Содержание

О структуре учебника 15

ЧАСТЬ II. ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Глава 9. Расчет переходных процессов в электрических цепях с сосредоточенными параметрами классическим методом 17

9.1. О переходных процессах в линейных электрических цепях 17

9.2. Общий путь расчета переходных процессов в линейных электрических цепях 18

9.3. Метод переменных состояния 19

9.4. Определение постоянных интегрирования из начальных условий 21

9.5. Переходные процессы в цепи с последовательно соединенными участками *r* и *L*. 23

9.6. Переходные процессы в цепи с последовательно соединенными участками *r* и *C* 28

9.7. Переходные процессы в цепи с последовательно соединенными участками *r*, *L* и *C* 33

9.8. Разряд конденсатора на цепь *r*, *L* 36

9.9. Включение цепи *r*, *L*, *C* под постоянное напряжение 42

9.10. Включение цепи *r*, *L*, *C* под синусоидальное напряжение 43

9.11. Переходные процессы при мгновенном изменении параметров участков цепи 46

9.12. Расчет переходных процессов в сложной цепи 51

9.13. Расчет переходных процессов методом переменных состояния 55

9.14. Численное интегрирование уравнений состояния 67

9.15. Устойчивость методов численного интегрирования 71

9.16. Жесткость систем дифференциальных уравнений электрических цепей 76

9.17. Системные методы численного решения уравнений состояния электрических цепей 81

9.18. Расчет переходных процессов в электрических цепях методом синтетических схем 86

Глава 10. Расчет переходных процессов в цепях с сосредоточенными параметрами операторным методом. 93

10.1. Операторное изображение функций, их производных и интегралов. . . 93

10.2. Примеры изображений функций 96

10.3. Законы Кирхгофа и Ома в операторной форме 98

10.4. Расчет переходных процессов в электрических цепях операторным методом 101

10.5. Переход от изображений к оригиналу. Теорема разложения 104

10.6. Свойства корней характеристического уравнения 108

Глава 11. Спектральное представление непериодических функций — интегральное преобразование Фурье. Расчет переходных процессов методом частотных характеристик 110

11.1. Представление непериодических функций времени с помощью интеграла Фурье 110

11.2. Частотные характеристики 112

11.3. Получение частотных характеристик заданной функции времени . . . 113

11.4. Расчет переходных процессов при помощи частотных характеристик 116

11.5. Связь преобразования Фурье с преобразованием Лапласа. Понятие о комплексной частоте 119

Глава 12. Расчет электрических цепей при воздействии импульсных ЭДС и ЭДС произвольной формы 121

12.1. Понятие об импульсных ЭДС и импульсных системах 121

12.2. Переходные и импульсные характеристики электрической цепи и расчет цепи при воздействии импульсной ЭДС 122

12.3. Расчет цепи при воздействии ЭДС произвольной формы — интеграл Дюамеля 126

12.4. Расчет установившихся режимов при помощи интеграла Дюамеля и правого преобразования Лапласа 128

12.5. Расчет переходных процессов в сложных цепях при помощи правого преобразования Лапласа 132

12.6. Расчет электрических цепей при воздействии импульсных ЭДС методом правого преобразования Лапласа 134

12.7. Расчет цепи при действии последовательности импульсов путем решения разностных уравнений цепи 139

12.8. Метод *z*-преобразования 145

12.9. Расчет переходных процессов в электрических цепях методом *z*-преобразования 148

12.10. О случайных процессах в электрических цепях 151

Вопросы и упражнения к главам 9–12 153
9.1. Общий путь расчета переходных процессов. Метод переменных состояния 153
9.2. Переходные процессы в цепях *r*, *L* и *r*, *C* 156
9.3. Переходные процессы в цепи *r*, *L*, *C* 158
9.4. Переходные процессы в цепях при мгновенном изменении параметров участков цепи 158
10.1. Операторные изображения функций, их производных и интегралов 159
10.2. Расчет переходных процессов операторным методом 160
11.1. Частотные характеристики непериодических сигналов 163
11.2. Расчет переходных процессов при помощи частотных характеристик сигналов и электрических цепей 165
12.1. Переходные и импульсные характеристики электрических цепей 165
12.2. Расчет переходных процессов в цепях при помощи интеграла Дюамеля 167
12.3. Расчет переходных процессов в цепях при действии последовательности импульсов 168
Глава 13. Анализ общих свойств четырехполюсников 170
13.1. Различные виды уравнений четырехполюсника 170
13.2. Эквивалентные схемы четырехполюсника 174
13.3. Экспериментальное определение параметров четырехполюсника . . . 175
13.4. Соединения четырехполюсников и матричная запись уравнений четырехполюсника 176
13.5. Передаточные функции четырехполюсников 178
13.6. Дифференцирующие и интегрирующие цепи 183
13.7. Обратные связи 185
13.8. Активный четырехполюсник 187
13.9. Чувствительность характеристик электрических цепей к изменению параметров элементов 189
Глава 14. Цепные схемы. Электрические фильтры. Структурные схемы 192
14.1. Характеристические параметры четырехполюсника 192
14.2. Передаточные функции согласованных цепных схем 195
14.3. Электрические фильтры 196
14.4. Электрические фильтры нижних частот типа *k* 199

