B = \frac{ni}{l_c/\mu + d/\mu_0}.$$

При отсутствии зазора индукция  $B' = \mu ni/l_0 = \mu ni/(l_c + d)$  и отношение  $k = \frac{B}{B'} = \frac{l_c/d + 1}{l_c/d + \mu/\mu_0} < 1$ ; если  $l_c/d = 50$  и  $\mu/\mu_0 = 100$ , то  $k = 0,33$ .

Индуктивность катушки с зазором  $L = \mu n^2 S / (l_c + \mu d / \mu_0)$ . При зазоре, составляющем всего лишь  $0,02l_c$ , индуктивность уменьшается в три раза.

2.47 (к задаче 1.120). При расчете следует исходить из представления индуктивности как меры энергии магнитного поля:  $W_M = Li^2/2$ . Задаваясь током  $i$ , по закону полного тока в интегральной форме находим вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$ , плотность магнитной энергии  $w_M$  и затем энергию в стенке провода единичной длины.

Окончательный результат:

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \left[ \frac{r_2^2 - 3r_1^2}{4(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{r_1^4}{(r_2^2 - r_1^2)^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right].$$

Внутренняя индуктивность сплошного цилиндрического проводника при  $r_1 = 0$  равна  $L = \mu/8\pi$  и не зависит от радиуса.

2.48 (к задаче 1.121). Искомая сила:

$$F = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \mu_2 i_1 \frac{i_2}{2\pi(2h)} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \mu_2 i_2 \frac{i_2}{2\pi(2h)} = \frac{\mu_2 i_2}{4\pi h} \frac{2\mu_1 i_1 + \mu_1 i_2 - \mu_2 i_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

2.49 (к задаче 1.122). По закону Био–Савара напряженность поля элемента тока в точке наблюдения  $M(0, y)$  равна  $d\mathbf{H} = i[d\mathbf{l}\mathbf{r}] / (4\pi r^3)$ . В выбранной системе координат (см. рис. 1.41) модуль напряженности  $dH = \frac{iy}{4\pi} \cdot \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ . В соответствии с принципом наложения:

$$H = \int_{x_1}^{x_2} dH = \frac{i}{4\pi y} \left( \frac{x_2}{(x_2^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{x_1}{(x_1^2 + y^2)^{1/2}} \right) = \frac{i}{4\pi y} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1).$$

Напряженность поля бесконечно длинного проводника ( $\beta_2 = -\beta_1 = \pi/2$ ) будет  $H = i/(2\pi y)$ .

2.50 (к задаче 1.123). Напряженность поля элемента тока в точке наблюдения  $M(z)$  равна  $dH = idl/\left(4\pi r^2\right)$ . По принципу наложения  $\mathbf{H} = \oint_l d\mathbf{H}$ .

Вследствие цилиндрической симметрии только одна составляющая  $\mathbf{H}$  отлична от нуля:

$$H = H_z = \oint_l dH \cos\beta = \frac{ir_0^2}{2r^3} = \frac{ir_0^2}{2(r_0^2 + z^2)^{3/2}}.$$

В центре кольца  $H = i/(2r_0)$ .

2.51 (к задаче 1.124). Рассматриваем катушку как систему колец. По кольцу малой толщины  $dz'$  протекает ток  $di = nidz'/l$ . Поле этого элементарного кольца в точке наблюдения  $M(z)$ :  $dH_z = \frac{nir_0^2}{2l} \frac{dz'}{(r_0^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$ .

Искомое поле:

$$H_z = \int_{-l/2}^{l/2} dH_z = \frac{ni}{2l} \left( \frac{z + l/2}{((z + l/2)^2 + r_0^2)^{1/2}} - \frac{z - l/2}{((z - l/2)^2 + r_0^2)^{1/2}} \right) = \frac{ni}{2l} (\cos\beta_1 - \cos\beta_2).$$

Если точка наблюдения  $M(z)$  находится внутри катушки и  $r_0 \ll l$  (эталонный соленоид), то  $\beta_1 \rightarrow 0$ ,  $\beta_2 \rightarrow \pi$  и  $H_z = ni/l = n'i$ , где  $n'$  – число витков на единицу длины соленоида.

2.52 (к задаче 1.125). Последовательно рассмотрим две модели. В первой ток с плотностью  $\mathbf{J}$  заполняет весь объем цилиндра радиуса  $r_1$ . Тогда модуль напряженности поля в точке наблюдения  $M$  легко находится с помощью закона полного тока:  $H_1 = Jr/2$ . Перейдем к векторной форме записи  $\mathbf{H}_1 = [\mathbf{J}\mathbf{r}]/2$ . Во второй модели ток обратного направления, имеющий ту же плотность, заполняет объем цилиндра радиуса  $r_2$ . Напряженность поля в точке  $M$  будет  $\mathbf{H}_2 = -[\mathbf{J}\mathbf{r}']/2$ . Наложение двух моделей и их решений приводит к искомому выражению:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 = \frac{1}{2} [\mathbf{J}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] = \frac{1}{2} [\mathbf{J}\mathbf{a}].$$

Вектор  $\mathbf{H}$  перпендикулярен  $\mathbf{a}$ , модуль  $H = Ja/2$ . При совпадении осей (концентрические цилиндры)  $H = 0$ .

2.53 (к задаче 1.126). Нужно использовать указания к задаче 2.40. Ток элементарного кольца  $di = nid\theta/\pi$ , а  $\rho = r_0$ , так как точка наблюдения  $M$  находится в центре шара. Ответ:  $H_z = ni/(4r_0)$ .

2.54 (к задаче 1.127). Воспользуемся выражением для векторного потенциала двухпроводной линии [1, с. 556]. В точке наблюдения  $M(x, y)$ :

$$A_x = 0; \quad A_y = 0; \quad A_z = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

При выбранных направлениях токов и системе координат  $A_z > 0$  в левой полуплоскости при  $x < 0$ . При  $x > 0$  имеем  $A_z < 0$ . Расстояния до осей проводов:  $r_1 = \sqrt{y^2 + (h+x)^2}$ ,  $r_2 = \sqrt{y^2 + (h-x)^2}$ .

Вектор магнитной индукции  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$  и, следовательно, его составляющие:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial y}; \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\partial A_z}{\partial x}; \quad B_z = 0.$$

Окончательные результаты:

$$B_x = \frac{\mu_0 i y}{2\pi} \left( \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right); \quad B_y = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left( \frac{h+x}{r_1^2} + \frac{h-x}{r_2^2} \right).$$

В плоскости проводов линии при  $y = 0$ :  $B_x = 0$ ;  $B_y = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left( \frac{1}{h+x} + \frac{1}{h-x} \right)$ .

В плоскости симметрии линии при  $x = 0$ :  $B_x = 0$ ;  $B_y = \frac{\mu_0 i h}{\pi r_1^2} = \frac{\mu_0 i h}{\pi (h^2 + y^2)}$ .

Две последние формулы для индукции на осях  $x$  и  $y$  легко выводятся методом наложения при использовании известной формулы для поля длинного провода:  $H = i/(2\pi r)$ .

2.55 (к задаче 1.128). Внутри оболочки кабеля поле полностью определяется током жилы. Напряженность поля на оси  $x$  внутри жилы  $H_y = \frac{i(h-x)}{2\pi a^2}$ , а вне жилы  $H_y = \frac{i}{[2\pi(h-x)]}$ . За пределами кабеля при  $|x| > b$

поле есть результат наложения полей оболочки и жилы:

$$H_y = \frac{i}{(2\pi x)} - \frac{i}{[2\pi(x-h)]} = \frac{ih}{[2\pi x(h-x)]}.$$

График  $H_y(x)$  приведен на рис. 2.4. Приняв в условии задачи, что оболочка имеет нулевую толщину, получаем скачок касательной составляющей вектора  $\mathbf{H}$  при  $x = b = 1,2$  см на величину плотности поверхностного тока:

$$J_S = i/(2\pi b) = 27 \text{ А/м},$$

как указано в [1, с. 482].

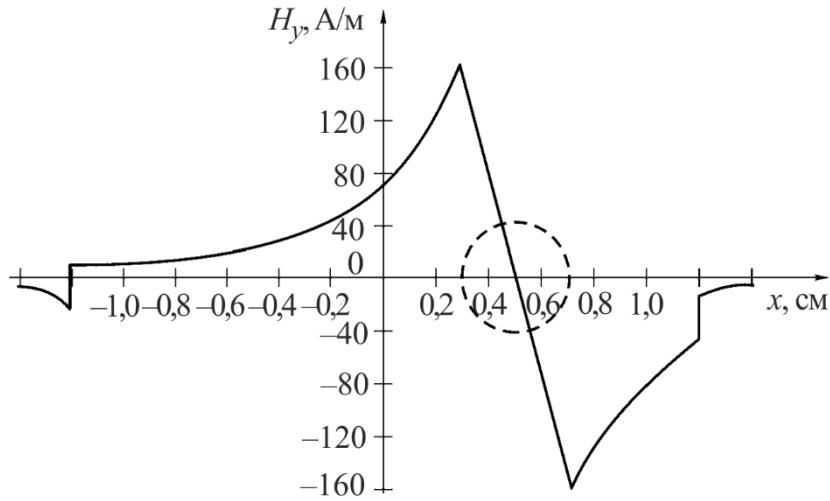


Рис. 2.4

2.56 (к задаче 1.129). В первой области, где протекает ток, векторный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона [1, с. 554]  $\Delta \mathbf{A}_1 = -\mu_0 \mathbf{J}$ . Постоянный ток по сечению проводника распределяется равномерно; плотность тока  $J = J_z = i/(\pi r_0^2)$ . Векторный потенциал также имеет только одну составляющую  $A_1 = A_{1z}$ . Вместо векторного дифференциального уравнения имеем одно скалярное  $\Delta A_{1z} = -\mu_0 J_{1z}$ . Запишем его в цилиндрической системе координат:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_{1z}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 A_{1z}}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial^2 A_{1z}}{\partial z^2} = -\mu J_z.$$

Поле длинного проводника плоскопараллельное ( $\partial/\partial z = 0$ ) и имеет осевую симметрию ( $\partial/\partial \varphi = 0$ ). Поэтому уравнение принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_{1z}}{\partial r} \right) = -\mu J_z,$$

а его решение  $A_{1z} = -\frac{\mu_0 J_z r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2$ .

Во второй области в отсутствие тока поле описывается уравнением Лапласа  $\Delta \mathbf{A}_2 = 0$ :  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_{2z}}{\partial r} \right) = 0$ , решение которого  $A_{2z} = C_3 \ln r + C_4$ .

Константа  $C_1 = 0$ , поскольку в противном случае на оси провода при  $r \rightarrow 0$  потенциал  $A_{1z} \rightarrow \infty$ . Остальные постоянные интегрирования находятся из граничных условий на поверхности провода. При  $r = r_0$  имеем:  
 1)  $A_{1z} = A_{2z}$ ; 2)  $\partial A_{1z} / \partial r = \partial A_{2z} / \partial r$ .

Применив первое условие, получаем  $\frac{-\mu_0 J_z r_0^2}{4} + C_2 = C_3 \ln r_0 + C_4$ , а из второго условия следует  $\frac{(\mu_0 J_z r^2)}{2} = \frac{C_3}{r_0}$ .

Окончательные выражения:

$$A_{1z} = -\frac{\mu_0 J_z r^2}{4} + C_2 = -\frac{\mu_0 i r^2}{4\pi r_0^2} + C_2;$$

$$A_{2z} = -\frac{\mu_0 J_z r_0^2}{4} - \frac{\mu_0 J_z r_0^2}{2} \ln \frac{r}{r_0} + C_2 = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} - \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0} + C_2.$$

Постоянная  $C_2$  остается неопределенной. Ее значение зависит от выбора точки отсчета потенциала. Вектор магнитной индукции и векторный потенциал связаны векторным соотношением  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ , которое сводится к трем скалярным величинам для определения составляющих:

$$B_r = \operatorname{rot}_r \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_{1z}}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = 0; \quad B_z = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r A_\varphi - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \right] = 0;$$

$$B_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{\partial A_z}{\partial r}.$$

Единственные составляющие индукции внутри и вне провода:

$$B_{1\varphi} = -\frac{\partial A_{1z}}{\partial r} = \frac{\mu_0 i r}{2\pi r_0^2} = \frac{J_z r}{2}; \quad B_{2\varphi} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

Векторные линии поля – концентрические окружности. Направление вектора  $\mathbf{B}$  связано с направлением тока правилом правого винта ( $B_\varphi > 0$ ).

2.57 (к задаче 1.130). Энергию магнитного поля линии можно найти, интегрируя плотность энергии  $w_M = BH/2$  по всему объему, занимаемому полем. При другом подходе используется выражение  $W_M = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV$ .

Здесь интегрирование ведется по объему, в котором  $\mathbf{J} \neq 0$ , т. е. по объемам  $V_1$  и  $V_2$  на единицу длины проводов линии.

В первом проводе плотность тока  $J = i/(\pi a^2)$ . Векторный потенциал в точке  $M$  [см. задачу 1.129]:

$$A = A_1 + A_2 = -\frac{\mu_0 i r^2}{4\pi a^2} + \frac{\mu_0 i}{4\pi} - \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln b + \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln R,$$

где составляющая  $A_1$  связана с током первого провода, а  $A_2$  – с обратным током второго провода, причем:

$$R = \sqrt{h^2 + r^2 - 2hr \cos \varphi} = h \sqrt{1 + (r/h)^2 - 2r \cos \varphi / h}.$$

Поскольку  $\ln R = \ln h + \frac{1}{2} \ln \left[ 1 + (r/h)^2 - 2r \cos \varphi / h \right]$ , выражение для векторного потенциала приобретает вид

$$A = \frac{\mu_0 i}{4\pi} + \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{h}{b} - \frac{\mu_0 i r^2}{4\pi a^2} + \frac{\mu_0 i}{4\pi} \ln \left[ 1 + (r/h)^2 - 2r \cos \varphi / h \right].$$

Магнитная энергия, обусловленная током в первом проводе,

$$W_{1M} = \frac{1}{2} \int_{V_1} JA \, dV = \frac{1}{2} J \int_{V_1} A \, dV = \frac{i}{2\pi a^2} \int_{V_1} A \, dV = \frac{i}{2\pi a^2} \int_0^{a/2\pi} \int_0^\pi A \, r \, dr \, d\varphi,$$

где  $dV = r \, dr \, d\varphi$  – элемент объема на единицу длины провода.

Выполнив интегрирование, получим:  $W_{1M} = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi} \left( \frac{1}{2} + 2 \ln \frac{h}{b} \right)$ .

Магнитная энергия поля второго тока:  $W_{2M} = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi} \left( \frac{1}{2} + 2 \ln \frac{h}{a} \right)$ .

Так как  $W_M = W_{1M} + W_{2M} = Li^2/2$ , то индуктивность линии:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( 1 + 4 \ln \frac{h}{\sqrt{ab}} \right).$$

Численные результаты:  $L = 4,13 \cdot 10^{-7}$  Гн/м; при отсутствии зазора между проводами ( $h = a + b = 3$  см) получим  $L = 4 \cdot 10^{-7}$  Гн/м.

2.58 (к задаче 1.131). Пусть ток первой обмотки  $i_1$ . При плотной намотке и  $\mu \gg \mu_0$  магнитное поле локализовано в сердечнике, векторные линии по-

ля – концентрические окружности. Для линии радиуса  $r$  закон полного тока принимает вид  $H_1 2\pi r = i_S$ . Полный ток, охватываемый линией поля,  $i_S = n_1 i_1$  и, следовательно, напряженность поля  $H_1 = n_1 i_1 / (2\pi r)$ .

Магнитный поток, пронизывающий один виток первой обмотки,

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S} = \mu \int_S H_1 \cdot dS,$$

где  $S$  – площадь сечения сердечника. Таким образом,

$$\Phi = \frac{\mu n_1 i_1}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} h dr = \frac{\mu n_1 h i_1}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

По определению потокосцепление  $\psi_{11} = n_1 \Phi$ , следовательно, собственная индуктивность первой обмотки  $L = \frac{\psi_{11}}{i} = \frac{\mu n_1^2 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$ .

Магнитный поток через один виток второй обмотки остается таким же, потокосцепление  $\psi_{21} = n_2 \Phi$  и взаимная индуктивность обмоток:

$$M = \frac{\psi_{21}}{i_1} = \frac{\mu n_1 n_2}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

2.59 (к задаче 1.132). Задаем ток  $i$  в линии с проводами 1 и 2. Взаимная индуктивность  $M = \Phi/i$ , где  $\Phi$  – магнитный поток через площадь прямоугольного витка, образованного проводами 3 и 4 длиной  $l$ . Вычисление потока упрощается при использовании векторного потенциала двухпроводной линии [1, с. 556]. В точке  $P$  вектор  $\mathbf{A}$  направлен вдоль проводов. А его модуль  $A = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$ .

Поток  $\Phi$  вычисляется как циркуляция вектора  $\mathbf{A}$  по контуру витка. На проводе 3:  $A_3 = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{h_1^2 + d^2}}{d}$ .

Записав выражение для  $A_4$ , найдем  $\Phi = (A_3 - A_4)l$  и затем:

$$M = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{(h_2 + d)\sqrt{h_1^2 + d^2}}{d\sqrt{h_1^2 + (h_2 + d)^2}}.$$

2.60 (к задаче 1.133). Определение магнитного потока, создаваемого током одной из рамок, через площадь соседней рамки является достаточно сложной задачей. Проведем решение методом участков.

Воспользуемся выражением, не связанным непосредственно с расчетом поля [1, с. 565]:  $M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{r}$ .

Разобьем контуры на прямолинейные участки и вычислим двойной интеграл для каждой пары. Очевидно, что для взаимно перпендикулярных сторон квадратов  $d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = 0$ , и поэтому такие пары не рассматриваются.