14.5. Электрические фильтры нижних частот типа *m* 201
14.6. Метод преобразования частоты. Электрические фильтры верхних частот. Полосовые электрические фильтры 203
14.7. Структурные схемы 205
14.8. К вопросу об устойчивости в электрических цепях. 208
Вопросы упражнения и задачи к главам 13–14 212
13.1. Уравнения и системы параметров четырехполюсников 212
13.2. Схемы, эквивалентные четырехполюснику. 214
13.3. Экспериментальное определение параметров четырехполюсника . . . 214
13.4. Соединение четырехполюсников 215
13.5. Передаточные функции четырехполюсников 216
13.6. Обратные связи 219
14.1. Характеристические параметры четырехполюсника 220
14.2. Электрические фильтры 222
14.3. Электрические фильтры нижних частот типов *k* и *m* 224
14.4. Электрические фильтры нижних частот. 225
14.5. Устойчивость в электрических цепях 225
Глава 15. Синтез электрических цепей 228
15.1. Задача синтеза электрических цепей. 228
15.2. Свойства входных функций пассивных электрических цепей 229
15.3. Представление входных функций в виде простых дробей 231
15.4. Реализация входных функций двухполюсника, имеющих вещественные и мнимые корни знаменателя, при помощи разложения этих функций на простые дроби. 232
15.5. Реализация входных функций двухполюсника, имеющих только мнимые корни знаменателя, при помощи представления этих функций в виде цепных дробей 236
15.6. Синтез входной функции двухполюсника в общем случае. Проверка отсутствия нулей и полюсов в правой полуплоскости. 242
15.7. Синтез входной функции двухполюсника в общем случае. Проверка условия положительности функции Re $[F(p)] \geq 0$ при Re $(p) = \sigma \geq 0$ 244
15.8. Синтез входной функции двухполюсника в общем случае. Реализация заданных функций, имеющих вещественные, мнимые и комплексные корни 247
15.9. О синтезе передаточных функций четырехполюсника 251

Глава 16. Диагностика электрических цепей. 254
16.1. Задачи и методы диагностики электрических цепей. 254
16.2. Диагностика пассивных цепей методом узловых сопротивлений 256
16.3. Диагностика пассивных цепей обобщенным методом узловых сопротивлений 262
16.4. Использование метода узловых сопротивлений для диагностики активных электрических цепей 264
16.5. Диагностика электрических цепей в условиях неполноты и противоречивости исходных данных. 265
16.6. Диагностики электрических цепей, обладающих жесткими математическими моделями. 267
Глава 17. Электрические цепи с распределенными параметрами при установившемся режиме 275
17.1. Электрические цепи с распределенными параметрами. 275
17.2. Уравнения линии с распределенными параметрами 276
17.3. Решение уравнений однородной линии при установившемся синусоидальном режиме 278
17.4. О моделировании однородной линии цепной схемой 280
17.5. Бегущие волны 280
17.6. Характеристики однородной линии. Условия для неискажающей линии 283
17.7. Однородная линия при различных режимах работы 284
17.8. Линии без потерь 287
Глава 18. Электрические цепи с распределенными параметрами при переходных процессах. 291
18.1. Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами 291
18.2. Решение уравнений однородной неискажающей линии при переходном процессе классическим методом 291
18.3. Решение уравнений однородной неискажающей линии при переходном процессе операторным методом 294
18.4. Волны в неискажающей линии 296
18.5. О происхождении и характере волн в линиях 298
18.6. Преломление и отражение волн в месте сопряжения двух однородных линий. 299
18.7. Отражение волн от конца линии 301
18.8. Процесс включения однородной линии 304

18.9. Прохождение волн при наличии реактивного сопротивления в месте сопряжения однородных линий 306

18.10. Прохождение волн при наличии активного сопротивления в месте сопряжения однородных линий 309

Вопросы, упражнения и задачи к главам 15–18 312

15.1. Синтез двухполюсников 312

15.2. Синтез четырехполюсников 312

17.1. Расчет установившихся режимов длинной линии 313

17.2. Неискажающая длинная линия 315

17.3. Режимы холостого хода и короткого замыкания длинной линии 316

18.1. Переходные процессы в одной длинной линии 317

18.2. Переходные процессы при соединении нескольких длинных линий . . 318

18.3. Отражение волн от конца длинной линии 320

ЧАСТЬ III. ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

Глава 19. Элементы нелинейных электрических цепей, их характеристики и параметры 323

19.1. Особые свойства нелинейных электрических цепей 323

19.2. Элементы электрической цепи с нелинейными сопротивлениями, их параметры и характеристики 325

19.3. Симметричные и несимметричные характеристики элементов с нелинейными сопротивлениями 327

19.4. Инерционные и безынерционные элементы с нелинейным сопротивлением 332

19.5. Характеристики элементов с нелинейным сопротивлением, позволяющие осуществить стабилизацию тока или напряжения 333

19.6. Полупроводниковые диоды как нелинейные элементы электрической цепи 335

19.7. Управляемые нелинейные элементы. Ионный прибор с управляющим электродом 342

19.8. Управляемые нелинейные элементы. Трехэлектродная электронная лампа 343

19.9. Трехэлектродная электронная лампа как элемент электрической цепи 344

19.10. Управляемые нелинейные элементы. Полупроводниковые триоды . . 346

19.11. Полупроводниковый триод как элемент электрической цепи 349

19.12. Управляемые нелинейные элементы. Тиристоры 354
19.13. Нелинейные свойства ферромагнитных материалов. 355
19.14. Нелинейные характеристики и параметры катушки с сердечником из ферромагнитного материала 361
19.15. Конденсаторы с нелинейной характеристикой 363
19.16. Источники ЭДС и источники тока с нелинейными характеристиками. 366

Глава 20. Расчет нелинейных электрических и магнитных цепей при постоянном токе 368
20.1. О расчете нелинейных электрических цепей при постоянном токе. . . 368
20.2. Последовательное, параллельное и смешанное соединения участков электрической цепи, содержащих нелинейные элементы и не содержащих источников ЭДС. 369
20.3. Последовательное, параллельное и смешанное соединения участков электрической цепи, содержащих нелинейные элементы и источники ЭДС. 372
20.4. Расчет сложной электрической цепи с одним нелинейным элементом 374
20.5. Расчет сложной электрической цепи с двумя нелинейными элементами 376
20.6. Расчет сложной электрической цепи с тремя нелинейными элементами. 377
20.7. Расчет сложной нелинейной цепи постоянного тока численными методами 380
20.8. Составление системы нелинейных уравнений электрической цепи постоянного тока при условии обеспечения единственности решения. 384
20.9. Аналитическое исследование особых свойств нелинейных электрических цепей постоянного тока при малых отклонениях от заданного режима 388
20.10. Законы и параметры магнитных цепей. 392
20.11. Расчет магнитной цепи с последовательным соединением участков 395
20.12. Расчет разветвленных магнитных цепей 397
20.13. О расчете постоянных магнитов 399
20.14. О расчете магнитных цепей с постоянными магнитами 400

Глава 21. Нелинейные электрические и магнитные цепи при периодических процессах 402

21.1. Особенности периодических процессов в электрических цепях с инерционными нелинейными элементами 402

21.2. Процессы в цепи с индуктивным инерционным электромеханическим элементом 404

21.3. Особенности периодических процессов в цепях с безынерционными нелинейными элементами. Метод эквивалентных синусоид 406

21.4. Формы кривых тока, магнитного потока и ЭДС в катушке с ферромагнитным сердечником 407

21.5. Потери в сердечниках из ферромагнитного материала 409

21.6. Эквивалентные синусоиды и зависимость между потокосцеплением и током 410

21.7. Уравнение, векторная диаграмма и эквивалентная схема катушки с ферромагнитным сердечником 411

21.8. Комплексное магнитное сопротивление магнитной цепи 412

21.9. Уравнения, векторная диаграмма и эквивалентная схема трансформатора с ферромагнитным сердечником 413

21.10. Графический метод расчета, основанный на введении эквивалентных синусоид 416

21.11. Явление феррорезонанса при последовательном соединении катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора 417

21.12. Явление феррорезонанса при параллельном соединении катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора 420

21.13. Ферромагнитные стабилизаторы напряжения 421

21.14. Управляемые индуктивные элементы нелинейной цепи. Ферромагнитный усилитель мощности 423

21.15. Метод гармонического баланса для расчета периодических процессов в нелинейных цепях 424

21.16. Выделение высших гармоник в нелинейных цепях с целью преобразования частоты 427

21.17. Умножение частоты с помощью ферромагнитных элементов, основанное на выделении гармоник нулевой последовательности 427

21.18. Расчет процессов в цепи методом сопряжения интервалов при кусочно-линейной аппроксимации характеристик нелинейных элементов 429

21.19. О расчете нелинейных цепей с вентилями. Выпрямление переменного тока 430

21.20. Регулирование выпрямителей и преобразование постоянного тока в переменный с помощью управляемых вентилей . . . 432

21.21. Конденсаторы с нелинейными характеристиками в цепи переменного тока 436

21.22. О коэффициенте мощности при питании нелинейной цепи от источника синусоидального напряжения. 438

Глава 22. Элементы теории колебаний и методы расчета переходных процессов в нелинейных электрических цепях. 439

22.1. Особенности колебательных процессов в нелинейных электрических цепях. 439

22.2. Устойчивость режима в цепи с индуктивностью и нелинейным сопротивлением, питаемой от источника постоянного напряжения 439

22.3. Устойчивость режима в цепи с емкостью и нелинейным сопротивлением, питаемой от источника постоянного напряжения 441

22.4. О выборе эквивалентной схемы для рассмотрения вопроса об устойчивости 442

22.5. Общие соображения об устойчивости режима в сложных нелинейных электрических цепях, питаемых от источников постоянного напряжения 444

22.6. Возбуждение автоколебаний в нелинейной системе с обратной связью. Транзисторный генератор 448

22.7. Релаксационные колебания 453

22.8. Методы расчета переходных процессов в нелинейных электрических цепях. 455

22.9. Метод графического интегрирования для расчета переходного процесса в нелинейной цепи. 456

22.10. Аналитический метод расчета переходных процессов, основанный на приближенном аналитическом выражении характеристики нелинейного элемента 460

22.11. Метод последовательных интервалов для расчета переходных процессов в нелинейной цепи 463

22.12. Метод расчета переходных процессов в нелинейной цепи, основанный на условной линеаризации уравнения цепи 466

22.13. Изображение переходных процессов на фазовой плоскости. 468

22.14. Метод изоклин для построения фазовых траекторий и расчета переходных процессов 472
22.15. Метод медленно меняющихся амплитуд — метод Ван-дер-Поля 475
22.16. Частотные свойства нелинейных цепей 480
22.17. Значение нелинейных электрических цепей в современной технике 481
Вопросы, задачи и упражнения к главам 19–22 482
19.1. Параметры элементов нелинейных электрических цепей 482
19.2. Транзистор как элемент электрической цепи 482
19.3. Нелинейные свойства ферромагнитных материалов 484
19.4. Аппроксимация нелинейных характеристик 485
20.1. Последовательное, параллельное и смешанное соединение нелинейных элементов электрических цепей. 485
20.2. Методы расчета нелинейных электрических цепей 486
20.3. Нелинейные магнитные цепи. 488
21.1. Формы кривых тока и напряжения в нелинейных цепях. Метод эквивалентных синусоид 489
21.2. Катушка и трансформатор с ферромагнитным сердечником. Явление феррорезонанса 490
21.3. Методы гармонического баланса и кусочно-линейной аппроксимации нелинейных характеристик 492
22.1. Устойчивость состояния равновесия 492
22.2. Автоколебания в нелинейных электрических цепях 493
22.3. Расчет переходных процессов в нелинейных цепях 494
22.4. Метод фазовой плоскости 496
Ответы на вопросы, решения упражнений и задач 497
9.1. Общий путь расчета переходных процессов. Метод переменных состояния 497
9.2. Переходные процессы в цепях *r*, *L* и *r*, *C* 500
9.3. Переходные процессы в цепи *r*, *L*, *C* 501
9.4. Переходные процессы в цепях при мгновенном изменении параметров участков цепи 502
10.1. Операторные изображения функций, их производных и интегралов 502
10.2. Расчет переходных процессов операторным методом 503