Обозначим взаимную индуктивность участков, лежащих на расстоянии  $h$ , через  $M'$ , а лежащих на расстоянии, равном  $\sqrt{h^2 + d^2}$ , через  $M''$ . Взаимная индуктивность в целом определяется как сумма  $M = 4M' + 4M''$ , где

$$M' = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^a \int_0^a \frac{dy_1 \cdot dy_2}{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + h^2}}, \quad M'' = -\frac{\mu}{4\pi} \int_0^a \int_0^a \frac{dy_1 \cdot dy_2}{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (h^2 + a^2)}}.$$

Значение  $M'' < 0$ , так как здесь  $d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = -1$  (токи антипараллельны). Вычислим  $M'$ :

$$\begin{aligned} M' &= \frac{\mu}{4\pi} \int_0^a dy_2 \int_0^a \frac{dy_1}{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + h^2}} = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^a \ln \left( y_1 - y_2 + \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + h^2} \right) dy = \\ &= \frac{\mu}{2\pi} \left[ h - \sqrt{h^2 + a^2} + a \ln \frac{a + \sqrt{h^2 + a^2}}{h} \right]. \end{aligned}$$

Выражение для  $M''$  получается при замене  $h$  на  $\sqrt{h^2 + a^2}$ . Окончательный результат:

$$M = \frac{2\mu}{\pi} \left[ h - 2\sqrt{h^2 + a^2} + \sqrt{h^2 + 2a^2} + a \ln \frac{\left( a + \sqrt{h^2 + a^2} \right) \sqrt{h^2 + a^2}}{h \left( a + \sqrt{h^2 + 2a^2} \right)} \right].$$

Численное решение:  $M = 4,8 \cdot 10^{-9}$  Гн.

2.61 (к задаче 1.134). Пусть ток в проводе  $i$ . Магнитная индукция в плоскости рамки на расстоянии  $r$  от оси провода  $B = \mu_0 i / (2\pi r)$ . Магнитный поток, пронизывающий площадь  $S$  рамки, равен потоку через прямоугольник

со сторонами  $(r_2 - r_1)$  и  $b$  (см. рис. 1.52):  $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 b i}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 b i}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$ ,

где  $r_1 = h$ ;  $r_2 = \sqrt{h^2 + a^2 - 2ha \cos \alpha}$ . Потокосцепление  $\psi = n\Phi$ , а искомая взаимная индуктивность определится:

$$M = \frac{\mu_0 n b}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{h^2 + a^2 - 2ha \cos \alpha}}{h}.$$

2.62 (к задаче 1.135). Рекомендуется использовать указания к решению задачи 1.134. В первой и второй системе соответственно получим:

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{\sqrt{h^2 + b^2}}; \quad M = \frac{\mu_0 l}{4\pi} \ln \frac{b^2 + h^2}{a^2 + h^2}.$$

2.63 (к задаче 1.136). Пусть ток в проводе  $i$ . Магнитная индукция в элементе площади витка  $dS = r dr \cdot d\alpha$  равна  $B = \mu_0 i / [2\pi(d - r \cos \alpha)]$ . Магнитный поток через площадь витка:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\mu_0 i}{\pi} \int_0^{r_0} \int_0^\pi \frac{r dr \cdot d\alpha}{d - r \cos \alpha} = \frac{\mu_0 i}{\pi} \int_0^{r_0} dr \int_0^\pi \frac{d\alpha}{\left(\frac{d}{r} - \cos \alpha\right)} = \\ &= \frac{\mu_0 i}{\pi} \int_0^{r_0} \frac{\pi dr}{\sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2 - 1}} = \mu_0 i \left( d - \sqrt{d^2 - r_0^2} \right). \end{aligned}$$

Взаимная индуктивность:  $M = \mu_0 \left( d - \sqrt{d^2 - r_0^2} \right)$ .

В случае малого витка при  $r_0 \ll d$ :

$$\left( d^2 - r_0^2 \right)^{1/2} = d \left( 1 - \frac{r_0^2}{d^2} \right)^{1/2} \approx d \left( 1 - \frac{r_0^2}{2d^2} \right) = d - \frac{r_0^2}{2d},$$

следовательно,  $M = \mu_0 r_0^2 / (2d)$ .

Эту формулу можно получить элементарно. Пусть в плоскости витка индукция  $B = \text{const}$  и равна значению в центре витка:  $B_0 = \mu i / (2\pi d)$ . Тогда  $M = \Phi_0 / i = B_0 \pi r_0^2 / i = \mu_0 r_0^2 / (2d)$ .

2.64 (к задаче 1.137). Сила, действующая на элемент тока  $d\mathbf{F} = i[d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]$ , имеет одну составляющую  $dF_x = -B_z dy$ . Вектор  $\mathbf{B}$  – магнитная индукция

внешнего (по отношению к  $idl$ ) поля. Это поле создается частью провода на оси  $x$  и равно  $B_z = \mu_0 i / (4\pi y)$ . Оно вдвое меньше поля бесконечно длинного

проводка. Искомая сила «выпрямляет» провод:  $F_x = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_a^b \frac{dy}{y} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$ .

Численное решение:  $F = 24 \text{ Н}$ .

2.65. (к задаче 1.138). Сила, действующая на элемент тока витка, имеет две составляющие. Вдоль оси  $x$ :  $dF_x = iB_z r_0 \cos \alpha d\alpha = iB_0 r_0 (x/a - 1) \cos \alpha d\alpha$ .

Результирующая сила

$$F_x = 2iB_0 r_0 \int_0^{\pi} \left( \frac{x_0 + r_0 \cos \alpha}{a} - 1 \right) \cos \alpha d\alpha = 2iB_0 r_0 \frac{r_0}{a} \int_0^{\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{iB_0 \pi r_0^2}{a}.$$

Виток стремится занять положение, когда пронизывающий его магнитный поток возрастает ( $F_x > 0$ ). При изменении направления тока  $F_x < 0$ .

Однако виток находится в неустойчивом равновесии. Он стремится повернуться вокруг оси  $x$  а далее опять  $F_x > 0$ .

Составляющая  $dF_y = iB_z r_0 \sin \alpha d\alpha$  вызывает только деформацию витка.

2.66 (к задаче 1.139). По закону Ампера сила, действующая во внешнем поле  $\mathbf{B}$  на элементарный объем  $dV$  с током плотностью  $\mathbf{J}$  будет  $d\mathbf{F} = [\mathbf{J}\mathbf{B}]dV$ . Модуль силы  $dF = JB dV$ ; модуль момента  $dN = 2r dF$ . Так как плотность тока  $J = i/(2\pi hr)$ , а  $dV = hr dr d\alpha$ , то элементарный момент

$$dN = iBr dr d\alpha / \pi. \text{ Момент, приложенный к диску, } N = \frac{iB}{\pi} \int_0^{r_0} r dr \int_0^{\pi} d\alpha = \frac{iBr_0^2}{2}.$$

2.67 (к задаче 1.140). Обобщенная сила, действующая вдоль координаты  $r$ , будет:

$$F_r = \frac{\partial W_M}{\partial r} = \frac{i^2}{2} \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{\mu_0 i^2}{2} \left( \ln \frac{8r}{a} - 0,75 \right).$$

Так как  $F_r > 0$ , сила действует в направлении увеличения  $r$  и разрывает кольцо. Сила на единицу длины средней линии  $F'_r = F_r / (2\pi r)$ , а сила в сечении провода кольца  $F_A = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi} \left( \ln \frac{8r}{a} - 0,75 \right)$ .

Обобщенная сила, сжимающая провод,  $F_a = \frac{i^2}{2} \frac{\partial L}{\partial a} = -\frac{\mu_0 i^2 r}{2a}$ .

Численное решение:  $F_A = 5,25 \cdot 10^{-5}$  Н;  $F_a = 3,14 \cdot 10^{-3}$  Н.

2.68 (к задаче 1.141). Для нахождения системы связанных зарядов используется уравнение  $\operatorname{div} \mathbf{M} = -\rho_M$  и его поверхностная форма (граничные условия)  $M_{2n} - M_{1n} = -\sigma_M$ , где  $n$  – единичная нормаль из среды 1 (магнит) в среду 2 (см. рис. 1.59). Так как намагниченность  $\mathbf{M} = \text{const}$ , имеем  $\rho_M = 0$  – магнитные заряды в объеме магнита отсутствуют. На боковой поверхности  $\mathbf{M} \perp n$  и, следовательно,  $\sigma_M = 0$ . Заряды присутствуют только на торцах магнита: при  $z = l/2$  поверхностная плотность заряда  $\sigma_M = M$ , а при  $z = -l/2$  получим  $\sigma_M = -M$ . Таким образом, эквивалентное представление магнита – два равномерно заряженных диска.

Для определения вектора напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  можно использовать готовое решение для вектора напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  заряженного диска с заменой  $\sigma \rightarrow \sigma_M$ ,  $\epsilon_0 \rightarrow \mu_0$ . Например, поле положительно заряженного торца при  $z > l/2$ :

$$H_z^+ = \frac{M}{2\mu_0} \left( 1 - \frac{z - l/2}{\sqrt{(z - l/2)^2 + r_0^2}} \right),$$

причем  $H_z^+ > 0$ . Поле отрицательно заряженного торца  $H_z^- < 0$ , а результирующее поле  $H_{2z} > 0$ .

Внутри магнита ( $0 < |z| < l/2$ ) имеем  $H_z^+ < 0$  и  $H_z^- < 0$ , их сумма  $H_{1z} < 0$ .

Магнитная индукция находится из уравнений связи: вне магнита  $B_z = \mu_0 H_{2z} > 0$ , в объеме магнита  $B_z = \mu_0 H_{1z} + M > 0$ .

2.69 (к задаче 1.142\*). Можно считать, что на пленке записан гармонический сигнал. Для упрощения задачи положим, что протяженность пленки в направлениях  $|z|$  не ограничена. Тогда приходим к плоскопараллельному магнитному полю, зависящему только от двух координат  $x$  и  $y$ . Так как токи проводимости в области наблюдения отсутствуют,  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$  и для расчета поля можно использовать скалярный потенциал  $U_m$  [1, с. 559]. В областях 1 и 3 справедливо уравнение Лапласа  $\Delta U_{m1,3} = 0$ . В пленке (область 2):

---

\* Задача рассматривается в учебнике: Поливанов К. М. Теория электромагнитного поля. М.: Энергия, 1969. С. 152.

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div}(\mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{H} + \operatorname{div} \mathbf{M} = 0.$$

Поскольку  $\operatorname{div} \mathbf{M} = \partial M_x / \partial x + \partial M_y / \partial y = 0$ , то  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ , и при известном условии  $\mathbf{H} = -\operatorname{grad} U_m$  получаем  $\Delta U_m = 0$ .

На основании математической аналогии полей [1, с. 562–563] общее решение уравнения Лапласа для плоскопараллельного поля в декартовых координатах [1, с. 517–519] можно использовать для записи  $U_m(x, y)$ . При выборе из общего решения подходящих функций нужно учесть периодичность по  $y$  и «условие на бесконечности»: при  $|x| \rightarrow \infty$  имеем  $U_m \rightarrow 0$ . Следовательно,  $U_{m1} = C_1 e^{kx} \cos ky$ ;  $U_{m2} = (C_2 e^{kx} + C_3 e^{-kx}) \cos ky$ ;  $U_{m3} = C_4 e^{-kx} \cos ky$ .

Для определения четырех постоянных используются граничные условия – равенство потенциалов и нормальных составляющих магнитной индукции. На верхней границе при  $x = 0$  имеем:

$$U_{m3} = U_{m2}; -\mu_0 \partial U_{m3} / \partial x = -\mu_0 \partial U_{m2} / \partial x + M_x.$$

На нижней границе при  $x = -a$  аналогично записываем:

$$U_{m2} = U_{m1}; -\mu_0 \partial U_{m2} / \partial x + M_x = -\mu_0 \partial U_{m1} / \partial x.$$

Окончательные результаты:

$$U_{m3} = \frac{M_0}{2\mu_0 k} (1 - e^{-ka}) e^{-kx} \cos ky; U_{m2} = \frac{M_0}{2\mu_0 k} (e^{kx} - e^{-k(x+a)}) \cos ky.$$

Формула для  $U$  следует из  $U_{m3}$  при замене  $x \rightarrow (-x)$ ;  $a \rightarrow (-a)$ .

Поле пленки можно связывать с поверхностными магнитными зарядами, плотность которых  $\sigma_M = |M|$  (см. рис. 1.60). При другом подходе – это поле электрических (амперовых) токов. Их плотность  $J_M = \operatorname{rot} \mathbf{M} / \mu_0$  и, следовательно, токи текут по  $|z|$ :  $J_{z_M} = \frac{1}{\mu_0} \left( -\frac{\partial M_x}{\partial y} \right) = \frac{M_0 k}{\mu_0} \sin ky$ .

### 3. ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ СТАТИЧЕСКИХ И СТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЕЙ

#### 3.1. Электростатическое поле. Основные понятия

Электростатическим называют поле, созданное неподвижными в пространстве и неизменными во времени электрическими зарядами. Основными

законами электростатики являются закон Кулона (3.1), связывающий силу взаимодействия между двумя точечными электрическими зарядами с величиной этих зарядов и расстоянием между ними, и теорема Гаусса (3.2), выражающая связь между зарядом и напряженностью поля, созданного этим зарядом:

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \mathbf{r}; \quad (3.1)$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q/\epsilon_0. \quad (3.2)$$

Выражения (3.1) и (3.2) справедливы для вакуума. Сила, действующая на единицу заряда в электрическом поле, называется напряженностью:

$$\mathbf{E} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta q}.$$

Если электрическое поле имеет место в диэлектрике, то наблюдается поляризация вещества, и появляются связанные электрические заряды. Учитывают поляризацию с помощью вектора поляризации  $\mathbf{P}$ , который для анизотропных и однородных сред выражается через напряженность следующим образом:  $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$ , где  $\chi$  – электрическая восприимчивость вещества. Численно вектор поляризации равен поверхностной плотности связанных зарядов, возникающих в диэлектрике под воздействием внешнего поля ( $P = \sigma_{\text{связ}}$ ).

Кроме этого, при анализе электростатических полей используют вектор электрического смещения:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \mathbf{E} + (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_a \mathbf{E},$$

где  $\epsilon_r$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды, показывающая, во сколько раз абсолютная диэлектрическая проницаемость среды больше диэлектрической проницаемости вакуума.

Для среды справедлива обобщенная теорема Гаусса:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q/\epsilon_0; \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q.$$

В электростатике используют также понятия электрического потенциала (3.3), разности потенциалов или электрического напряжения (3.4):

$$U = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \text{const}; \quad (3.3)$$

$$-U_2 = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = u_{12}. \quad (3.4)$$

Условие потенциальности электростатического поля:  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ .

Это условие говорит о том, что работа сил поля по перемещению электрического заряда вдоль любого замкнутого контура равна нулю или циркуляция вектора напряженности равна нулю.

Теорема Гаусса или постулат Максвелла в дифференциальной форме записи имеет вид:  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ ;  $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$ .

Выражение  $\operatorname{div} \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D}$  в декартовых координатах запишем в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}.$$

Аналогичные выражения в цилиндрической (3.5) и сферической (3.6) системах координат соответственно имеют вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial R} (RD_R) + \frac{\partial D_\alpha}{\partial \alpha} \right] + \frac{\partial D_Z}{\partial z}; \quad (3.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial R} (R^2 D_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot D_\theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \cdot \frac{\partial D_\alpha}{\partial \alpha}. \quad (3.6)$$

Условие потенциальности поля в дифференциальной форме:  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ .

Для определения напряженности поля в декартовой системе координат используется понятие градиента потенциала:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} U = -(\mathbf{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial U}{\partial z}).$$

В случаях, когда среда неоднородна, при анализе электростатического поля используют граничные условия. Так, граница раздела диэлектрик–проводник является поверхностью равного потенциала, т. е.  $U(x, y, z) = \text{const}$ , а силовые линии поля (линии напряженности) всегда перпендикулярны к проводящей поверхности (границе раздела).

На границе раздела диэлектрик–диэлектрик равны в обеих средах касательные составляющие напряженности поля ( $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ ) и нормальные составляющие вектора электрического смещения ( $D_{1n} = D_{2n}$ ). Условием преломления является:  $\tan \alpha_1 / \tan \alpha_2 = \epsilon_1 / \epsilon_2$ , где  $\alpha_1, \alpha_2$  – углы между векторами напряженности поля или электрическими смещениями и нормалью, построенной к границе раздела сред.

При этом, если вектор напряженности перпендикулярен к границе раздела, то электрическое смещение не меняется при переходе из одной среды в другую, а напряженность поля меняется скачком.

Приведенная выше теорема Гаусса находит применение при анализе плоскопараллельных полей, обладающих сферической или цилиндрической симметрией. Такие поля называют одномерными, так как напряженность поля и потенциал зависят лишь от одной координаты.

В более сложных случаях для расчета электростатического поля используют уравнения Пуассона  $\nabla^2 U = -\rho/\epsilon_a$  и Лапласа  $\nabla^2 U = 0$ .

В декартовых координатах эти уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_a}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

### 3.1.1. Расчет электростатического поля с помощью теоремы Гаусса

#### 3.1.1.1. Поле заряженной оси

В этом случае поле характеризуется цилиндрической симметрией, т. е. во всех точках цилиндрической поверхности, охватывающей заряженную ось, произвольного радиуса  $r$  напряженность поля имеет одно и то же значение (рис. 3.1).

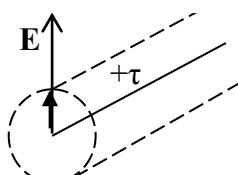


Рис. 3.1

Если считать ось бесконечно длинной, то в результате интегрирования получается площадь боковой поверхности цилиндра, т. е.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \oint_S dS = E \cdot 2\pi r l = \frac{\tau l}{\epsilon_a}; \quad E = \frac{\tau}{2\pi r l}.$$

$$\text{Потенциал поля } U = -\int E dr + \text{const} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln r + \text{const}.$$

В данном случае при определении постоянной интегрирования нельзя принять  $U = 0$  при  $r = \infty$ , так как  $\ln r$  будет равен бесконечности. Можно считать, что  $U = 0$ , например, при  $r = 1$ . Тогда постоянная интегрирования обращается в ноль.

#### 3.1.1.2. Поле двух заряженных осей и двухпроводной линии

Задача решается методом наложения. Напряженность поля в точке  $A$  (рис. 3.2) от левой оси  $E_1 = \tau/(2\pi\epsilon_a r_1)$ . Аналогично от правой оси  $E_2 = \tau/(2\pi\epsilon_a r_2)$ . Результирующая напряженность поля находится по формуле

$$E_{\text{рез}} = \sqrt{(E_{1x} + E_{2x})^2 + (E_{1y} + E_{2y})^2},$$

где  $E_{1x}, E_{2x}, E_{1y}, E_{2y}$  – проекции векторов  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  на декартовые оси координат, которые находятся геометрически при известных координатах точки  $A$ .

Так, из рис. 3.2 видно, что  $\alpha_1 = \arctg(y_A/x_A)$ ;  $\alpha_2 = \arctg[y_A/(d - x_A)]$ , тогда  $E_{1x} = E_1 \cos \alpha_1$ ;  $E_{1y} = E_1 \sin \alpha_1$ ;  $E_{2x} = E_2 \cos \alpha_2$ ;  $E_{2y} = E_2 \sin \alpha_2$ .

Потенциал поля в точке  $A$ :

$$U_A = U_1 + U_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

Поле двухпроводной линии в случае, когда расстояние между проводами значительно превышает радиус провода, рассчитывается аналогично. При  $d \gg r$  считают геометрические и электрические оси совпадающими.

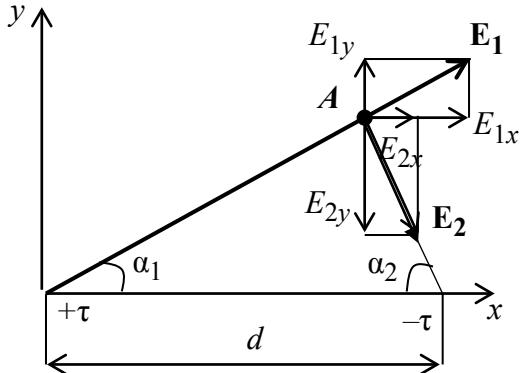


Рис. 3.2

**Пример 3.1.** Рассмотрим расчет емкости двухпроводной линии. На линии, соединяющей оси проводов (рис. 3.3), напряженность поля в произвольной точке  $A$  определится, как

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{d-x} \right).$$

Напряжение между проводами:

$$U = \int_{r_0}^{d-r_0} \mathbf{E} d\mathbf{x} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \int_{r_0}^{d-r_0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{d-x} \right) dx = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{d-r_0}{r_0}.$$

Так как  $d \gg r_0$ , то  $U = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{d}{r_0}$ .

Емкость линии  $C = q/U = \tau\ell/U = 2\pi\epsilon_a\ell/\ln(d/r_0)$ .

Емкость на единицу длины  $C_0 = q/U\ell = 2\pi\epsilon_a/\ln(d/r_0)$ .

Более сложный случай имеет место, когда расстояние между проводами линии соизмеримо с радиусом провода. Очевидно, здесь уже нельзя считать геометрические и электрические оси проводов совпадающими, ввиду чего требуется определить

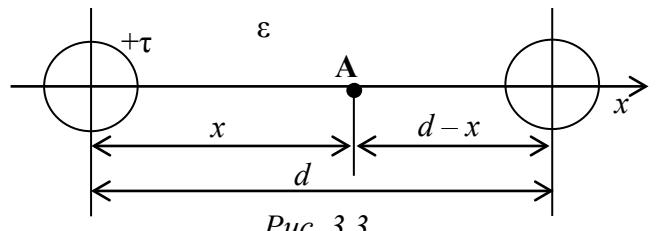


Рис. 3.3

положение электрических осей проводов или их смещение относительно геометрических осей (рис. 3.4).

**Пример 3.2.** Двухпроводная линия (рис. 3.4), состоящая из параллельных цилиндрических проводов радиусом  $r_0 = 10$  мм, находится под напряжением

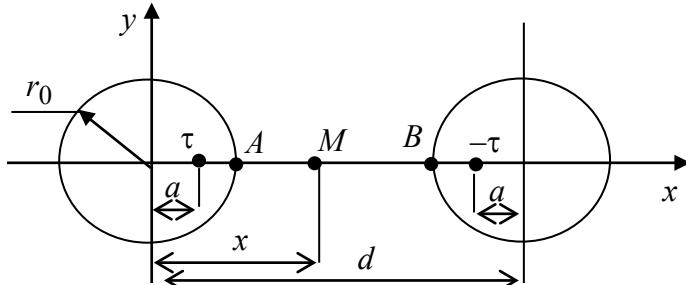


Рис. 3.4

$U = 600$  В. Расстояние между осями проводов  $d = 30$  мм,  $\epsilon_r = 2$ . Рассчитать емкость двухпроводной линии  $C_0$  и построить зависимость напряженности поля  $E(x)$  при  $r_0 \leq x \leq d - r_0$ .

Заменим провода заряженными осями с линейной плотностью заряда  $\tau$  и  $-\tau$ . Определим положение осей:

$$a = \frac{d}{2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - r_0^2} = \frac{30}{2} - \sqrt{\left(\frac{30}{2}\right)^2 - 10^2} = 3,82 \text{ мм.}$$

Потенциал произвольной точки  $M$  между проводами:

$$U_M = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{r_+} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{1}{r_-} + C = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_-}{r_+} + C,$$

где  $r_+ = x - a$ ;  $r_- = d - x - a$  – расстояния от точки до осей;  $\epsilon_a = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$ .

Постоянную  $C$  найдем, приняв потенциал точки, находящейся по середине между проводами, равный нулю:

$$U\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{d - \frac{d}{2} - a}{\frac{d}{2} - a} + C = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln 1 + C = C = 0,$$

тогда  $U_M = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_-}{r_+}$ . Найдем потенциалы точек  $A$  и  $B$  на поверхности проводов:

$$U_A = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{d - a - r_0}{r_0 - a}; U_B = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_0 - a}{d - r_0 - a}.$$

Напряжение между проводами:

$$U = U_A - U_B = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \left( \frac{d-a-r_0}{r_0-a} \right)^2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} 2 \ln \frac{d-a-r_0}{r_0-a} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \cdot K,$$

$$\text{где } K = 2 \ln \frac{d-a-r_0}{r_0-a} = 2 \ln \frac{30-3,82-10}{10-3,82} = 1,924;$$

$$U_M = \frac{U}{K} \left( \ln \frac{1}{r_+} - \ln \frac{1}{r_-} \right) = \frac{U}{K} (\ln r_- - \ln r_+).$$

Напряженность поля, где  $E$  –  $\epsilon$  [В/м];  $x$  –  $\epsilon$  [мм]:

$$E = -\frac{dU}{dx} = \frac{U}{K} \left( \frac{1}{r_-} + \frac{1}{r_+} \right) = \frac{U}{K} \left( \frac{1}{d-x-a} + \frac{1}{x-a} \right) = 3,12 \cdot 10^5 \left( \frac{1}{26,18-x} + \frac{1}{x-3,82} \right).$$

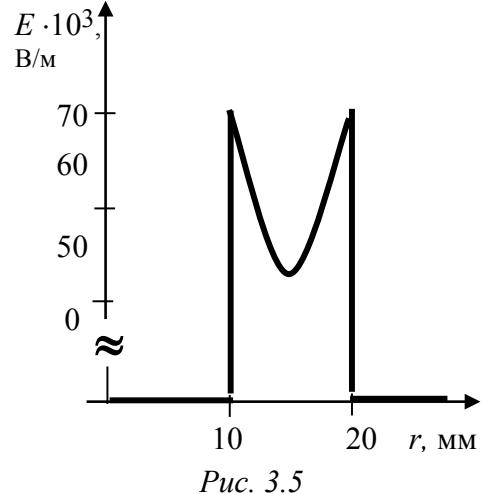


Рис. 3.5

На рис. 3.5 приведена зависимость  $E(x)$ . Внутри проводов поле отсутствует  $E = 0$ . Определим емкость линии на единицу длины ( $\ell = 1$  м):

$$C_0 = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon}{K} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 8,86 \cdot 10^{-12}}{1,924} = 5,79 \cdot 10^{-11} \Phi = 57,9 \text{ пФ.}$$

### 3.1.1.3. Поле коаксиального кабеля (цилиндрический конденсатор)

В диэлектрике между жилой и оболочкой коаксиального кабеля при  $r_1 \leq r \leq r_2$  (рис. 3.6) напряженность поля будет та же, что и в поле заряженной оси:  $E = \tau/(2\pi\epsilon r)$ .

В жиле и оболочке, а также вне кабеля поле отсутствует. Напряженность между жилой и оболочкой:

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

$$\text{Емкость кабеля } C = \frac{\tau\ell}{U} = \frac{2\pi\epsilon\ell}{\ln(r_2/r_1)},$$

где  $\ell$  – длина кабеля.

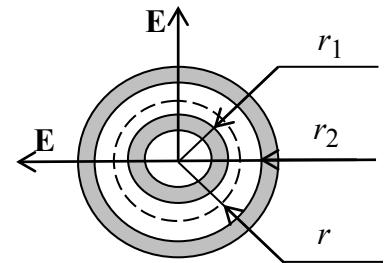


Рис. 3.6

Соответственно емкость на единицу длины  $C_0 = 2\pi\epsilon/\ln(r_2/r_1)$ .

Если кабель имеет двухслойную изоляцию (рис. 3.7), то при расчете используют условия на границе раздела двух диэлектриков. В этом случае удобнее использовать обобщенную теорему Гаусса  $\oint_S \mathbf{D}d\mathbf{S} = q = \tau\ell$ , так как вектор электрического смещения не зависит от диэлектрической проницаемости среды.

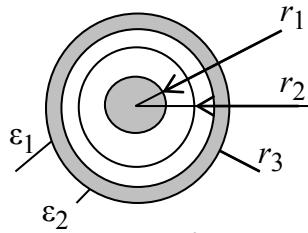


Рис. 3.7

Ввиду цилиндрической симметрии поля определим:

$$\oint_S \mathbf{D}d\mathbf{S} = D\oint_S dS = D \cdot 2\pi r\ell = \tau\ell; D = \tau/(2\pi r).$$

На границе раздела слоев изоляции кабеля напряженность будет изменяться скачком. Таким образом, в первом и втором слоях:

$$E_1 = D/\epsilon_1 = \tau/(2\pi r_1 \epsilon_1); \quad E_2 = D/\epsilon_2 = \tau/(2\pi r_2 \epsilon_2).$$

При  $r = r_2$  на границе двух диэлектриков имеем:  $E_{1(r=r_2)} = \tau/(2\pi r_2 \epsilon_1)$ .

Очевидно, что при  $\epsilon_1 > \epsilon_2$  на границе  $E_{2(r=r_2)} > E_{1(r=r_1)}$ .

Это используют для выравнивания напряжения сети в изоляции кабеля на практике. Для кабеля с многослойной изоляцией условием равенства максимальной напряженности поля в каждом из слоев является условие:

$$r_1 \epsilon_1 = r_2 \epsilon_2 = \dots = r_k \epsilon_k = \text{const.}$$

Плотность свободных зарядов на жиле кабеля:  $\sigma_1 = D_{(r=r_1)} = \tau/(2\pi r_1 \epsilon_1)$ .

Соответственно поверхностная плотность свободных зарядов на внутренней поверхности оболочки:  $\sigma_2 = D_{(r=r_2)} = \tau/(2\pi r_2 \epsilon_2)$ .

На границе раздела диэлектриков будет иметь место связанный заряд, поверхностная плотность которого может быть найдена по формуле:

$$\sigma_{\text{связ}} = P_2 - P_1 = [(\epsilon_2 - 1)\epsilon_0 E_2] - [(\epsilon_1 - 1)\epsilon_0 E_1].$$

Емкость кабеля определяется из следующих соображений. Если на границе раздела слоев изоляции поместить бесконечно тонкий металлический цилиндр, то распределение потенциала не изменится. Это означает, что коаксиальный кабель (либо цилиндрический конденсатор) с двухслойной изоля-

цией можно рассматривать, как два конденсатора, включенные последовательно, причем емкость каждого из них будет равна:

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_1 l}{\ln(r_2/r_1)}, \quad C_2 = \frac{2\pi\epsilon_2 l}{\ln(r_3/r_2)}.$$

Соответственно полная емкость находится по формуле  $C = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$ .

### 3.1.2. Метод зеркальных изображений

Этот метод используется при анализе полей вблизи границ диэлектрик – проводник и диэлектрик – диэлектрик. Далее рассматриваются примеры использования данного метода.

#### 3.1.2.1. Поле заряженного провода, расположенного над проводящей поверхностью

Так как поверхность проводника является поверхностью равного потенциала, а внутри проводника поле отсутствует, то линии напряженности электрического поля будут перпендикулярны проводящей поверхности. Если убрать поверхность проводника, а на расстоянии  $h$  вниз от нее поместить фиктивный провод с зарядом противоположного знака, то картина поля не изменится. Но в этом случае мы будем иметь задачу на расчет поля двухпроводной линии, рассмотренную в 3.1.1.2.

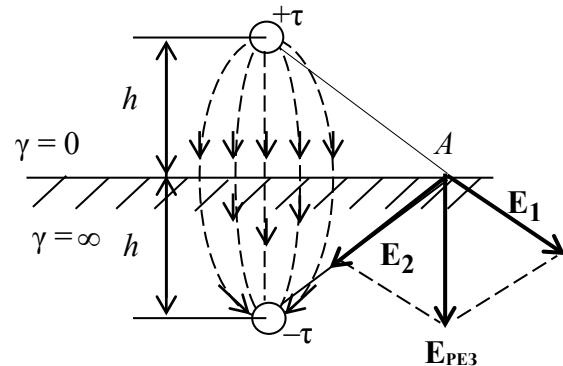


Рис. 3.8

При необходимости, например, определить поверхностную плотность зарядов на проводящей поверхности в конкретной точке с известными координатами нужно рассчитать электрическое смещение в данной точке (рис. 3.8).

Если провод расположен вблизи двух плоскостей, сходящихся под прямым углом, то потребуется ввести три фиктивных провода (знаки зарядов показаны на рис. 3.9). Потенциал провода определяется по формуле

$$U_{\text{пр}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2b}{r_0} + \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r}{2a}, \text{ где } r = \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2}.$$

Очевидно, что если потенциал задан, то из приведенной формулы несложно выразить линейную плотность заряда.

Потенциал произвольной точки  $A$  (рис. 3.10) определяется следующим образом:  $U_A = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_1}{a_1} + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{b_2}{a_2}$ .

Емкость между проводящими гранями и проводом (в случае, если потенциал проводящих граней равен нулю)  $C_0 = \tau/U_{\text{пр}}$ . Здесь определена емкость на единицу длины провода. Полная емкость может быть определена путем умножения  $C_0$  на длину провода.

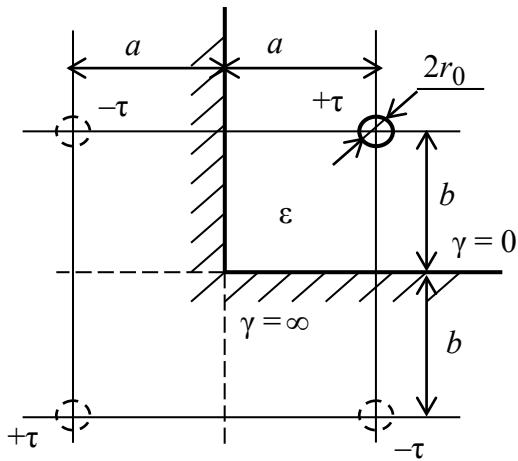


Рис. 3.9

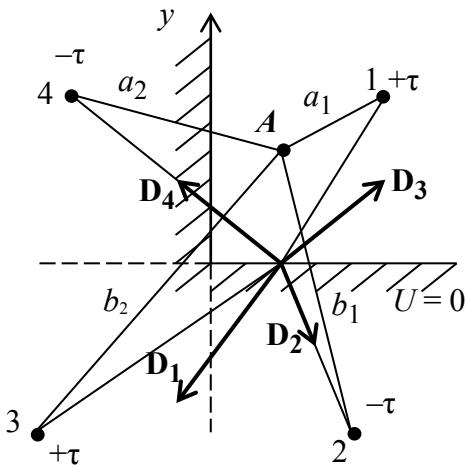


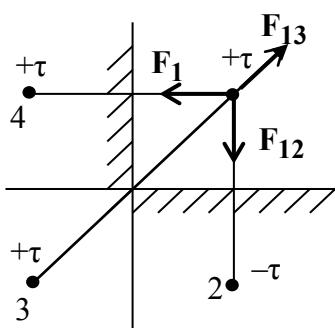
Рис. 3.10

Определение поверхностной плотности заряда в произвольной точке на проводящей поверхности требует расчета вектора смещения в этой точке от каждого из проводов с последующим сложением проекций этих векторов. Проекции на ось  $x$  от  $\mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{D}_2$ , а также от  $\mathbf{D}_3$  и  $\mathbf{D}_4$  равны друг другу и направлены в противоположные стороны, т. е.  $D_{\text{рез},x} = 0$ , а проекции на

ось  $y$  от векторов  $\mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{D}_2$ , а также  $\mathbf{D}_3$  и  $\mathbf{D}_4$  равны и направлены в одну сторону. В результате  $D_{\text{рез}} = \sigma = 2D_{1y} - 2D_{2y}$ .