11.1. Частотные характеристики непериодических сигналов 507
11.2. Расчет переходных процессов при помощи частотных характеристик сигналов и электрических цепей 509
12.1. Переходные и импульсные характеристики электрических цепей 510
12.2. Расчет переходных процессов в цепях при помощи интеграла Дюамеля 512
12.3. Расчет переходных процессов в цепях при действии последовательности импульсов 514
13.1. Уравнения и системы параметров четырехполюсников 516
13.2. Схемы, эквивалентные четырехполюснику 519
13.3. Экспериментальное определение параметров четырехполюсника . . . 521
13.4. Соединение четырехполюсников 522
13.5. Передаточные функции четырехполюсников 523
13.6. Обратные связи 529
14.1. Характеристические параметры четырехполюсника 530
14.2. Электрические фильтры 532
14.3. Электрические фильтры нижних частот типов *k* и *m* 534
14.4. Электрические фильтры нижних частот 536
14.5. Устойчивость в электрических цепях 537
15.1. Синтез двухполюсников 540
15.2. Синтез четырехполюсников 541
17.1. Расчет установившихся режимов длинной линии 541
17.2. Неискажающая длинная линия 542
17.3. Режимы холостого хода и короткого замыкания длинной линии 543
18.1. Переходные процессы в одной длинной линии 544
18.2. Переходные процессы при соединении нескольких длинных линий . . 545
18.3. Отражение волн от конца длинной линии 548
19.1. Параметры элементов нелинейных электрических цепей 552
19.2. Транзистор как элемент электрической цепи 553
19.3. Нелинейные свойства ферромагнитных материалов 555
19.4. Аппроксимация нелинейных характеристик 556
20.1. Последовательное, параллельное и смешанное соединение нелинейных элементов электрических цепей 557
20.2. Методы расчета нелинейных электрических цепей 558

20.3. Нелинейные магнитные цепи. 558
21.1. Формы кривых тока и напряжения в нелинейных цепях. Метод эквивалентных синусоид 559
21.2. Катушка и трансформатор с ферромагнитным сердечником. Явление феррорезонанса 559
21.3. Методы гармонического баланса и кусочно-линейной аппроксимации нелинейных характеристик 560
22.1. Устойчивость состояния равновесия 561
22.2. Автоколебания в нелинейных электрических цепях 561
22.3. Расчет переходных процессов в нелинейных цепях 562
22.4. Метод фазовой плоскости 565
Алфавитный указатель. 566

О структуре учебника

Курс «Теоретические основы электротехники» включает в себя четыре части. *Первая*, сравнительно короткая, именуемая «Основные понятия и законы теории электромагнитного поля и теории электрических и магнитных цепей», содержит обобщения понятий и законов из области электромагнитных явлений и развитие формулировок и определений основных понятий и законов теории электрических и магнитных цепей. Эта часть, связывая курсы физики и теоретических основ электротехники, одновременно формирует у читателя правильные физические представления о процессах, происходящих в электрических и магнитных цепях и в электромагнитных полях. Она помогает также глубже понять излагаемые в последующих частях курса математические формулировки и методы решения задач.

Вторая и наибольшая по объему часть курса, именуемая «Теория линейных электрических цепей», содержит последовательное изложение этой теории, сопровождаемое значительным количеством примеров. Здесь излагаются основные свойства линейных электрических цепей и различные подходы к расчету установившихся и переходных процессов в таких цепях. Основное внимание уделяется методам анализа, позволяющим рассчитывать характеристики электромагнитных процессов в электрических цепях, структура и параметры которых известны. Вместе с тем, рассмотрены также и основные подходы к задачам синтеза и диагностики цепей, актуальность которых растет в настоящее время. Применение методов этих разделов учебника позволяет создавать электрические цепи с наперед заданными свойствами, а также определять параметры или диагностировать состояние реальных устройств.

Третья часть курса называется «Теория нелинейных электрических и магнитных цепей». В ней излагаются свойства нелинейных электрических и магнитных цепей и методы расчета происходящих в них процессов. Параметры нелинейных цепей зависят от тока, напряжения или магнитного потока, и это приводит к существенному усложнению математических моделей нелинейных элементов и методов анализа процессов в нелинейных цепях. Вместе с тем эти вопросы имеют большое значение в связи с широким использованием элементов цепей с нелинейными характеристиками в современных устройствах.

Последняя, *четвертая*, часть — «Теория электромагнитного поля». Многие электротехнические проблемы не могут быть полностью рассмотрены при помощи теории цепей и должны решаться с привлечением методов теории электромагнитного поля. Прежде всего, эти методы необходимы для расчета важнейших электромагнитных параметров электротехнических устройств, таких индуктивность, емкость, сопротивление, чем, однако, далеко не исчерпывается область их применения. Без использования современных методов теории электромагнитного поля невозможно рассмотрение вопросов излучения и распространения в пространстве электромагнитных волн, потерь в мощных энергетических устройствах, создания и использования устройств с высокой напряженностью электрического или магнитного полей и т. п.

Наличие в учебнике первой части «Основные понятия и законы теории электромагнитного поля и теории электрических и магнитных цепей», дает возможность начать рассмотрение теории электромагнитного поля с общих уравнений, что позволяет подробно рассмотреть подходы к решению задач теории электромагнитного поля и примеры их решения в рамках ограниченного объема учебника.

В учебнике принята сквозная нумерация глав. В первый том учебника входит часть 1 «Основные понятия и законы теории электромагнитного поля и теории электрических и магнитных цепей» (главы 1–3) и начало части 2 «Теория линейных электрических цепей» (главы 3–8), во второй том — окончание части 2 «Теория линейных электрических цепей» (главы 9–18), а также часть 3 «Теория нелинейных электрических цепей» (главы 19–22), в третий том — часть 4 «Теория электромагнитного поля» (главы 23–30). Четвертый том содержит вопросы, упражнения и задачи по всем частям курса, а также набор расчетных заданий по всему курсу с методическими указаниями для их выполнения. В нем приведены также ответы на вопросы, решения упражнений и задач.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Глава девятая

Расчет переходных процессов в электрических цепях с сосредоточенными параметрами классическим методом