Энергия провода на единицу длины

$$W_0 = C_0 U_{\text{пр}}^2 / 2.$$



Сила, действующая на единицу длины провода, может быть определена методом наложения по закону Кулона. Между первым и вторым (фиктивным) проводом (рис. 3.11) сила взаимодействия рассчитывается:  $F_{12} = \frac{\tau^2}{4\pi\epsilon_0(2b)^2}$ .

Далее аналогично находятся силы взаимодействия между реально существующим проводом и его другими двумя изображениями:

$$F_{13} = \frac{\tau^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2}}; \quad F_{14} = \frac{\tau^2}{4\pi\epsilon_0 (2a)^2}.$$

Результирующая сила находится как результат векторного сложения  $\mathbf{F}_{12}$ ,  $\mathbf{F}_{13}$ ,  $\mathbf{F}_{14}$ . Очевидно, это достаточно просто сделать, используя проекции в декартовой системе координат.

### 3.1.2.2. Заряженный провод, параллельный границе раздела двух диэлектриков

Отличие от задач на расчет полей проводов над проводящей поверхностью заключается в данном случае в том, что поле имеет место как над границей раздела, так и под ней. Заряды фиктивных проводов рассчитываются по соотношениям, полученным из граничных условий в электростатическом поле (рис. 3.12).

Поле в верхней полуплоскости создается проводом с зарядом  $\tau$ , а также фиктивным проводом с зарядом:  $\tau_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_2)\tau / (\epsilon_1 + \epsilon_2)$ .

В нижней полуплоскости поле создается двумя фиктивными проводами с зарядами  $\tau_1$  и  $\tau_2$ :  $\tau_2 = 2\epsilon_2\tau / (\epsilon_1 + \epsilon_2)$ .

При этом расположение второго фиктивного провода совпадает с расположением реального провода.

Рассмотрим задачу на расчет поля двух проводов, расположенных параллельно плоской границе раздела двух диэлектриков (рис. 3.13). Заряды фиктивных проводов, расположенных в нижней полуплоскости:

$$\begin{aligned}\tau'_1 &= \tau_1(\epsilon_1 - \epsilon_2) / (\epsilon_1 + \epsilon_2); \\ \tau'_2 &= \tau_2(\epsilon_1 - \epsilon_2) / (\epsilon_1 + \epsilon_2).\end{aligned}$$

Если считать, что провода имеют один ряд разного знака, то

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \tau; & \tau_2 &= -\tau; \\ \tau'_1 &= \tau'; & \tau'_2 &= -\tau'.\end{aligned}$$

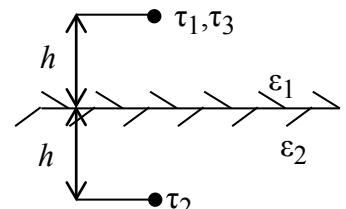


Рис. 3.12

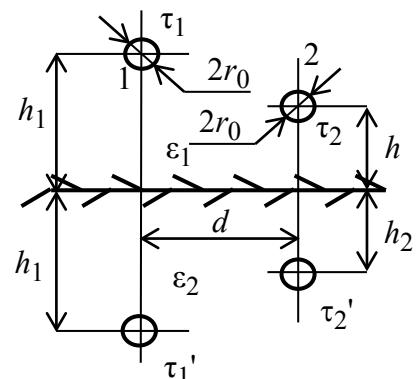


Рис. 3.13

Потенциалы проводов будут связаны с их зарядами следующими уравнениями:

$$\begin{cases} U_2 = -\alpha_{21}\tau - \alpha_{22}\tau'; \\ U_1 = \alpha_{11}\tau' + \alpha_{12}\tau. \end{cases}$$

где

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_1} \ln \frac{2h_1}{r_{12}'}; \quad \alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon_1} \ln \frac{r_{12}}{r_0};$$

$$\alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_1} \ln \frac{2h_2}{r_{1'2}'}; \quad \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_1} \ln \frac{r_{21}}{r_0};$$

$$r_{12}' = r_{1'2} = \sqrt{d^2 + (2h_1 - h_2)^2}; \quad r_{12} = r_{21} = \sqrt{d^2 + (h_1 - h_2)^2},$$

где  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{21}$ ,  $\alpha_{22}$  – потенциальные коэффициенты;  $r_{12}$ ,  $r_{21}$ ,  $r_{12}'$ ,  $r_{1'2}'$  – расстояния между проводами.

Напряжение между проводами  $U = U_1 - U_2$ . Если задано напряжение, то используя уравнение для  $U_1$  и  $U_2$  и соотношение между  $\tau$  и  $\tau'$ , можно определить заряды проводов.

Емкость между проводами:  $C_{12} = \alpha_{12}/\Delta$ ;  $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$ .

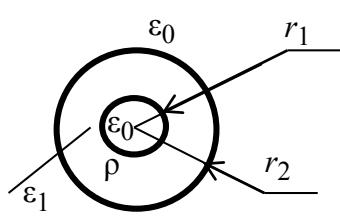
Силу, действующую на единицу длины провода, можно определить аналогично 3.1.2.1.

Энергия на единицу длины линии  $W = \frac{1}{2}(q_1 U_1 + q_2 U_2)$ .

### 3.1.3. Расчет полей по уравнениям Пуассона и Лапласа

#### 3.1.3.1. Поле, распределенное между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями

Здесь имеет место цилиндрическая симметрия поля, так как напряженность  $\mathbf{E}$  и потенциал  $U$  зависят только от одной координаты – радиуса. Необходимо рассмотреть три области. В первой из них ( $0 \leq r \leq r_1$ ) поля нет. Во второй области ( $r_1 \leq r \leq r_2$ ) поле описывается уравнением Пуассона, которое в цилиндрической системе координат имеет вид (рис. 3.14):



Rис. 3.14

На рисунке 3.14 изображена коаксиальная система из двух цилиндров с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ . Внутренний цилиндр имеет радиус  $\rho$  и диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_0$ . Внешний цилиндр имеет радиус  $r_1$  и диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_1$ . Напряженность поля и потенциал зависят только от радиальной координаты  $r$ . Внутри радиуса  $r_1$  поле отсутствует. В области между радиусами  $r_1$  и  $r_2$  поле описывается уравнением Пуассона.

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_a}.$$

Так как потенциал зависит только от одной координаты, то уравнение Пуассона принимает вид:  $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U_2}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_a}$ .

Поле первого интегрирования:  $r \frac{\partial U_2}{\partial r} = -\frac{r^2}{2} \cdot \frac{\rho}{\epsilon} + C_1$ ;  $\frac{\partial U_2}{\partial r} = -\frac{r\rho}{2\epsilon} + \frac{C_1}{r}$ .

Поле второго интегрирования:  $U_2 = -\frac{r^2 \rho}{4\epsilon} + C_1 \ln r + C_2$ , где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования.

В области  $r \geq r_2$  поле описывается уравнением Лапласа:  $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U_3}{\partial r} \right) = 0$ .

После первого интегрирования:  $r \frac{\partial U_3}{\partial r} = C_3$ ;  $\frac{\partial U_3}{\partial r} = \frac{C_3}{r}$ .

После второго интегрирования:  $U_3 = C_3 \ln r + C_4$ .

Постоянные интегрирования определяем из следующих соображений.  
При  $r = r_1 E_2 = 0$  или

$$E_2 = -\frac{\partial U_2}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( -\frac{r^2 \rho}{4\epsilon} + C_1 \ln r + C_2 \right) = -\frac{\eta \rho}{2\epsilon} + \frac{C_1}{\eta} = 0.$$

Откуда  $C_1 = \eta^2 \rho / 2\epsilon_1$ . Примем, что при  $U = 0$ , тогда:

$$0 = -\frac{r_2^2}{4} \cdot \frac{\rho}{\epsilon} + \frac{\eta^2 \rho}{2\epsilon} + C_2; \quad C_2 = \frac{\rho}{2\epsilon} \left( \frac{r_2^2}{2} - \eta^2 \right).$$

На границе раздела диэлектриков ( $r = r_2$ ) должны быть равны нормальные составляющие вектора электрического смещения ( $D_{1n} = D_{2n}$ ). В нашем случае вектор смещения, как и напряженность, будет направлен по радиусу, т. е. будет иметь только нормальную составляющую:

$$D_{2(r=r_2)} = \epsilon E_2 = -\frac{r_2 \rho}{2} + \eta \rho; \quad D_{3(r=r_2)} = \epsilon_0 E_3 = \epsilon_0 \frac{C_3}{r^2}.$$

Приравнивая эти два выражения, определяем постоянную  $C_3$ :

$$C_3 = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \left( r_2^2 - \eta^2 \right).$$

Постоянную  $C_4$  находим из условия, что при  $r = r_2$   $U = 0$ :

$$0 = C_3 \ln r_2 + C_4; \quad C_4 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left( r_2^2 - r_1^2 \right) \ln r_2.$$

### 3.1.3.2. Проводящий и диэлектрический шар в равномерном поле

Тело из проводника или диэлектрика, внесенное в равномерное поле, искажает его. Чтобы рассчитать поле в присутствии сторонних тел, используют уравнение Лапласа и Пуассона.

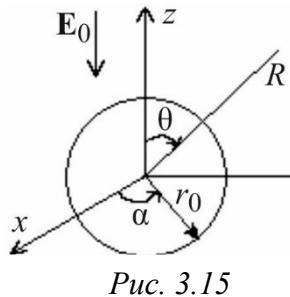


Рис. 3.15

Так, для шара поле будет характеризоваться сферической симметрией. При этом поле шара не будет зависеть от координаты (рис. 3.15), и уравнение Лапласа в сферической системе координат примет вид:

$$\frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Это уравнение решают методом разделения переменных, само решение приводится практически во всех учебниках по ТОЭ. В связи с этим мы запишем лишь конечный результат.

Для проводящего заряженного шара:

1) внутри шара поля нет  $\mathbf{E} = 0$ ;

2) вне шара  $U = \frac{Q}{4\pi\epsilon R} + \left( \frac{r_0^2}{R^2} - R \right) E_0 \cos \theta + C_0$ , где  $C_0$  – постоянная, с

точностью до которой определяется потенциал;  $Q$  – заряд шара.

$$E_R = \left( \frac{2r_0^3}{R^3} + 1 \right) E_0 \cos \theta; \quad E_\theta = \left( \frac{r_0^3}{R^3} - 1 \right) E_0 \sin \theta; \quad E = \sqrt{E_R^2 + E_\theta^2}.$$

Если шар не заряжен, то в выражении для потенциала исчезает первое слагаемое, ввиду того, что  $Q = 0$ .

На поверхности шара ( $R = r_0$ ):  $E_R = 3E_0 \cos \theta$ ;  $E_\theta = 0$ .

В случае диэлектрического шара с проницаемостью  $\epsilon_1$ , находящегося в

среде с проницаемостью  $\epsilon_2$ , внутри шара  $U_{\text{вн}} = -\frac{3\epsilon_{r_2}}{\epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2}} E_0 R \cos \theta + C_0$ ;

либо  $U_{\text{вн}} = -\frac{3\epsilon_{r_2}}{\epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2}} E_0 Z + C_0$ , где  $Z = R \cos \theta$ .

Напряженность поля внутри шара постоянна  $E_Z = -\frac{\partial U_{\text{ВН}}}{\partial Z} = -E_0 \frac{3\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2}}$ .

Потенциал внешней области  $U_{\text{внеш}} = E_0 \left( R + \frac{r_0^3}{R^2} \cdot \frac{\varepsilon_{r_2} - \varepsilon_{r_1}}{2\varepsilon_{r_2} + \varepsilon_{r_1}} \right) \cos \theta$ .

### 3.1.3.3. Проводящий и диэлектрический цилиндр в однородном поле

Для проводящего, заряженного с линейной плотностью  $\tau = Q/\ell$  цилиндра (рис. 3.16):  $U = \left( \frac{r_0^2}{R} - R \right) E_0 \cos \alpha + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_a} \ln R + C_0$ ;

$$E_R = -\frac{\partial U}{\partial R}; \quad E_\alpha = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial U}{\partial \alpha}; \quad E = \sqrt{E_R^2 + E_\alpha^2}.$$

Если цилиндр не заряжен, то

$$U = \left( \frac{r_0^2}{R} - R \right) E_0 \cos \alpha + C_0,$$

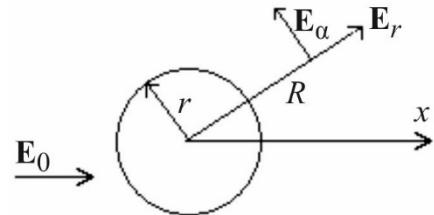


Рис. 3.16

где  $C_0$  – постоянная. Внутри проводящего цилиндра поля нет.

В случае диэлектрического цилиндра с проницаемостью  $\varepsilon_1$  в диэлектрической среде с проницаемостью  $\varepsilon_2$  внутри цилиндра:

$$U_{\text{ВН}} = -\frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2}} E_0 R \cos \alpha + C_0.$$

Вне цилиндра потенциал поля определяется по формуле

$$U_{\text{внеш}} = \left( \frac{\varepsilon_{r_1} - \varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{r_2}} \cdot \frac{r_0^2}{R} - R \right) E_0 R \cos \alpha + C_0.$$

## 3.2. Электрическое поле постоянного тока. Основные понятия

Электрическое поле в проводящей среде создается постоянными токами и имеет место, как в теле проводника, так и в диэлектрике, окружающем проводники. Такие поля называют еще стационарными.

Основными уравнениями стационарного электрического поля являются:

$$\text{rot } E = 0, \quad \oint E \, dl = 0, \quad \text{div } D = \rho, \quad \oint D \, dS = \sum q,$$

$$E = -\text{grad } U, \quad \text{div } J = 0, \quad \oint J \, dS = 0, \quad J = \gamma E,$$

где  $l$  – контур интегрирования;  $S$  – поверхность интегрирования;  $\rho$  – объемная плотность свободных зарядов;  $\sum q$  – сумма свободных зарядов;  $J$  – плотность тока проводимости;  $\gamma$  – удельная проводимость среды.

На границе раздела двух проводников:  $E_{1\tau} = E_{2\tau}$  или  $U_1 = U_2$ ,  $D_{2n} - D_{1n} = q_S = \sigma$ . При отсутствии на границе раздела поверхностной плотности свободных зарядов  $D_{1n} = D_{2n}$ .

Мощность потерь в единице объема  $p = JE = \gamma E^2 = J^2/\gamma$ .

Для расчета поля провода с током  $I$  вблизи плоской границы двух проводящих сред можно применить метод зеркальных изображений. В этом случае дополнительные токи могут быть определены следующим образом:

$$I_1 = \frac{I(\gamma_1 - \gamma_2)}{(\gamma_1 + \gamma_2)} = n_1 I; \quad I_2 = \frac{I(2\gamma_2)}{(\gamma_1 + \gamma_2)} = n_2 I.$$

Задача по расчету электрического поля в проводящей среде обычно требует расчета поля вектора плотности тока  $\mathbf{J}$  либо расчета поля вектора напряженности поля  $\mathbf{E}$ . Очень часто эту задачу удается решить, основываясь на методе электростатической аналогии, который использует формальную аналогию между формулами и соотношениями, справедливыми для электростатического поля без объемного заряда и электрического поля в проводящей среде в области, где нет сторонних сил:

Электростатическое поле	$E$	$U$	$D$	$q$	$\epsilon_r \epsilon_0$	$C$
Электрическое поле	$E$	$U$	$J$	$I$	$\gamma$	$G$

Если известно решение задачи для электростатического поля, то решение для поля в проводящей среде находят простой заменой  $\epsilon$  на  $\gamma$ , а проводимость  $G$  между двумя электродами в проводящей среде определяется через емкость  $C$  между теми же электродами в диэлектрике (или наоборот):

$$G = \frac{\gamma}{\epsilon_r \epsilon_0} C.$$

### 3.2.1. Поле плоского конденсатора с несовершенным диэлектриком

Рассмотрим плоский конденсатор с двухслойной изоляцией (рис. 3.17), напряжение между обкладками конденсатора –  $U$ . Толщина слоев  $d_1$  и  $d_2$ . Диэлектрическая проницаемость и удельная проводимость несовершенного диэлектрика в каждом слое соответственно:  $\epsilon_1, \gamma_1; \epsilon_2, \gamma_2$ .

Плотность тока проводимости в несовершенном диэлектрике  $J = \gamma_1 E_1 = \gamma_2 E_2$ . Для определения напряженности поля в каждом слое  $E_1, E_2$  и с учетом граничных условий  $J_{1n} = J_{2n}$  записываем систему уравнений:

$$\begin{cases} U = E_1 d_1 + E_2 d_2, \\ \gamma_1 E_1 = \gamma_2 E_2. \end{cases}$$

Электрическое смещение в слоях изоляции определяется:  $D_1 = \epsilon_1 E_1; D_2 = \epsilon_2 E_2; \epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$ , где  $\epsilon$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость. Поляризация:  $P_1 = \epsilon_0 (\epsilon_1 - 1) E_1; P_2 = \epsilon_0 (\epsilon_2 - 1) E_2$ .

На границе раздела диэлектриков будут иметь место как свободный, так и связанный заряды. Поверхностные плотности этих зарядов соответственно равны:  $\sigma = D_1 - D_2; \sigma_{\text{связ}} = P_2 - P_1$ .

Сопротивление изоляции на единицу площади пластин  $R_0 = U/J$ .

Емкость конденсатора  $C = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 S}{d_1 \epsilon_2 + d_2 \epsilon_1}$ , где  $S$  – площадь пластин.

**Пример 3.3.** Плоский конденсатор с двухслойным несовершенным диэлектриком (рис. 3.17) имеет размеры:  $S = 30 \text{ см}^2, d_1 = 1 \text{ мм}, d_2 = 2 \text{ мм}, \epsilon_1 = 5, \epsilon_2 = 2, \gamma_1 = 6 \cdot 10^{-13} \text{ См/м}, \gamma_2 = 3 \cdot 10^{-13} \text{ См/м}$ . Напряжение  $U = 1500 \text{ В/м}$ . Найти ток утечки  $I_{\text{ут}}$ , построить зависимость изменения потенциала вдоль ширины диэлектрика  $U(x)$ .

*Решение.* В несовершенном диэлектрике должны выполняться граничные условия для определения напряженностей в слоях:  $\begin{cases} E_1 d_1 + E_2 d_2 = U, \\ E_1 \gamma_1 - E_2 \gamma_2 = 0. \end{cases}$

После подстановки числовых значений и решения системы уравнений получаем следующие значения напряженностей электрического поля в слоях диэлектриков:  $E_1 = 3 \cdot 10^5 \text{ В/м}$  и  $E_2 = 6 \cdot 10^5 \text{ В/м}$ .

Общее выражение для определения потенциала  $U = - \int E dx$ , тогда

$$U_1 = - \int E_1 dx = -E_1 x + C_1; \quad U_2 = - \int E_2 dx = -E_2 x + C_2.$$

Постоянную  $C_1$  найдем, принимая потенциал левой обкладки (при  $x = 0$ ) за нулевой:  $C_1 = 0 \text{ В}; U_1 = -E_1 x = -3 \cdot 10^5 x, \text{ В}$ .

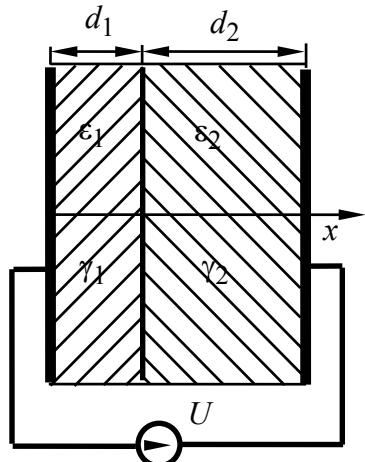


Рис. 3.17

Постоянную  $C_2$  найдем из условия непрерывности потенциала на границе раздела  $U_1 d_1 = U_2 d_1$ :

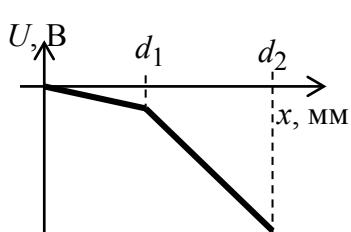


Рис. 3.18

$$-E_1 d_1 = -E_2 d_1 + C_2; \quad C_2 = (E_2 - E_1) d_1 = 300 \text{ В}; \\ U_2 = -6 \cdot 10^5 x + 300 \text{ В}.$$

Зависимость  $U(x)$  приведена на рис. 3.18. Рассчитаем плотность тока утечки:  $J = \gamma_1 E_1 = \gamma_2 E_2 = 1,8 \cdot 10^{-7} \text{ А/м}^2$ .

Тогда ток утечки будет:

$I_{\text{ут}} = JS = 5,4 \cdot 10^{-10} = 0,54 \text{ нА}$ , где  $S$  – площадь пластин (обкладок) конденсатора.

### 3.2.2. Расчет тока утечки и сопротивления утечки коаксиального кабеля

В кабеле с несовершенной изоляцией жила является прямым проводом, а оболочка – обратным проводом линии передачи постоянного тока

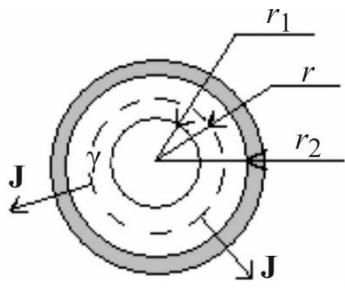


Рис. 3.19

(рис. 3.19). Считая несовершенный диэлектрик однородным, на расстоянии  $r$  от оси кабеля вектор плотности тока  $\mathbf{J}$  будет направлен по радиусу и по всей боковой поверхности цилиндра радиуса  $r$  будет иметь одно и то же значение. Т. е. поле характеризуется цилиндрической симметрией.

Плотность тока проводимости определяется через ток утечки следующим образом:  $J = I/(2\pi rl)$ .

Напряженность поля в изоляции кабеля:  $E = J/\gamma = I/(2\pi rl\gamma)$ .

Напряжение между жилой и оболочкой кабеля:  $U = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{I}{2\pi rl\gamma} \ln \frac{r_2}{r_1}$ .

Проводимость и сопротивление изоляции:

$$G = \frac{I}{U} = \frac{2\pi l\gamma}{\ln(r_2/r_1)}; \quad R = \frac{U}{I} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi l\gamma}.$$

**Пример 3.4.** Коаксиальный кабель с несовершенной изоляцией имеет размеры:  $r_1 = 12 \text{ мм}$ ,  $r_2 = 16 \text{ мм}$ ,  $r_3 = 20 \text{ мм}$ ,  $U = 1200 \text{ В}$ ,  $\gamma_1 = 10^{-11} \text{ См/м}$ ,  $\gamma_2 = 5 \cdot 10^{-12} \text{ См/м}$ . Ток утечки составляет  $I_{\text{ут}} = 10^{-6} \text{ А}$ . Найти длину кабеля  $l$ .

*Решение.* Электрическое поле между жилой и оболочкой описывается уравнением Лапласа  $\nabla^2 U = 0$ , которое в цилиндрической системе координат кабеля имеет вид  $\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) = 0$ . Интегрируя, получим выражения для потенциалов в слоях изоляции:  $U_1 = A_1 \ln r + B_1$ ;  $U_2 = A_2 \ln r + B_2$ .

Так как напряженность поля  $E = -\frac{\partial U}{\partial r}$ , то  $E_1 = -\frac{A_1}{r}$ ;  $E_2 = -\frac{A_2}{r}$ .

Плотность тока утечки  $J = \gamma E$ .

На поверхности внутренней жилы ( $r = r_1$ ):

$$J_1(r_1) = \gamma_1 E(r_1) = \gamma_1 \left( -\frac{A_1}{r_1} \right) = \frac{I_{yt}}{2\pi r_1 l}, \text{ следовательно } A_1 = -\frac{I_{yt}}{2\pi \gamma_1 l}.$$

На поверхности раздела слоев изоляции ( $r = r_2$ ) выполняется граничное условие  $J_1(r_2) = J_2(r_2)$ . Тогда получим:

$$\gamma_1 \left( -\frac{A_1}{r_2} \right) = \gamma_2 \left( -\frac{A_2}{r_2} \right); \quad A_2 = A_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = -\frac{I_{yt}}{2\pi \gamma_2 l}.$$

Точку нулевого потенциала зададим на поверхности оболочки при  $r = r_3$ ,

$$\text{тогда } B_2 = -A_2 \ln r_3 = \frac{I_{yt}}{2\pi \gamma_2 l} \ln r_3; \quad U_2 = \frac{I_{yt}}{2\pi \gamma_2 l} (-\ln r + \ln r_3) = \frac{I_{yt}}{2\pi \gamma_2 l} \ln \frac{r_3}{r}.$$

Так как потенциал непрерывен во всех точках поля, то  $U_1(r_2) = U_2(r_2)$ ,

$$\text{т. е. } -\frac{I_{yt}}{2\pi \gamma_1 l} \ln r_2 + B_1 = \frac{I_{yt}}{2\pi \gamma_2 l} \ln \frac{r_3}{r_2}, \text{ отсюда } B_1 = \frac{I_{yt}}{2\pi l} \left( \frac{1}{\gamma_1} \ln r_2 + \frac{1}{\gamma_2} \ln \frac{r_3}{r_2} \right);$$

$$U_1 = \frac{I_{yt}}{2\pi l} \left( \frac{1}{\gamma_1} \ln r_2 + \frac{1}{\gamma_2} \ln \frac{r_3}{r_2} - \frac{1}{\gamma_1} \ln r \right) = \frac{I_{yt}}{2\pi l} \left( \frac{1}{\gamma_1} \ln \frac{r_2}{r} + \frac{1}{\gamma_2} \ln \frac{r_3}{r_2} \right).$$

Напряжение, приложенное кабелю:

$$U = U_1(r_1) - U_2(r_3) = U_1(r_1) = \frac{I_{yt}}{2\pi l} \left( \frac{1}{\gamma_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\gamma_2} \ln \frac{r_3}{r_2} \right).$$

Таким образом, длина кабеля определится из следующего выражения:

$$l = \frac{I_{yt}}{2\pi U} \left( \frac{1}{\gamma_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\gamma_2} \ln \frac{r_3}{r_2} \right) = 9,74 \text{ м.}$$

### 3.2.3. Расчет электрического поля методом зеркальных изображений

**Пример 3.5.** Параллельно проводящей поверхности на высоте  $h = 60$  см подвешен провод радиусом  $r_0 = 6$  мм, с удельной проводимостью  $\gamma = 10^{-2}$  См/м и напряжением  $U = 30$  В. Найти плотность тока утечки  $J_{\text{ут}}$  в точке  $A$  с координатами  $X_A = 0$ ,  $Y_A = 0$ . Рассчитать и построить зависимость напряженности электрического поля  $E(y)$  при  $0 \leq y \leq h - r_0$ .

*Решение.* Воспользуемся методом электростатической аналогии, по которому плотность тока утечки  $J_{\text{ут}}$  в проводящей среде соответствует

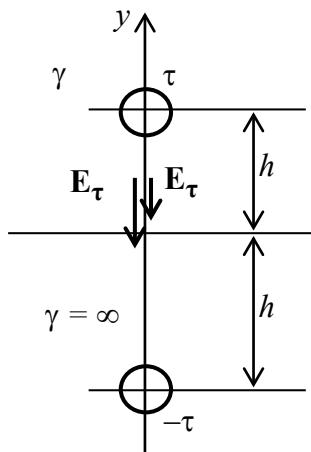


Рис. 3.20

электрическому смещению  $D$  в диэлектрике, а  $\gamma$  соответствует  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ . Для решения задачи используем метод зеркального изображения.

Пусть провод несет заряд с линейной плотностью  $\tau$  (рис. 3.20). Изображение провода с зарядом  $-\tau$  расположено на расстоянии  $h$  от границы с проводящей поверхностью внутри проводящей среды. Будем считать провода заряженными осями по условию, что  $r_0 \ll h$ .

Значение потенциала для произвольной точки на оси  $y$  между проводом и проводящей поверхностью при  $y \geq 0$  определится:

$$U = \frac{\tau}{2\pi\gamma} \ln \frac{1}{h-y} - \frac{\tau}{2\pi\gamma} \ln \frac{1}{h+y} + C.$$

Потенциал на поверхности провода ( $Y_A = h - r_0$ ):

$$U_{\text{пов}} = \frac{\tau}{2\pi\gamma} \ln \frac{1}{r_0} - \frac{\tau}{2\pi\gamma} \ln \frac{1}{2h-r_0} + C.$$

Принимаем потенциал проводящей поверхности ( $Y = 0$ ) равным нулю, тогда  $C = 0$ :  $U = U_{\text{пов}} = \frac{\tau}{2\pi\gamma} \ln \frac{2h-r_0}{r_0}$ , откуда  $\frac{\tau}{2\pi\gamma} = \frac{U}{\ln \frac{2h-r_0}{r_0}}$ .

Напряженность поля по оси  $y$  будет ( $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\tau + \mathbf{E}_{-\tau}$ ):

$$E = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\left[ \frac{\tau}{2\pi\gamma} \left( \frac{1}{h-y} - \frac{1}{h+y} \right) \right] = -\frac{U}{\ln \frac{2h-r_0}{r_0}} \left( \frac{1}{h-y} - \frac{1}{h+y} \right).$$

Модуль напряженности поля:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = |E_y| = \left| -\frac{U}{\ln \frac{2h - r_0}{r_0}} \left( \frac{1}{h-y} - \frac{1}{h+y} \right) \right| = 10,2 \cdot 10^3 \left( \frac{1}{60-y} + \frac{1}{60+y} \right).$$

Зависимость  $E(y)$  приведена на рис. 3.21. Согласно  $J_{yt} = \gamma E$  получим значение плотности тока в точке  $A$ :  $J_A = \gamma E(0) = 3,4 \text{ A/m}^2$ .

### 3.2.4. Расчет сопротивления шарового заземлителя

Если заземлитель, изготовленный в виде сферы, достаточно загружен в грунт так, что  $r_0 \ll h$  (рис. 3.22), то можно считать, что поле обладает сферической симметрией, и вектор плотности тока направлен всюду по радиусу.

Это в действительности имеет место, когда второй заземлитель, к которому стекаются линии тока, расположен достаточно далеко (в бесконечности).

Используем формулу емкости уединенного шара  $C = 4\pi k_0 \epsilon_a$ . В этой формуле заменяем  $\epsilon$  на  $\gamma$  и получаем формулу проводимости сферического заземлителя:  $G_3 = 4\pi r_0 \gamma$ ;  $R_3 = 1/G_3 = 1/(4\pi r_0 \gamma)$ .

В случае, когда заземлитель выполнен в виде полусфера, расположенной на поверхности грунта (рис. 3.23), задачу решают методом зеркальных отражений, заменяя воздух с  $\gamma = 0$  средой с той же проводимостью, что имеет грунт. Т. е. рассматривают сферу, расположенную в среде с проводимостью  $\gamma$ .

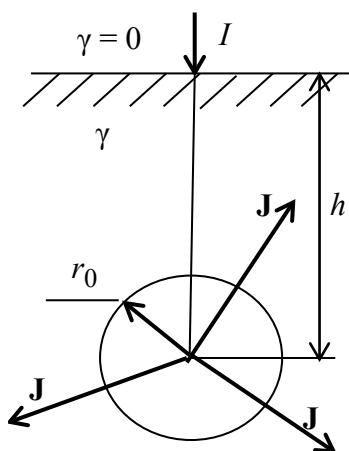


Рис. 3.22

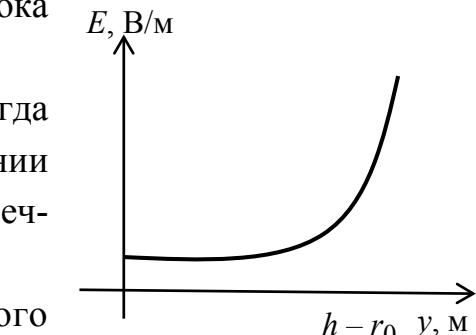


Рис. 3.21

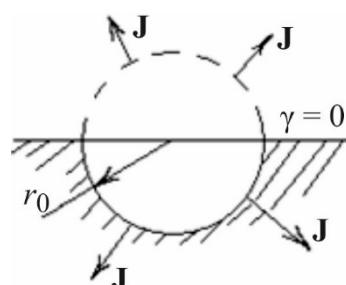


Рис. 3.23

Решение задачи для сферы известно, поэтому считают, что для полусфера  $G_3 = (1/2)G_{3\text{сф}} = 2\pi r_0 \gamma$ .

Если шар расположен от поверхности земли на расстоянии  $h$ , соизмеримом с его радиусом, то также используют метод зеркальных изображений. При этом на расстоянии  $h$  от поверхности грунта помещают второй (фиктивный) шар, а воздух заменяют средой с той же проводимостью  $\gamma$ .

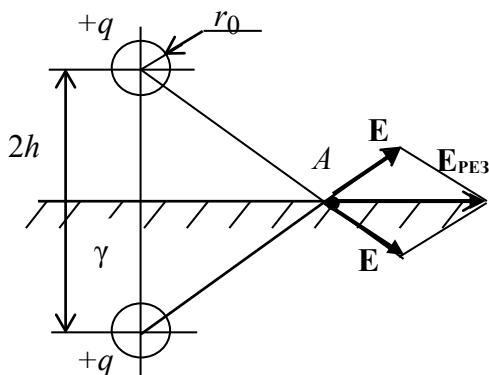


Рис. 3.24

Расчет поля такой системы из двух сферических электродов аналогичен расчету электростатического поля двух одинаково заряженных и расположенных друг от друга на расстоянии  $2h$  сфер. Электрические и геометрические центры сфер можно считать совпадающими (рис. 3.24).

Напряженность поля в произвольной точке  $A$  на оси  $x$  определяется методом наложения  $E_{\text{рез}} = \frac{2q \cos \alpha}{4\pi\epsilon(h^2 + x^2)}$ ,

$$\text{где } \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}; \quad r^2 = x^2 + h^2; \quad E_{\text{рез}} = \frac{qx}{2\pi\epsilon(x^2 + h^2)^{3/2}}.$$

$$\text{Потенциал произвольной точки на оси } x: U(x) = -\int E_{\text{рез}} dr = \frac{q}{2\pi\epsilon(x^2 + h^2)}.$$

Далее по методу электростатической аналогии заменяем заряд  $q$  на ток  $I$  и диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  на удельную проводимость  $\gamma$ .

Для поля шарового заземлителя имеем:

$$E = \frac{Ix}{2\pi\gamma(x^2 + h^2)^{3/2}}; \quad U = \frac{I}{2\pi\gamma(x^2 + h^2)}.$$

Шаговое напряжение на поверхности грунта на расстоянии  $x$  от точки, расположенной над центром сферы, можно определить, как

$$U_1 - U_2 = \frac{I}{2\pi\gamma} \left[ \frac{1}{x^2 + h^2} - \frac{1}{(x^2 + 0,8^2) + h^2} \right] = U_{\text{ш}}.$$

Длина шага человека здесь принята 0,8 м.