9.1. О переходных процессах в линейных электрических цепях

Переходным называется процесс, возникающий в электрической цепи при переходе от одного установившегося режима к другому. При установившихся режимах токи и напряжения в цепи теоретически могут существовать неограниченно долго, не изменяя своего характера, и при заданных конфигурации цепи и ее параметрах определяются только видом действующих в цепи ЭДС или, соответственно, видом заданных токов источников токов. Если в цепи действуют постоянные во времени ЭДС, то в установившемся режиме токи и напряжения во всех участках цепи должны быть также постоянными во времени. Когда ЭДС источников изменяются во времени по закону синуса с одной и той же частотой, то и токи, и напряжения в цепи в установившемся режиме должны быть синусоидальными функциями времени той же частоты. Если действующие в цепи ЭДС несинусоидальны, но изменяются периодически во времени с одним и тем же периодом, то токи и напряжения должны быть периодическими функциями времени с тем же периодом. Этими тремя видами ЭДС и токов исчерпывается перечень случаев установившихся режимов в цепи, причем постоянные и синусоидальные ЭДС и токи можно рассматривать как частные случаи периодических токов и ЭДС.

Отыскание токов и напряжений в установившемся режиме сводится к нахождению частных решений дифференциальных уравнений цепи. Способы нахождения этих частных решений были рассмотрены в главах 4, 5 и 8.

Для отыскания токов $i(t)$ и напряжений $u(t)$ *в переходном процессе* необходимо найти полные решения дифференциальных уравнений цепи. Как известно, полное решение $i(t)$ линейного уравнения получается как сумма частного реше-

ния $i'(t)$ неоднородного уравнения, т. е. уравнения, содержащего заданные ЭДС или заданные напряжения, и решения $i\ (t)$ однородного уравнения, которое получается из того же уравнения цепи, если принять в нем заданные ЭДС или напряжения равными нулю, т. е.

$$i(t) = i'(t) + i''(t).$$

При $t \to \infty$ ток $i\ \ t)$ стремится к нулю, так как процесс в цепи, обладающей конечным сопротивлением, должен затухать при отсутствии в цепи источников ЭДС. Поэтому ток $i\ \ t)$ называют с в о б о д н ы м т о к о м, так как он определяется из уравнений при отсутствии источников ЭДС.

Свободный ток возникает вследствие того, что при включении или выключении цепи или любом другом внезапном изменении в ней имеющиеся запасы энергии в полях цепи от предыдущего установившегося режима не соответствуют запасам энергии в полях, которые должны были бы быть в новом установившемся режиме после происшедших изменений в цепи.

Так как свободный ток $i''(t)$ стремится к нулю, то ток $i(t)$ стремится к $i'(t)$. Следовательно, частное решение $i'(t)$ является т о к о м у с т а н о в и в ш е г о с я р е ж и м а, который устанавливается после происшедших изменений в цепи.

9.2. Общий путь расчета переходных процессов в линейных электрических цепях

Общий путь расчета переходных процессов в любой сколь угодно сложной линейной электрической цепи заключается в следующем. Составляем дифференциальные уравнения цепи согласно первому и второму законам Кирхгофа. Если заданными являются ЭДС источников, то неизвестными будут токи во всех p ветвях цепи. Пусть желаем найти ток i_k в k-й ветви. Исключая последовательно все остальные токи, получим одно дифференциальное уравнение, содержащее только ток i_k и его производные до порядка n:

$$a_n \frac{d^n i_k}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i_k}{dt^{n-1}} + \ldots + a_2 \frac{d^2 i_k}{dt^2} + a_1 \frac{di_k}{dt} + a_0 i_k = f_k(t),$$

т. е.

$$\sum_{s=0}^{n} a_s \frac{d^s i_k}{dt^s} = f_k(t).$$

Порядок n уравнения определяется конфигурацией цепи и характером ее элементов. Свободный член $f_k(t)$ содержит в себе заданные ЭДС.

Полный интеграл этого уравнения равен сумме частного решения i'_k, определяемого видом функции $f_k(t)$, и полного решения i''_k однородного уравнения:

$$\sum_{s=0}^{n} a_s \frac{d^s i''_k}{dt^s} = 0, \quad \text{т. е.} \quad i_k = i'_k + i''_k.$$

Для определения i''_k находим n корней характеристического уравнения:

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + a_s \alpha^s + \ldots + a_1 \alpha + a_0 = \sum_{s=0}^{n} a_s \alpha^s = 0.$$

В случае если все корни простые, имеем

$$i''_k = A_{k1}e^{\alpha_1 t} + A_{k2}e^{\alpha_2 t} + \ldots + A_{kn}e^{\alpha_n t} = \sum_{s=1}^{n} A_{ks}e^{\alpha_s t},$$

и, следовательно, искомое решение имеет вид

$$i_k = i'_k + \sum_{s=1}^{n} A_{ks}e^{\alpha_s t}.$$

Здесь A_{ks} — произвольные постоянные интегрирования. Они определяются из физических начальных условий, о чем будет сказано в следующем параграфе.

В случае наличия кратных корней характеристического уравнения приведенное выше выражение для i_k после определения всех величин A_{ks} из начальных условий будет содержать неопределенности, раскрывая которые, получим выражение i_k для этого случая.

Изложенный *метод* часто *называют классическим*.

Выше было сказано, что дифференциальные уравнения цепи составляются по первому и второму законам Кирхгофа, при этом общее число уравнений равно числу ветвей цепи. Можно составлять дифференциальные уравнения для контурных токов, и тогда число уравнений будет равно числу независимых контуров цепи, или же для узловых напряжений, и тогда число уравнений будет равно числу узлов цепи без единицы.

9.3. Метод переменных состояния

Другой путь расчета переходных процессов заключается в выделении таких искомых величин, которые определяют энергетическое состояние электрической цепи, так как переходный процесс и есть процесс смены одного установившегося энергетического состояния другим. Энергетическое состояние в линейных электрических цепях полностью определяется *токами индуктивных катушек* и *напряжениями конденсаторов*, поэтому естественно выбирать их в качестве величин, определяющих состояние цепи. Будем называть эти величины переменными состояния. Токи и напряжения резистивных элементов электрической схемы всегда могут быть выражены через переменные состояния при помощи составления и решения системы уравнений согласно законам Кирхгофа. Для этого достаточно рассмотреть некую новую цепь, где все индуктивности представлены источниками тока, а емкости — источниками ЭДС.