### 3.2.5. Проводящие шар и цилиндр в несовершенном диэлектрике

**Пример 3.6.** В проводящей среде с  $\gamma_1 = 2 \cdot 10^{-3}$  См/м находится проводящий шар с  $\gamma_2 = 10^{-3}$  См/м и радиусом  $R = 25$  мм (рис. 3.25). Напряженность однородного поля, в котором находится шар,  $E_0 = 500$  В/м. Найти плотность тока внутри шара  $J$ , рассчитать и построить зависимость  $E(x)$  при  $-R \leq x \leq 3R$ .

*Решение.* Напряженность поля внутри шара  $-R \leq x \leq R$  постоянна и определяется:  $E_2 = E_0 \frac{3\gamma_1}{2\gamma_1 + \gamma_2} = 600$  В/м.

Плотность тока внутри шара  $J_2 = \gamma_2 E_2 = 0,6$  А/м<sup>2</sup>.

Напряженность поля вне шара имеет две составляющие:

$$E_{1r} = E_0 \left( 1 + \frac{2R^3}{r^3} \right) \cos \Theta; \quad E_{10} = -E_0 \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \Theta.$$

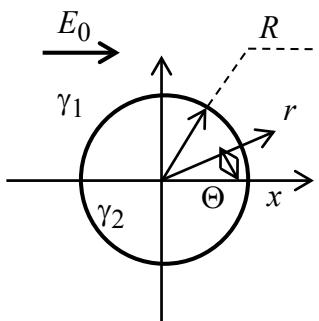


Рис. 3.25

Вдоль оси  $x$  при  $x \geq R$  и  $y = 0$ :  $r = x$ ;  $\cos \Theta = 1$ ;  $\sin \Theta = 0$ ;  $E_{10} = 0$ ;

$$E_1(x) = E_{1r} = E_0 \left( 1 + \frac{2R^3}{x^3} \right) = 500 + \frac{1,56 \cdot 10^7}{x^3} \text{ В/м.}$$

Зависимость  $E(x)$  приведена на рис. 3.26.

**Пример 3.7.** В проводящей среде с  $\gamma_1 = 5 \cdot 10^{-3}$  См/м находится проводящий цилиндр с  $\gamma_2 = 2 \cdot 10^{-3}$  См/м и радиусом  $R = 20$  мм (рис. 3.27). Напряженность внешнего однородного поля, в котором находится цилиндр,  $E_0 = 200$  В/м. Найти плотность тока внутри цилиндра  $J$ . Рассчитать и построить зависимость потенциала  $U(x)$  при  $0 \leq x \leq 2R$ .

*Решение.* Поле внутри цилиндра однородное, напряженность поля  $E_2$  величина постоянная и определяется следующим образом:

$$E_2 = E_0 \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} = 285,7 \text{ В/м.}$$

Плотность тока внутри цилиндра определяется  $J_2 = \gamma_2 E_2 = 0,57$  А/м<sup>2</sup>.

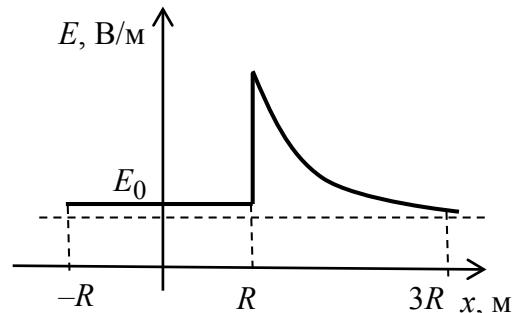


Рис. 3.26

Потенциал внутри цилиндра распределяется вдоль оси  $x$ :

$$U_2 = -E_2 x + U_0.$$

Пусть потенциал на оси цилиндра в точке с координатами  $x = 0, y = 0$  равен нулю  $U_0 = 0$  В, тогда  $U_2 = -285,7x$  В.

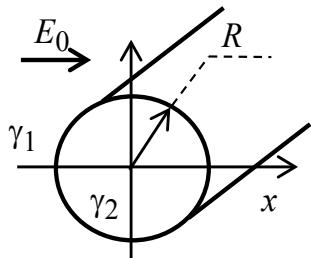


Рис. 3.27

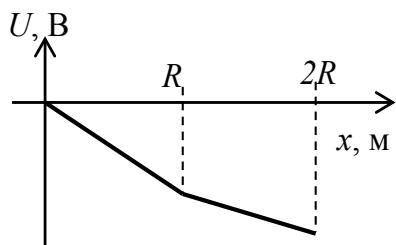


Рис. 3.28

Значение потенциала вне цилиндра по оси  $x$  при  $x \geq R$ :

$$U_1 = E_0 \left( \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \cdot \frac{R^2}{x} - x \right) = -\frac{0,034}{x} - 200x \text{ В.}$$

Зависимость  $U(x)$  приведена на рис. 3.28.

### 3.2.6. Поле двухпроводной линии

**Пример 3.8.** Два параллельных бесконечных цилиндра с радиусами  $r_1 = 20$  мм и  $r_2 = 30$  мм находятся в среде с  $\gamma = 5 \cdot 10^{-6}$  См/м (рис. 3.29). Расстояние между цилиндрами  $d = 40$  мм. Плотность тока в точке  $A$  с координатами  $X_A = r_1$ ,  $Y_A = 0$  равна  $J_A = 2,5 \cdot 10^{-4}$  А/м<sup>2</sup>. Определить напряжение между цилиндрами.

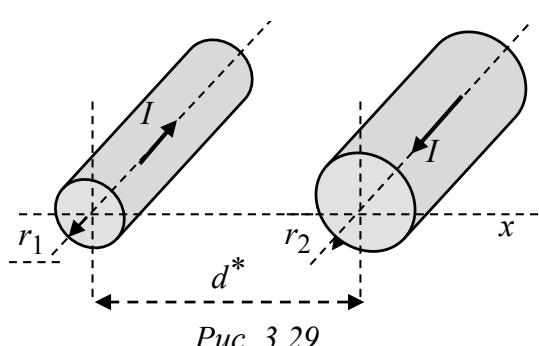


Рис. 3.29

*Решение.* Расстояние между осями цилиндров  $d^* = d + r_1 + r_2 = 90$  мм. Заменим цилиндры двумя заряженными осями с линейной плотностью заряда  $\tau$  и  $-\tau$ . Найдем положение осей. Пусть  $H_1$  и  $H_2$  – расстояния между осями цилиндров и эквипотенциалью с потенциалом  $U = 0$ .

$$H_1 = \frac{d^*}{2} + \frac{r_1^2 - r_2^2}{2d^*} = 42,2 \text{ мм}; H_2 = \frac{d^*}{2} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2d^*} = 47,8 \text{ мм.}$$

Расстояние  $d_1$  между эквипотенциалью  $U = 0$  и электрическими осями цилиндров:  $S_1 = H_1 - d_1 = 5$  мм;  $S_2 = H_2 - d_1 = 10,6$  мм.

Плотность тока в точке  $A$ :  $J_A = \gamma E_A = \frac{\tau}{2\pi} \left( \frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right)$ , где  $r_+$  и  $r_-$  – расстояния до положительно и отрицательно заряженной оси.

Для точки  $A$ :  $r_+ = r_1 - S_1 = 15$  мм;  $r_- = d^* - S_2 - r_1 = 59,4$  мм.

Линейная плотность заряда  $\tau = \frac{2\pi J_A}{\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}} = 1,88 \cdot 10^{-5}$  Кл/м.

Потенциал точки  $A$ :  $U_A = \frac{\tau}{2\pi\gamma} \left( \ln \frac{1}{r_+} - \ln \frac{1}{r_-} \right) + U_0 = 0,82 + U_0$  В.

Потенциал точки  $B$ :  $r_+ = d + r_1 - S_1 = 55$  мм;  $r_- = r_2 - S_2 = 19,4$  мм;

$$U_B = \frac{\tau}{2\pi\gamma} \ln \frac{r_-}{r_+} + U_0 = 0,62 + U_0$$
 В.

Таким образом, напряжение между цилиндрами определяется через разность потенциалов точек  $A$  и  $B$ :  $U = U_A - U_B = 1,44$  В.

### 3.3. Магнитное поле постоянного тока. Основные понятия

Основной величиной, характеризующей магнитное поле, является вектор магнитной индукции –  $\mathbf{B}$ . Поток вектора магнитной индукции через поверхность  $S$  называют магнитным потоком, который представляет собой скалярную величину  $\Phi = \int_S \mathbf{B} dS$ . В частном случае, когда вектор индукции оказывается перпендикулярным площадке  $S$  и по всей площадке имеет одну и ту же величину:  $\Phi = BS$ .

Напряженность магнитного поля в воздухе  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ , где  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  Гн·м – абсолютная магнитная проницаемость вакуума.

Для большинства веществ, не относящихся к ферромагнетикам, абсолютную магнитную проницаемость считают равной или близкой к  $\mu_0$ .

У ферромагнетиков абсолютная магнитная проницаемость во много раз превышает магнитную проницаемость вакуума:  $\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}$ , где  $\mu_a = \mu_r \mu_0$  – абсолютная магнитная проницаемость среды;  $\mu_r$  – относительная магнитная проницаемость среды.

Потокосцеплением катушки, содержащей  $n$  витков, при условии, что весь магнитный поток пронизывает все витки катушки, является величина:  $\psi = n\Phi$ . С другой стороны:  $\psi = Li$ .

При наличии двух катушек (контуров), имеющих общий магнитный поток, говорят о потокосцеплении взаимоиндукций и взаимоиндуктивности:

$$\Psi_{12} = n_2 \Phi_1; \quad M = \Psi_{12}/i_1; \quad \Psi_{21} = n_1 \Phi_2; \quad M = \Psi_{21}/i_2,$$

где  $\Psi_{12}$ ,  $\Psi_{21}$  – потокосцепление между катушками;  $M$  – взаимная индуктивность;  $i_1$ ,  $i_2$  – токи в катушках.

Напряженность магнитного поля связана с электрическим током посредством закона полного тока  $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = i$ .

В дифференциальной форме закон полного тока записывается в виде:  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$ , где  $\mathbf{J}$  – плотность тока проводимости.

Для области, в которой нет токов, вводят функцию скалярного магнитного потенциала (аналог электрическому потенциальному). Соответственно можно рассматривать разность потенциалов или *магнитное напряжение*:

$$\Phi_{M_1} - \Phi_{M_2} = \int_1^2 \mathbf{H} d\mathbf{l} = U_M.$$

Скалярный магнитный потенциал подчиняется уравнению Лапласа, что позволяет брать в ряде случаев готовые решения из электростатики:

$$\nabla^2 \Phi_M = 0; \quad \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_M}{\partial z^2} = 0.$$

Кроме скалярного магнитного потенциала при расчете полей используется векторный потенциал магнитного поля, определяемый из условия:  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ , где  $\mathbf{A}$  – векторный потенциал магнитного поля.

Магнитный поток выражается через векторный потенциал следующим образом:  $\Phi = \oint \mathbf{A} d\mathbf{l}$ . При этом магнитный поток сквозь замкнутую поверхность всегда равен нулю (принцип непрерывности):  $\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ ;  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ .

Векторный магнитный потенциал подчиняется уравнению Пуассона:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}.$$

На границе раздела двух сред с различными магнитными проницаемостями выполняется условие  $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ ;  $B_{1n} = B_{2n}$ , т. е. равны касательные

составляющие напряженности и равны нормальные составляющие вектора магнитной индукции.

Сила, действующая на элемент  $d\mathbf{l}$  проводника с током в магнитном поле  $\mathbf{F} = I[\mathbf{B}, d\mathbf{l}]$ . Энергия контура или катушки с током  $W = LI^2/2$ .

Энергия двух контуров, связанных друг с другом через магнитное поле:

$$W = L_1 I_1^2 / 2 + L_2 I_2^2 / 2 + M I_1 I_2.$$

Если отрезок  $d\mathbf{l}$  провода с током  $I$  находится в неферромагнитной среде, то вектор магнитной индукции связан с током законом Био–Савара–Лапласа

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{r}_0]}{r^2}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{r}_0]}{l^2}.$$

Этот закон также применяется при расчете магнитных полей.

### 3.3.1. Расчет магнитных полей с помощью закона полного тока

С помощью этого метода рассчитываются поля, обладающие симметрией и не требующие применения уравнений электромагнитного поля в дифференциальной форме. Ниже рассмотрим ряд примеров.

#### 3.3.1.1. Поле провода круглого сечения

На рис. 3.30 показано сечение цилиндрического проводника, расположенного в магнитной среде и выполненного из немагнитного материала.

Магнитное поле, созданное проводом, характеризуется цилиндрической симметрией, так как вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  всюду перпендикулярен радиусу.

Поле в данном случае нужно рассматривать в двух областях – внутри проводника и вне его.

Для области  $0 \leq r \leq r_0$  необходимо определить ток, охватываемый контуром интегрирования

$$I_1 = JS = J\pi r^2 = \frac{I}{\pi r_0^2} \pi r^2.$$

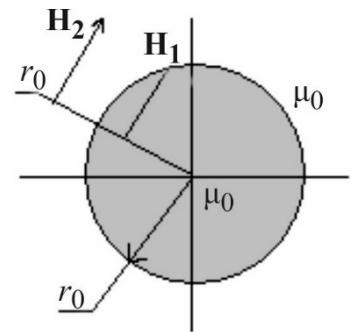


Рис. 3.30

Далее применяем закон полного тока:

$$\oint \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = H_1 \oint dl = H_1 2\pi r = I \frac{r^2}{r_0^2}; \quad H_1 = \frac{Ir}{2\pi r_0^2}.$$

Внутри провода напряженность поля прямо пропорциональна радиусу.

Вне провода при  $r_0 \leq r \leq \infty$  контур интегрирования охватывает весь ток, поэтому:  $\oint \mathbf{H}_2 d\mathbf{l} = H_2 \oint dl = H_2 2\pi r = I$ ;  $H_2 = I/2\pi r$ .

Т. е. в этой области напряженность убывает по логарифмической зависимости.

Элементарный магнитный поток, замыкающийся внутри провода:

$$d\Phi_1 = \mu_0 H_1 dS = \frac{\mu_0 I r l}{2\pi r_0^2} dr, \text{ где } l - \text{длина провода.}$$

Внутреннее потокосцепление провода:

$$\Psi_1 = \int_S d\psi_1 = \int_S \frac{r^2}{r_0^2} d\Phi_1 = \frac{\mu_0 I l}{2\pi r_0^4} \int_0^{r_0} r^3 dr = \frac{\mu_0 I l}{8\pi}.$$

$$\text{Внутренняя индуктивность провода } L_1 = \frac{\Psi_1}{I} = \frac{\mu_0 l}{8\pi}.$$

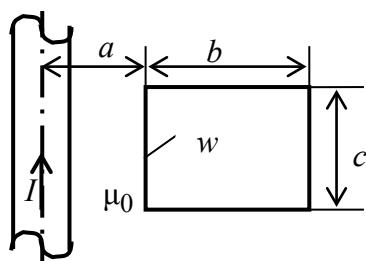


Рис. 3.31

Следует отметить, что понятие внешней индуктивности для одиночного провода не имеет смысла, так как в действительности всегда должен быть обратный провод для протекания тока, т. е. на практике всегда имеет место двухпроводная линия либо замкнутая петля.

Рассмотрим далее расчет взаимной индуктивности между проводом и расположенной в одной плоскости с ним рамкой (рис. 3.31) с числом витков  $w$ .

Магнитный поток, пронизывающий рамку, определяем по формуле

$$\Phi = \int_S H_2 \mu_0 dS = \mu_0 \frac{I c}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I c}{2\pi} \ln \frac{(a+b)}{a}.$$

$$\text{Потокосцепление рамки: } \psi = w\Phi = \frac{\mu_0 w}{2\pi} I c \ln \frac{(a+b)}{a}.$$

Взаимная индуктивность между проводом и рамкой:

$$M = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu_0 w c}{2\pi} \ln \frac{(a+b)}{a}.$$

Если по проводу течет переменный ток  $i(t) = I_m \sin \omega t$ , то ЭДС в рамке  $e(t) = E_m \cos \omega t = \omega M I_m \cos \omega t$ .

### 3.3.1.2. Магнитное поле двухпроводной линии

Рассмотрим рис. 3.32. Будем считать, что в левом проводе ток течет «от нас», а в правом «к нам».

Напряженность поля в произвольной точке  $A$  рассчитывается методом наложения  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{лев}} + \mathbf{H}_{\text{пр}}$ .

Очевидно, складывать векторы  $\mathbf{H}_{\text{лев}}$  и  $\mathbf{H}_{\text{пр}}$  удобнее по проекциям в декартовой системе координат.

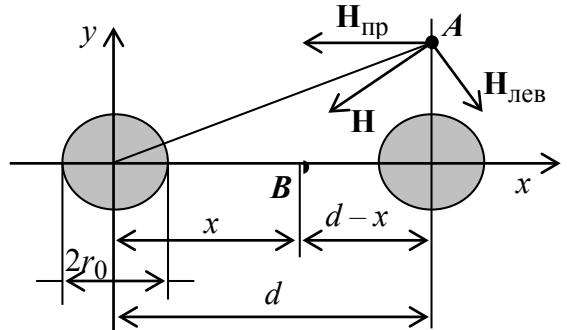


Рис. 3.32

Напряженность поля в произвольной точке  $B$  на оси  $x$  между проводами:

$$H_B = H_{B_{\text{лев}}} + H_{B_{\text{пр}}} = \frac{I}{2\pi x} + \frac{I}{2\pi(d-x)} = \frac{I}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right).$$

Магнитный поток между проводами линии (внешний поток):

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{H} \mu_0 d\mathbf{S} = \mu_0 l \frac{I}{2\pi} \int_{r_0}^{d-r_0} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx = \mu_0 l \frac{I}{2\pi} \ln \frac{d-r_0}{r_0}.$$

$$\text{Внешняя индуктивность линии: } L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 l \frac{1}{2\pi} \ln \frac{d-r_0}{r_0}.$$

В данном случае  $\psi = \Phi$ , так как линия содержит только один виток.

При  $d \gg r_0$  внутренней индуктивностью обычно пренебрегают, а внешнюю индуктивность определяют приближенно:  $L \approx \mu_0 l \frac{1}{2\pi} \ln \frac{d}{r_0}$ .

Если между проводами линии в одной плоскости с ними расположена рамка с числом витков  $w$  (рис. 3.33), то расчет взаимной индуктивности между линией и рамкой может быть выполнен следующим образом.

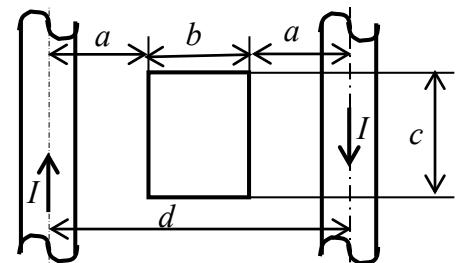


Рис. 3.33

Магнитный поток сквозь рамку:

$$\Phi = \mu_0 \int_S \mathbf{H} d\mathbf{S} = \mu_0 \frac{Ic}{2\pi} \int_a^{a+b} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx = \mu_0 \frac{Ic}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}.$$

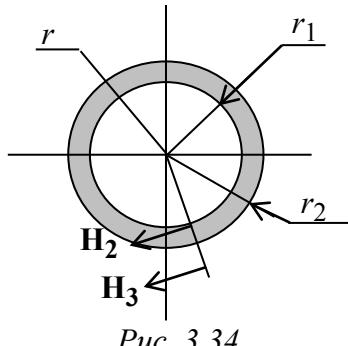
Потокосцепление рамки:

$$\psi = w\Phi = \mu_0 w \frac{Ic}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}.$$

Взаимная индуктивность:

$$M = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 w \frac{c}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}.$$

### 3.3.1.3. Поле трубчатого проводника с током



Rис. 3.34

Поле следует рассматривать в трех областях. В первой из них  $0 \leq r \leq r_1$  (рис. 3.34) закон полного тока запишется в виде:  $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0$ ;  $\mathbf{H}_1 = 0$ .

Т. е. во внутренней плоскости трубы магнитного поля нет.

Во второй области  $r_1 \leq r \leq r_2$ :  $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = I^*$ ,

где  $I^* = I \frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$  — ток, охватываемый контуром интегрирования.

Вследствие цилиндрической симметрии поля  $H_2 = I \frac{(r^2 - r_1^2)}{2\pi r(r_2^2 - r_1^2)}$ .

В третьей области  $r \geq r_2$ :  $\oint \mathbf{H}_3 d\mathbf{l} = H_3 \oint dl = H_3 \cdot 2\pi r = I$ ;  $H_3 = I/2\pi r$ .

Т. е. для напряженности получили то же значение, что для цилиндрического проводника. Очевидно, результат был бы аналогичным, если бы весь ток был сосредоточен на оси трубы.

### 3.3.2. Расчет магнитных полей с помощью метода зеркальных изображений

Метод применяют для расчета магнитных полей в неферромагнитных средах, ограниченных какой либо ферромагнитной поверхностью правильной формы или в которых есть геометрически правильной формы граница между двумя средами с различными магнитными проницаемостями.

Это искусственный прием расчета, в котором кроме заданных проводников с токами вводят еще дополнительные проводники и помещают их

там, где находятся зеркальные (в геометрическом смысле) отображения заданных проводников.

Рассмотрим поле прямолинейного провода с током  $I$ , расположенным на расстоянии  $h$  от плоской ферромагнитной поверхности (рис. 3.35). Устраним мысленно ферромагнитную среду и заменим ее проводом, являющимся зеркальным изображением реального провода в поверхности раздела и имеющим ток такого же направления и такой же

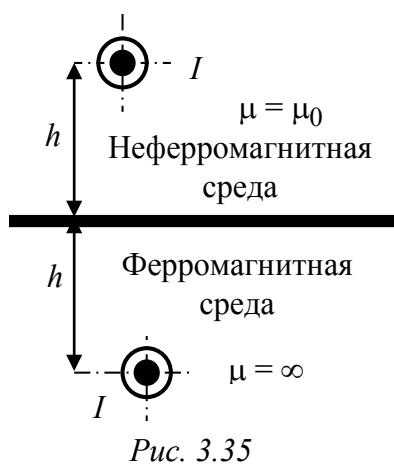


Рис. 3.35

величины, как и ток реального провода (рис. 3.35). Действительный провод и его зеркальное изображение составляют двухпроводную линию. Поле от такой системы проводников с токами в области над проводящей средой останется таким же, как и в действительных условиях. В этом и заключается метод зеркальных изображений.

Этот метод применим и при любом числе проводов, протянутых параллельно друг другу и параллельно плоской поверхности, ограничивающей ферромагнитную среду. Каждый провод должен быть зеркально отображен в поверхности ферромагнитной среды (направление тока остается неизменным), после чего ферромагнитная среда может быть мысленно удалена и рассмотрено поле совокупности действительных проводов и их зеркальных изображений.

Рассмотрим теперь поле прямолинейного провода с током  $I$ , расположенного на расстоянии  $h$  от плоской границы раздела двух сред с разными магнитными проницаемостями (рис. 3.36,  $a$ ).

Расчет поля в любой точке верхнего полупространства производят от двух проводников: заданного с током  $I_1$  и дополнительного с током  $I_2$ . Причем не только верхнее, но нижнее полупространство заполнено (в расчетном смысле) средой с магнитной проницаемостью  $\mu_1$ , а дополнительный (фиктивный) проводник является зеркальным отображением действительного (в геометрическом смысле) проводника (рис. 3.36,  $b$ ).

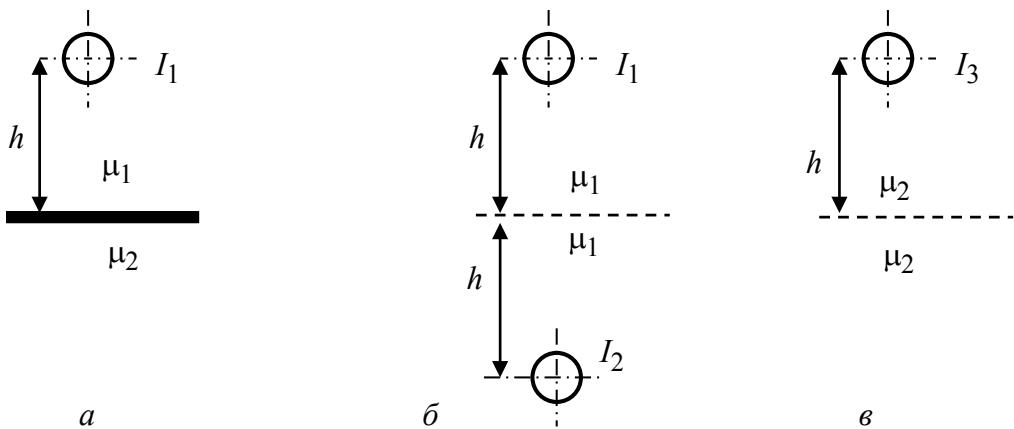


Рис. 3.36

Поле в любой точке нижнего полупространства определяют как поле от дополнительного провода, по которому протекает ток  $I_3$  и расположенного в той же точке, где находился действительный проводник. В этом случае не

только нижнее, но и верхнее полупространство заполняется средой с магнитной проницаемостью  $\mu_2$  (рис. 3.36, в).

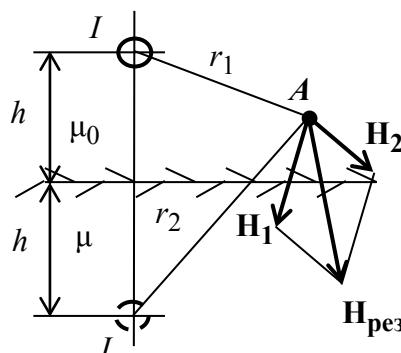


Рис. 3.37

Токи  $I_2$  и  $I_3$  дополнительных проводников определяются с помощью следующих соотношений:

$$I_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I; \quad I_3 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I.$$

Напряженность поля в произвольной точке  $A$  определяется методом наложения (рис. 3.37), с помощью суммирования векторов  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{H}_2$ . На границе ферромагнитной среды, в соответствии со сказанным выше, будет иметь место только нормальная составляющая векторов напряженности поля и магнитной индукции.

### 3.3.3. Расчет магнитного поля с помощью уравнения Максвелла

Рассмотрим расчет поля коаксиального кабеля (рис. 3.38), который используется в качестве линии передач постоянного тока, где жила является прямым проводом, а оболочка кабеля обратным. Поле в данном случае характеризуется цилиндрической симметрией, поэтому первое уравнение Максвелла  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$  запишем в цилиндрической системе координат:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_Z}{\partial \alpha} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial Z} = J_r; \quad \frac{\partial H_r}{\partial Z} - \frac{\partial H_Z}{\partial r} = J_\alpha; \quad \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(rH_\alpha)}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_Z}{\partial \alpha} = J_Z.$$

Если ось  $Z$  направить по оси кабеля, то  $J_r = 0$  и  $J_\alpha = 0$ , т. е. плотность тока будет иметь только одну составляющую  $J_Z$ .

Так как поле имеет осевую симметрию, то  $H_Z = 0$ ,  $H_r = 0$ ,  $H_\alpha = H$ .

В результате получаем уравнение

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}(rH) = J. \quad (3.7)$$

Рассмотрим решение этого уравнения в области при  $0 \leq r \leq r_1$ . В этой области плотность тока равна:  $J = I / \pi r^2$ .

Интегрированное уравнение (3.7) дает:

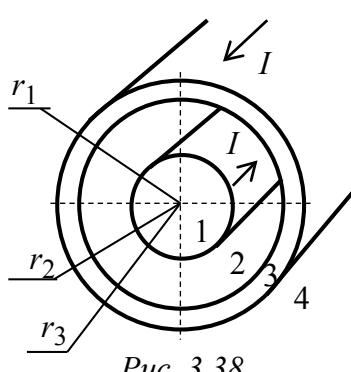


Рис. 3.38

$$\frac{d}{dr}(rH_1) = \frac{rI}{\pi r_1^2}; \quad rH_1 = \frac{r^2 I}{2\pi r_1^2} + C_1; \quad H_1 = \frac{rI}{2\pi r_1^2} + \frac{C_1}{r}.$$

Постоянную  $C_1$  определяем из условия, что на оси кабеля напряженность поля равна нулю, т. е. при  $r = 0, H = 0$ , тогда  $C_1 = 0$ .

Во второй области, заполненной диэлектриком, при  $r_1 \leq r \leq r_2$  плотность тока равна нулю, поэтому уравнение (3.7) примет вид  $\frac{d}{dr}(rH_2) = 0$ .

Решение этого уравнения:  $rH_2 = C_2$ ;  $H_2 = C_2/r$ .

Постоянную  $C_2$  находим из условия, что при  $r = r_1$ :

$$H_1 = H_2; \quad \frac{I}{2\pi r_1} = \frac{C_2}{r_1}; \quad C_2 = \frac{I}{2\pi}.$$

Значит напряженность поля в этой области будет  $H_2 = I/(2\pi r)$ .

В третьей области при  $r_2 \leq r \leq r_3$  поле описывается уравнением (3.7), в котором плотность тока равна:  $J = I/\pi(r_3^2 - r_2^2)$ , и, кроме того, вектор тока имеет противоположное направление по отношению к вектору плотности тока в жиле кабеля:  $\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}(rH_3) = -I/\pi(r_3^2 - r_2^2)$ .

После интегрирования получаем  $H_3 = -Ir/2\pi(r_3^2 - r_2^2) + C_3/r$ .

Так как при  $r = r_2$ ,  $H_3 = H_2$ , то  $\frac{I}{2\pi r_2} = -\frac{Ir_2^2}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)} + \frac{C_3}{r_2}$ ;

$$C_3 = \frac{I}{2\pi} + \frac{Ir_2^2}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)} = \frac{Ir_3^2}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)};$$

$$H_3 = -\frac{Ir}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)} + \frac{Ir_3^2}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)} = \frac{I(r_3^2 - r^2)}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)}.$$

### **3.3.4. Использование скалярного магнитного потенциала при расчете полей**

В качестве примера рассмотрим равномерное магнитное поле, возмущенное бесконечным ферромагнитным цилиндром (рис. 3.39). Эта задача решается с помощью уравнения Лапласа для скалярно магнитного потенциала, записанного в цилиндрической системе координат.

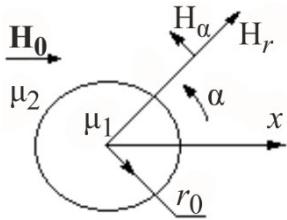


Рис. 3.39

Однако в соответствии с методом электростатической аналогии можно воспользоваться готовым решением из электростатики, заменив в соответствующих формулах  $\epsilon$  на  $\mu$ , а  $\mathbf{E}$  на  $\mathbf{H}$ .

Скалярный магнитный потенциал внутри цилиндра будет определяться по формуле:

$$\varphi_{1M} = -\frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} H_0 r \cos \alpha + C,$$

а вне цилиндра:

$$\varphi_{2M} = \left[ \left( \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) \cdot \left( \frac{r_0^2}{r} - r \right) \right] H_0 \cos \alpha + C,$$

где  $C$  – постоянная, с точностью до которой находится потенциал.

Напряженность поля внутри цилиндра оказывается постоянной величиной:  $H_1 = \sqrt{\left( \frac{\partial \varphi_{1M}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_{1M}}{\partial \alpha} \right)^2} = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} H_0$ .

Напряженность поля вне цилиндра:  $H_2 = \sqrt{\left( \frac{\partial \varphi_{2M}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_{2M}}{\partial \alpha} \right)^2}$ ,

где  $-\frac{\partial \varphi_{2M}}{\partial r} = H_r = -\left[ \left( \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) \frac{r_0^2}{r^2} + 1 \right] H_0 \cos \alpha$ ;  $-\frac{\partial \varphi_{2M}}{r \partial \alpha} = H_\alpha = -H_0 r \sin \alpha$ .

### 3.3.5. Применение векторного магнитного потенциала для расчета полей

#### 3.3.5.1. Магнитное поле шины прямоугольного сечения

По шине (рис. 3.40), выполненной из ферромагнитного металла и расположенной в воздухе, течет постоянный ток  $I$ . Высота шины много больше ее толщины –  $h \gg a$ .

Используем второе уравнение Максвелла  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot}(\mathbf{B}/\mu) = \mathbf{J}$ .

Заменяя вектор индукции векторным потенциалом магнитного поля, имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \mu \mathbf{J}, \quad (3.8)$$

где  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ .

Считаем, что ток равномерно распределен по площади поперечного сечения шины. В этом случае плотность тока равна:  $J = I/2ah$ .

Вектор плотности тока  $\mathbf{J}$  имеет только одну проекцию по оси  $y$ :  $J_y = J$ . Векторный потенциал вблизи боковой поверхности шины и внутри ее также имеет одну проекцию по оси  $y$ :  $A_y = A$ .

Рассмотрим поле в трех областях.

Запишем уравнение векторного потенциала по (3.8) для области 1 внутри шины при

$$-a \leq x \leq a : \frac{d^2 A_1}{dx^2} = -\mu J.$$

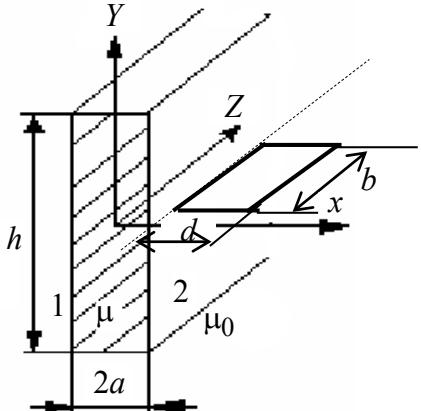


Рис. 3.40

Решение которого имеет вид:  $A_1 = -\mu \frac{J}{2} x^2 + C_1 x + C_2$ , где  $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$ .