Уравнения электрической цепи становятся дифференциальными благодаря тому, что токи в конденсаторах выражаются через производные зарядов, а напряжения индуктивных катушек — через производные потокосцеплений. Если к узлу, для которого записывается уравнение согласно первому закону Кирхгофа, подходит только одна ветвь с конденсатором, то это уравнение будет дифференциальным уравнением первого порядка. Если в контур, для которого записывается уравнение согласно второму закону Кирхгофа, войдет только одна индуктивная катушка, то оно также будет дифференциальным уравнением первого порядка. Такие условия можно обеспечить, если отнести все ветви с конденсаторами к ветвям дерева, а ветви с индуктивными катушками — к связям. Посколь-

ку ветвь дерева определяет сечение в графе схемы, для которого составляется баланс токов согласно первому закону Кирхгофа, то все уравнения сечений, определяемые ветвями дерева с конденсаторами, окажутся дифференциальными уравнениями первого порядка. Если ветвь дерева содержит резистор, то уравнение будет алгебраическим. Поскольку связи определяют контуры, то уравнения для напряжений в контурах согласно второму закону Кирхгофа при наличии в связях индуктивных катушек окажутся дифференциальными уравнениями первого порядка. Если связь содержит резистивный элемент, то уравнение будет алгебраическим. Исключив алгебраические уравнения путем их решения через переменные состояния, можно получить систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных состояния. Обозначим переменные состояния буквами $x_1, x_2,.., x_n$. Тогда транспонированная матрица-столбец переменных состояния будет $\mathbf{X}^t = \|x_1, x_2,.., x_n\|$. В матричной форме система дифференциальных уравнений первого порядка может быть записана в виде

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X} = \mathbf{A}_1\mathbf{X} + \mathbf{B}_1\mathbf{V}.$$

Квадратная матрица $\mathbf{A}_1$ порядка n определяется топологией электрической цепи и параметрами ее элементов. Столбцовая матрица $\mathbf{V}$ порядка $p \times 1$ определяется источниками ЭДС и токов в ветвях схемы, ее впредь будем называть в е к т о р о м в х о д н ы х в е л и ч и н. Прямоугольная матрица $\mathbf{B}_1$ порядка $n \quad p$ определяет вклад входных величин в баланс токов или напряжений.

Токи и напряжения на всех интересующих нас элементах и участках электрической цепи могут быть выражены через переменные состояния. Обозначим систему интересующих нас величин буквой $\mathbf{Y}$ и назовем ее вектором в ы х о д н ы х в е л и ч и н. Связь выходных величин, переменных состояния и входных величин в матричной форме может быть записана в виде

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_2\mathbf{X} + \mathbf{B}_2\mathbf{V}.$$

Формально решение матричного дифференциального уравнения можно записать так:

$$\mathbf{X}(t) = [\exp(\mathbf{A}_1 t)]\mathbf{X}_0 + \int_0^t \{[\exp(\mathbf{A}_1(t-\tau))]\mathbf{B}_1\mathbf{V}(\tau)\}d\tau,$$

где $\exp(\mathbf{A}_1 t) = e^{\mathbf{A}_1 t}$, $\mathbf{X}_0$ — матрица-столбец начальных значений переменных состояния.

Основная трудность этого подхода заключается в определении $\exp(\mathbf{A}_1 t)$. Для вычисления этой величины может быть использована формула Сильвестра, согласно которой

$$e^{\mathbf{A}_1 t} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\prod\limits_{i=1, i\neq r}^{n} (\mathbf{A}_1 - \alpha_i \mathbf{1})}{\prod\limits_{i=1, i\neq r}^{n} (\alpha_r - \alpha_i)} e^{\alpha_r t},$$

где α_i — корни характеристического уравнения $\det(\mathbf{A}_1 - \alpha\mathbf{1}) = 0$, они же — собственные значения матрицы $\mathbf{A}_1$; $\mathbf{1}$ — диагональная единичная матрица порядка n.

Изложенный метод расчета переходных процессов называется методом переменных состояния, а совокупность системы дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных состояния и уравнения для выходных величин — уравнениями состояния.

Заметим, что и в методе переменных состояния необходимо определять корни характеристического уравнения путем вычисления собственных значений матрицы $\mathbf{A}_1$. Вычисление собственных значений матриц также является трудоемкой процедурой и для сложных цепей должно быть выполнено при помощи ЭВМ. Но даже современные ЭВМ не позволяют решать эту задачу для очень сложных цепей, когда n больше нескольких тысяч. Однако важным является то обстоятельство, что относительно переменных состояния можно сформировать систему дифференциальных уравнений первого порядка и для численного решения такой системы непосредственно использовать стандартное математическое обеспечение цифровых вычислительных машин.

Итак, метод переменных состояния для определенного круга задач позволяет решить систему уравнений в более компактной и общей форме, формализуя весь процесс решения таким образом. что оказывается возможным получить это решение при помощи ЭВМ.

9.4. Определение постоянных интегрирования из начальных условий

Будем называть коммутацией любое изменение в цепи, приводящее к возникновению переходного процесса или изменению режима ее работы; причем будем предполагать, что это изменение происходит мгновенно, т. е. совершается за интервал времени $\Delta t \quad 0$. Это может быть включение цепи под действие источника ЭДС или отключение цепи от источника, замыкание цепи накоротко, скачкообразное изменение параметра цепи, изменение скачком амплитуды, частоты или фазы приложенного к цепи напряжения и т. д. Реальный процесс коммутации всегда длится конечное, хотя и весьма малое время Δt, в течение которого происходит изменение сопротивления выключателя от бесконечности до нуля при включении цепи и от нуля до бесконечности при отключении цепи или происходит изменение параметра цепи, амплитуды напряжения и т. д. Однако, не интересуясь процессом в течение этого времени Δt, а рассматривая лишь процесс после того, как коммутация закончена, т. е. абстрагируясь от действительной картины явления, будем полагать $\Delta t \quad 0$. Условимся далее начало отсчета времени $t = 0$ совмещать с моментом коммутации и обозначать через $t \quad -0$ момент времени, непосредственно прилегающий к моменту коммутации, до коммутации, и через $t \quad +0$ момент времени, также непосредственно прилегающий к моменту коммутации, но после коммутации.

В любой электрической цепи, в которой не могут развиваться бесконечно большие напряжения или протекать бесконечно большие токи, мгновенная мощность p — величина всегда конечная, и поэтому в таких цепях не может быть мгно-

венного изменения накопленной в электрических и магнитных полях энергии. Если изменение энергии во время коммутации за время $\Delta t \quad 0$ обозначим $\Delta W \quad W(+0) - W(-0)$, то получим $\Delta W \quad p\Delta t \quad 0$ и, следовательно, $W(+0) = W(-0)$.

Так как энергия электрического поля конденсатора и энергия магнитного поля индуктивной катушки равны

$$W_э = Cu_C^2/2 \quad \text{и} \quad W_м = Li_L^2/2,$$

то равенство $\Delta W = 0$ означает, что в момент коммутации имеются условия

$$u_C(+0) = u_C(-0) \quad \text{и} \quad i_L(+0) = i_L(-0),$$

т. е. *в момент коммутации остаются неизменными напряжения на обкладках конденсаторов и токи в индуктивных катушках.*

Так как в реальных физических цепях каждый элемент обладает и индуктивностью, и емкостью, то в них не могут скачком изменяться ни токи, ни напряжения. Однако если, абстрагируясь от действительности, пренебречь распределенной емкостью катушки, то получим, что напряжение на катушке может изменяться скачком. Точно так же, если полностью пренебречь индуктивностью конденсатора, то в нем ток может изменяться скачком.

Наконец, если в результате идеализации процессов теоретически окажется возможным появление длящихся бесконечно малое время бесконечно больших напряжений на последовательно включенных отдельных индуктивных участках цепи, хотя суммарное напряжение и остается конечным, или окажется возможным появление длящихся бесконечно малое время бесконечно больших токов в отдельных емкостных параллельно включенных ветвях цепи, хотя суммарный ток во всех ветвях и остается конечным, то условие $\Delta W = 0$, вообще говоря, не будет иметь места, так как при этом величина $p\,\Delta t = \infty \cdot 0$ становится неопределенной. Эти особые случаи рассмотрим в § 9.11.

Если до коммутации к моменту $t = -0$ существовали токи в катушках и напряжения на конденсаторах, определяемые процессом, происходившим до коммутации, то говорят, что имеют место н е н у л е в ы е н а ч а л ь н ы е у с л о в и я. В случае же, когда токи в катушках и напряжения на конденсаторах до коммутации были равны нулю, принято говорить, что имеют место н у л е в ы е н а ч а л ь н ы е у с л о в и я.

Рассмотренные выше начальные условия

$$u_C(+0) = u_C(-0) \quad \text{и} \quad i_L(+0) = i_L(-0)$$

и служат для определения произвольных постоянных интегрирования A_{ks}. С этой целью находим начальные значения тока i_k и всех его производных до $(n-1)$-й включительно, используя уравнения цепи и подставляя в них заданные начальные значения напряжений на конденсаторах и токов в катушках.

Имея решения для тока i_k в форме

$$i_k = i'_k + \sum_{s=1}^{n} A_{ks} e^{\alpha_s t}$$

и для его производных в виде

$$\frac{d^m i_k}{dt^m} = \frac{d^m i'_k}{dt^m} + \sum_{s=1}^{n} \alpha_s^m A_{ks} e^{\alpha_s t},$$

где $m = 1, 2, ..., (n - 1)$, и подставляя слева от знака равенства найденные начальные значения тока i_k и его производных при $t = +0$, а в выражениях справа от знака равенства полагая $t = 0$, получим n алгебраических уравнений с n неизвестными величинами A_{ks}, из которых и находим последние.

Следует отметить, что для сложной электрической цепи определение всех постоянных A_{ks} вышеуказанным путем получается весьма трудоемким. Существуют другие последовательности определения величин A_{ks} через заданные начальные значения токов в катушках и напряжений на конденсаторах, также трудоемкие для сложных электрических цепей.

Заметим, что энергетическое состояние цепи в начальный момент определяется значениями в этот момент токов i_L *во всех* катушках и напряжений u_C *во всех* конденсаторах. Для определения же постоянных A_{ks} требуется задать начальные значения n из этих величин, причем число n может быть меньше числа и всех катушек, и всех конденсаторов. Действительно, если несколько катушек включены в одну и ту же ветвь, то достаточно знать начальное значение тока в одной из них, так как ток в других тот же самый. Если несколько конденсаторов соединены параллельно, то достаточно знать начальное значение напряжения на одном из них, так как напряжение на других то же самое. Если к одному узлу подходят три ветви, содержащие индуктивные катушки (рис. 9.1), то достаточно задать начальные значения тока только в двух из них, так как третий ток при этом также оказывается заданным соответственно первому закону Кирхгофа. Если три конденсатора включены в один контур согласно рис. 9.2, то достаточно задать начальные значения напряжения только на двух из них, так как напряжение на третьем также получается заданным в соответствии со вторым законом Кирхгофа.

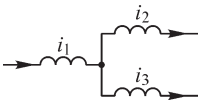


Рис. 9.1

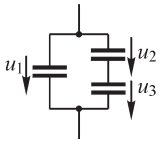


Рис. 9.2

Вычисленные до коммутации значения переменных

$$\mathbf{X}^t(-0) = \left\| u_{C_1}(-0), u_{C_2}(-0), \ldots, i_{L_6}(-0), i_{L_8}(-0), \ldots \right\|$$

являются начальными значениями

$$\mathbf{X}^t(+0) = \left\| u_{C_1}(+0), u_{C_2}(+0), \ldots, i_{L_6}(+0), i_{L_8}(+0), \ldots \right\|$$

для системы дифференциальных уравнений электрической цепи. Из условий, что $i_L(+0) = i_L(-0)$ и $u_C(+0) = u_C(-0)$ вытекает, что $\mathbf{X}(+0) = \mathbf{X}(-0)$. Следовательно, в методе переменных состояния отпадает необходимость производить промежуточные вычисления для определения начальных значений функции и ее $n - 1$ производных.