Принимая векторный магнитный потенциал  $A_1 = 0$  при  $x = 0$ , получаем  $C_2 = 0$ . В областях 2 и 3 вне шины при  $x \geq a$  и  $x \leq -a$  соответственно  $\frac{d^2 A_2}{dx^2} = 0$ ,  $\frac{d^2 A_3}{dx^2} = 0$ , так как в этих областях плотность тока равна нулю. Тогда решения этих уравнений путем последовательного интегрирования будут:

$$A_2 = C_3 x + C_4; \quad A_3 = C_5 x + C_6.$$

Для определения постоянных интегрирования  $C_1$ ,  $C_3$  и т. д. находим напряженность магнитного поля в каждой из областей. В области 1:

$$H_1 = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{dA_1}{dx} = -Jx + C_1.$$

При  $x = 0$ ,  $H_1(0) = 0$ , что следует из закона полного тока. Тогда

$$C_1 = 0, \quad H_1 = -Jx, \quad A_1 = -\mu \frac{J}{2} x^2,$$

$$H_2 = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{dA_2}{dx} = \frac{C_3}{\mu_0}, \quad H_3 = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{dA_3}{dx} = \frac{C_5}{\mu_0}.$$

На границе раздела сред (на боковых поверхностях шин)  $H_1(a) = H_2(a)$  и  $H_1(-a) = H_3(-a)$ , т. е.:

$$-Ja = \frac{C_3}{\mu_0}, \quad C_3 = -\mu_0 Ja, \quad -J(-a) = \frac{C_5}{\mu_0}, \quad C_5 = \mu_0 Ja.$$

Кроме этого, на границах раздела выполняется условие  $A_1(a) = A_2(a)$ ,  $A_1(-a) = A_3(-a)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned}-\mu \frac{J}{2} a^2 &= C_3 a + C_4, & C_4 &= -\mu \frac{J}{2} a^2 + \mu_0 J a^2 = -J a^2 \left( \frac{\mu}{2} - \mu_0 \right), \\ -\mu \frac{J}{2} a^2 &= C_5 a + C_6, & C_6 &= -\mu \frac{J}{2} a^2 + \mu_0 J a^2 = -J a^2 \left( \frac{\mu}{2} - \mu_0 \right).\end{aligned}$$

Окончательно получим:  $A_1 = \mu \frac{J}{2} x^2$ ,

$$A_2 = -\mu_0 J a x - J a^2 \left( \frac{\mu}{2} - \mu_0 \right), \quad A_3 = -\mu_0 J a x - J a^2 \left( \frac{\mu}{2} - \mu_0 \right).$$

Определим далее магнитный поток через площадку, которая частично расположена в шине со сторонами  $b$  и  $d$ :

$$\Phi = \int_S B_2 dS = \int_S \mu_0 H_2 dS = \int_S \mu_0 \frac{C_3}{\mu_0} dS \int_0^d C_3 b dx = C_3 b d = \mu_0 J a b d.$$

Знак « $\rightarrow$ » у  $C_3$  опускаем, так как он учитывает направление  $\Phi$ , зависящее от направления тока вшине.

Потокосцепление с рамкой  $\psi = \Phi \cdot w$ , где  $\psi$  – поток в Вб.

Взаимная индуктивность между шиной и рамкой  $L = \psi/I$ , где  $L$  – индуктивность в Гн.

Вектор Пойнтинга внутри шины  $\Pi = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$ , где  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\gamma}$ ,  $E = E_y = \frac{I}{2ah\gamma}$ .

Направление вектора Пойнтинга совпадает с осью  $x$ :

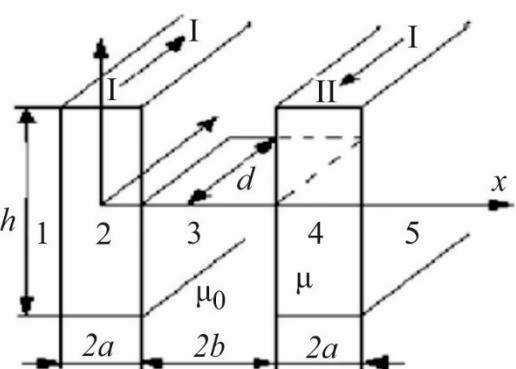
$$\Pi = -\frac{I}{2ab\gamma} \cdot \frac{I}{2ah} x I_x = -\frac{J^2}{\gamma} x I_x, \quad I_x \text{ – единичный вектор.}$$

### 3.3.5.2. Поле двух параллельных шин с током

Исследуем поле двух шин (рис. 3.41):  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_I + \mathbf{H}_{II}$ . Но так как напряженность поля имеет одну составляющую  $H_y$ ,  $H = H_I + H_{II}$ , при этом учтем, что вектор плотности тока вшине II имеет противоположное направление, для шины II координату  $x$  следует заменить на  $x - 2(a + b)$ .

Величина напряженности поля  

$$H = \sqrt{H_y^2} = |H_y|.$$



Рассмотрим пять областей.

Область 1:  $x \leq -a$ :  $H_y = H_I + H_{II} = Ja - Ja = 0$ ;  $B = 0$ .

Область 2:  $-a \leq x \leq a$  (шина I):

$$H_y = -Jx - Ja = -J(x + a), \quad B = \mu_r \mu_0 J(x + a). \quad \text{Рис 3.41}$$

Область 3:  $a \leq x \leq a + 2b$  (между шинами):

$$H_y = -Ja - Ja = -2Ja; \quad B = 2\mu_0 Ja.$$

Область 4:  $a + 2b \leq x \leq 3a + 2b$  (шина II):

$$H_y = -Ja + J[x - 2(a + b)] = J(x - 2b - 3a), \quad B = \mu_r \mu_0 J|x - 2b - 3a|.$$

Область 5:  $x \geq 3a + 2b$ :

$$H_y = -Ja + Ja = 0, \quad B = 0.$$

Магнитный поток через рамку со сторонами  $2b$  и  $d$  (две стороны этой рамки касаются шин) может быть найден следующим образом:

$$\Phi = \int_S B_3 dS = \mu_0 I \frac{d}{h} \int_a^{a+2b} dx = \mu_0 I d \frac{x}{h} \Big|_a^{a+2b} = \mu_0 I \frac{2bd}{h}.$$

### 3.3.5.3. Поле двух коаксиальных ферромагнитных труб с током

Рассмотрим магнитное поле линии передач постоянного тока, проводами которой служат две ферромагнитные трубы с совпадающими осями (рис. 3.42).

При этом по внешней трубе течет постоянный ток «от нас», а по внутренней – «к нам».

Очевидно, при  $r \leq r_1$  магнитного поля нет, что легко проверить с помощью закона полного тока. Контур интегрирования не охватывает тока, значит  $H = 0$ .

В области  $r_1 \leq r \leq r_2$  векторный потенциал подчиняется уравнению Пуассона, которое в цилиндрической системе координат будет иметь вид:

$$\left| \nabla^2 A_1 \right| = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA_1}{dr} \right) = -\mu J,$$

где  $J_1 = -I / \pi(r_2^2 - r_1^2)$  – плотность тока во внутренней трубе.

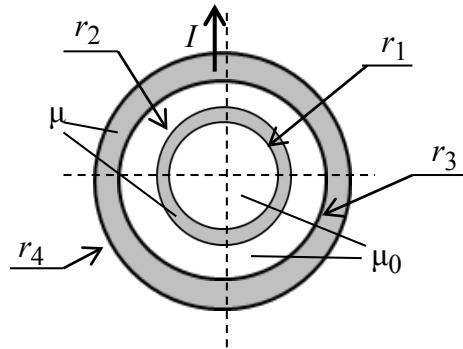


Рис. 3.42

Вектор плотности тока в нашем случае имеет только одну проекцию  $J_{1z}$  (ось  $z$  направлена по оси труб).

Дважды интегрированное уравнение Пуассона:

$$r \frac{dA_1}{dr} = -\mu J_1 \frac{r^2}{2} + C_1; \quad A_1 = -\mu J_1 \frac{r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования.

Напряженность поля в этой же области определяется через векторный потенциал:  $H_1 = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} A_1 = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{dA_1}{dr} = J_1 \frac{r}{2} - \frac{C_1}{\mu r}$ .

С учетом того, что при  $r = r_1$   $H_1 = 0$ , получаем:

$$0 = -\mu J_1 \frac{r_2^2}{4} + C_1 \ln r_2 + C_2; \quad C_2 = -\frac{I\mu}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)} \left( \frac{r_2^2}{2} - r_1^2 \ln \frac{r_2}{2} \right);$$

$$A_1 = -\frac{I\mu}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)} \left[ \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2) + r_1^2 \ln \frac{r_2}{2} \right].$$

Принимая значение векторного потенциала равным нулю при  $r = r_2$  (на внешней поверхности внутренней трубы), имеем:

$$0 = \frac{r_1}{2} \left[ \frac{-I}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \right] - \frac{C_1}{\mu r_1}; \quad C_1 = -\frac{r_1^2 I \mu}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)};$$

$$H_1 = -\frac{Ir}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{Ir_1^2}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)} = -\frac{I(r^2 - r_1^2)}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)}.$$

В области  $r_2 \leq r \leq r_3$  векторный потенциал подчиняется уравнению Лапласа:  $\nabla^2 A_2 = 0$ ;  $\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA_2}{dr} \right) = 0$ .

Интегрирование этого уравнения дает:

$$r \frac{dA_2}{dr} = C_3; \quad \frac{dA_2}{dr} = \frac{C_3}{r}; \quad A_2 = C_3 \ln r + C_4.$$

$$\text{Напряженность поля } H_2 = -\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{dA_2}{dr} = -\frac{C_3}{\mu_0 r}.$$

На границе раздела ( $r = r_2$ ) равны касательные составляющие напряженности  $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ , т. е.  $H_{1(r=r_2)} = H_{2(r=r_2)}$ :

$$-I \frac{1}{2\pi r_2} = -C_3 \frac{1}{\mu_0 r_2}; \quad C_3 = I \mu_0 \frac{1}{2\pi}; \quad H_2 = -I \frac{1}{2\pi r}.$$

Из условия непрерывности векторного потенциала на границе  $A_{1(r=r_2)} = A_{2(r=r_2)}$  следует, что:

$$0 = C_3 \ln r_2 + C_4; \quad C_4 = -I \mu_0 \frac{1}{2\pi} \ln r_2;$$

$$A_2 = -I \mu_0 \frac{1}{2\pi} \ln r - I \mu_0 \frac{1}{2\pi} \ln r_2 = I \mu_0 \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{r_2}.$$

В области  $r_3 \leq r \leq r_4$  поле описывается уравнением Пуассона

$$\left| \nabla^2 A_3 \right| = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA_3}{dr} \right) = -\mu J_3,$$

где  $J_3 = I/\pi(r_4^2 - r_3^2)$  – плотность тока во внешней трубе.

Решение уравнения Пуассона имеет вид:  $A_3 = -\mu J_3 \frac{r^2}{4} + C_5 \ln r + C_6$ .

$$\text{Напряженность поля } H_3 = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{dA_3}{dr} = J_3 \frac{r}{2} - \frac{C_5}{\mu r}.$$

Из условия равенства  $H_{2(r=r_3)} = H_{3(r=r_3)}$  следует, что

$$-\frac{I}{2\pi r_3} = \frac{r_3}{2} \cdot \frac{I}{2\pi(r_4^2 - r_3^2)} - \frac{C_5}{\mu r_3}; \quad C_5 = \frac{I \mu r_4^2}{2\pi(r_4^2 - r_3^2)}; \quad H_3 = \frac{I}{2\pi r} \cdot \frac{(r^2 - r_4^2)}{(r_4^2 - r_3^2)}.$$

Так как на границе  $A_{2(r=r_3)} = A_{3(r=r_3)}$ , то

$$I \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_3}{r_2} = -I \frac{\mu r_3^2}{4\pi(r_4^2 - r_3^2)} + I \frac{\mu r_4^2}{2\pi(r_4^2 - r_3^2)} \ln r_3 + C_6;$$

$$C_6 = I \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_3}{r_2} + I \frac{\mu r_3^2}{4\pi(r_4^2 - r_3^2)} - I \frac{\mu r_4^2}{2\pi(r_4^2 - r_3^2)} \ln r_3;$$

$$A_3 = \frac{I\mu}{4\pi(r_4^2 - r_3^2)} \left( 2r_4^2 \ln \frac{r}{r_3} + r_3^2 - r^2 \right) + I \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_3}{r_2}.$$

Определим магнитный поток в стенке внутренней трубы, считая, что длина трубы  $l$ :

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \int_S \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S} = \mu \int_S H_1 dS = \mu I \frac{l}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^{r_2} (r^2 - r_1^2) dr = \\ &= \mu I \frac{l}{2\pi(r_2^2 - r_1^2)} \left[ \frac{1}{2}(r_2^3 - r_1^3) - r_1^2(r_2 - r_1) \right].\end{aligned}$$

Магнитный поток в пространстве между трубами:

$$\Phi_2 = \int_S \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S} = \mu \int_S H_2 dS = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_{r_2}^{r_3} \frac{dr}{r} = \mu_0 I \frac{l}{2\pi} \ln \frac{r_3}{r_2}.$$

Магнитный поток в стенке внешней трубы:

$$\Phi_3 = \mu I \frac{l}{2\pi(r_4^2 - r_3^2)} \int_{r_3}^{r_4} \frac{r^2 - r_4^2}{r} dr = \mu I \frac{l}{2\pi(r_4^2 - r_3^2)} \left[ \frac{1}{2}(r_4^2 - r_3^2) - r_4^2 \ln \frac{r_4}{r_3} \right].$$

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Многообразие задач теории электромагнитного поля курса ТОЭ при ограниченном объеме издания не позволяет рассмотреть все возможные примеры расчета электростатических и стационарных полей. Однако по основным разделам теории поля в настоящем пособии приводятся решения некоторых задач или указаны пути их решения. Этим пособием авторы завершили изучение разделов теорий электромагнитного поля, посвященных расчетам электростатических, электрических и магнитных полей постоянного тока. Представленный материал поможет студентам в изучении практической части полного курса ТОЭ.

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Основы теоретической электротехники / Ю. А. Бычков, В. М. Золотницкий, Э. П. Чернышев, А. Н. Белянин. СПб.: Лань, 2009.
2. Башарин С. А., Федоров В. В. Теоретические основы электротехники: Теория электрических цепей и электромагнитного поля. М.: ACADEMIA, 2004.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: Электромагнитное поле. М.: Высш. шк., 1978.
4. Теория электромагнитного поля. Теоретические основы электротехники / Е. В. Лановенко, В. С. Саяпин, А. Ф. Сочелев, А. Н. Степанов. Ч. 3: учеб. пособие. Комсомольск-на-Амуре: Изд-во ГОУВПО «КнАГТУ», 2007.
5. Нейман Л. Р., Демирчан К. С. Теоретические основы электротехники: в 2 т. Т. 2. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1981.
6. Расчет электрических цепей и электромагнитных полей на ЭВМ / М. Г. Александрова, А. Н. Белянин, В. Брюкнер и др. М.: Радио и связь, 1983.
7. Купалян С. Д. Теоретические основы электротехники: Электромагнитное поле. М.: Энергия, 1970.
8. Примеры расчета электромагнитного поля: учеб. пособие по курсу «Теоретические основы электротехники» / А. Р. Куделько, Е. В. Лановенко, В. С. Саяпин и др. Комсомольск-на-Амуре: ГОУВПО «КнАГТУ», 2006.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
1. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО СТАТИЧЕСКИМ И СТАЦИОНАРНЫМ ПОЛЯМ .....	4
1.1. Электростатическое поле .....	4
1.2. Электрическое поле постоянного тока .....	16
1.3. Магнитное поле постоянного тока .....	21
2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ .....	32
2.1. Электростатическое поле .....	32
2.2. Электрическое поле постоянного тока .....	46
2.3. Магнитное поле постоянного тока .....	48
3. ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ СТАТИЧЕСКИХ И СТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЕЙ .....	63
3.1. Электростатическое поле. Основные понятия .....	63
3.1.1. Расчет электростатического поля с помощью теоремы Гаусса .....	66
3.1.1.1. Поле заряженной оси .....	66
3.1.1.2. Поле двух заряженных осей и двухпроводной линии .....	66
3.1.1.3. Поле коаксиального кабеля (цилиндрический конденсатор) ....	69
3.1.2. Метод зеркальных изображений .....	71
3.1.2.1. Поле заряженного провода, расположенного над проводящей поверхностью .....	71
3.1.2.2. Заряженный провод, параллельный границе раздела двух диэлектриков .....	73
3.1.3. Расчет полей по уравнениям Пуассона и Лапласа .....	74
3.1.3.1. Поле, распределенное между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями .....	74
3.1.3.2. Проводящий и диэлектрический шар в равномерном поле .....	76
3.1.3.3. Проводящий и диэлектрический цилиндр в однородном поле ..	77
3.2. Электрическое поле постоянного тока. Основные понятия .....	77
3.2.1. Поле плоского конденсатора с несовершенным диэлектриком .....	78
3.2.2. Расчет тока утечки и сопротивления утечки коаксиального кабеля .....	80
3.2.3. Расчет электрического поля методом зеркальных изображений....	82

3.2.4. Расчет сопротивления шарового заземлителя .....	83
3.2.5. Проводящие шар и цилиндр в несовершенном диэлектрике .....	85
3.2.6. Поле двухпроводной линии .....	86
3.3. Магнитное поле постоянного тока. Основные понятия.....	87
3.3.1. Расчет магнитных полей с помощью закона полного тока .....	89
3.3.1.1. Поле провода круглого сечения .....	89
3.3.1.2. Магнитное поле двухпроводной линии.....	91
3.3.1.3. Поле трубчатого проводника с током.....	92
3.3.2. Расчет магнитных полей с помощью метода зеркальных изображений .....	92
3.3.3. Расчет магнитного поля с помощью уравнения Максвелла.....	94
3.3.4. Использование скалярного магнитного потенциала при расчете полей.....	95
3.3.5. Применение векторного магнитного потенциала для расчета полей.....	96
3.3.5.1. Магнитное поле шины прямоугольного сечения.....	96
3.3.5.2. Поле двух параллельных шин с током .....	98
3.3.5.3. Поле двух коаксиальных ферромагнитных труб с током .....	99
Заключение.....	103
Список литературы .....	103
Оглавление .....	104

Лановенко Елена Викторовна  
Портной Марк Саулович  
Федоров Виктор Викторович

**Сборник задач и практикум  
по теории электромагнитного поля  
Статические и стационарные поля**

Учебное пособие

Редактор Н. Ю. Меньшенина

---

Подписано в печать 00.00.18. Формат 60×84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать цифровая. Печ. л. 6,75.  
Гарнитура «Times New Roman». Тираж 293 экз. Заказ 000.

---

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»  
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5