9.5. Переходные процессы в цепи с последовательно соединенными участками *r* и *L*.

Исследуем переходные процессы в простой цепи, схема которой содержит последовательно соединенные участки с сопротивлением r и индуктивностью L.

В частности, это может быть эквивалентная схема индуктивной катушки, обладающей активным сопротивлением r и индуктивностью L, при условии пренебрежения емкостью между витками катушки. Последнее означает, что мы пренебрегаем энергией электрического поля цепи и учитываем только энергию магнитного поля.

Дифференциальное уравнение рассматриваемой цепи имеет вид

$$L\frac{di}{dt} + ri = u,$$

где $u = u(t)$ — напряжение на зажимах цепи. Соответствующее однородное уравнение, определяющее свободный ток i , будет

$$L\frac{di''}{dt} + ri'' = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$L\alpha + r = 0$$

имеет единственный корень $\alpha = -r/L$. Поэтому

$$i'' = Ae^{\alpha t} = Ae^{-\frac{r}{L}t}.$$

Выражение установившегося тока $i\,(t)$, являющееся частным решением неоднородного уравнения, определяется видом заданной функции $u(t)$.

Ток в переходном процессе

$$i = i' + i'' = i' + Ae^{-\frac{r}{L}t}.$$

Постоянная интегрирования A определяется по начальному значению тока i. Рассмотрим ряд частных случаев.

1. Пусть цепь в момент $t = 0$ замыкается накоротко (рис. 9.3). После замыкания накоротко имеем $u = 0$. Установившийся ток i' при этом также будет равен нулю ($i = 0$) и, следовательно,

$$i = i'' = Ae^{-\frac{r}{L}t}.$$

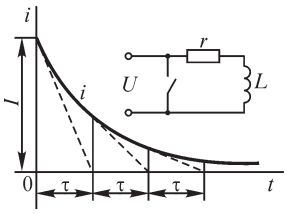


Рис. 9.3

Произвольная постоянная A определяется из начального условия для тока в катушке $i(+0) = i(-0)$.

Положим, что к моменту коммутации до короткого замыкания ток в цепи был равен $i(-0) = I$. Следовательно, $i(+0) = I$. Полагая в последнем уравнении i I и t 0, находим

$$I = A.$$

Таким образом,

$$i = Ie^{-\frac{r}{L}t} = Ie^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Величина $\tau = L/r$ имеет размерность времени и называется п о с т о я н н о й в р е м е н и ц е п и. За промежуток времени τ ток убывает в e раз. Чем больше τ, тем медленнее затухает ток.

Из полученного решения вытекает, что ток станет равным нулю теоретически через бесконечный промежуток времени. Практически ток становится весьма малым по сравнению с начальным током обычно спустя малый промежуток времени, равный нескольким значениям τ. Кроме того, следует заметить, что данное решение описывает ток в цепи только до тех пор, пока определяемое из него значение тока не становится сравнимым с весьма малыми флюктуационными токами, определяемыми тепловыми процессами и носящими случайный характер (см. § 12.4). Это замечание относится и ко всем последующим случаям.

Постоянная времени τ равна длине подкасательной в любой точке кривой $i(t)$ (рис. 9.3), так как $di/dt \quad -i/\tau$.

Энергия, выделяемая в виде теплоты в сопротивлении цепи, равна энергии, запасенной в магнитном поле цепи в начальный момент времени. Действительно,

$$\int_0^\infty i^2 r\,dt = I^2 r \int_0^\infty e^{-\frac{2r}{L}t}\,dt = \frac{1}{2} L I^2 .$$

Постоянная времени индуктивных катушек зависит от их размеров. Для геометрически подобных катушек она изменяется пропорционально квадрату их линейных размеров l. Действительно, индуктивность L геометрически подобных катушек увеличивается пропорционально квадрату чисел их витков w и их линейным размерам l, т. е. $L \quad k_1 w^2 l$. Последнее вытекает из размерности индуктивности: $[L] = [\mu]\cdot[l]$. Так как в настоящей главе рассматриваем только цепи с постоянными параметрами, то сердечник должен быть из неферромагнитного материала, т. е. должно быть $\mu \approx \mu_0$.

Сопротивление r геометрически подобных катушек увеличивается пропорционально квадрату чисел их витков и уменьшается обратно пропорционально линейным размерам l катушек. Действительно, длина проволоки таких катушек увеличивается пропорционально их числам витков w и линейным размерам l, сечение же проволоки убывает обратно пропорционально w и возрастает пропорционально l^2. Поэтому

$$r = k_2 \frac{wl}{l^2/w} = k_2 \frac{w^2}{l} .$$

Таким образом, для постоянной времени получаем

$$\tau = \frac{L}{r} = \frac{k_1}{k_2} l^2 .$$

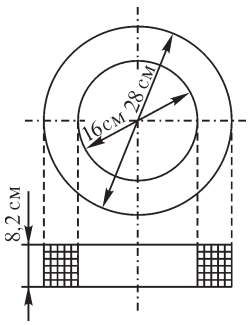


Рис. 9.4

Интересно отметить, что величина τ для геометрически подобных катушек не зависит от числа витков w, если при изменении w коэффициент заполнения сечения обмотки медью не изменяется, т. е. не изменяется соотношение частей сечения обмотки, занятых медью проволоки и изоляцией.

Для оценки порядка величины τ укажем, что круглая катушка из медной проволоки без сердечника с размерами, указанными на рис. 9.4, и массой 17 кг имеет

$L = 0{,}218$ Гн, $r = 4{,}4$ Ом и $\tau = 0{,}0495$ с. Подобные ей катушки меньших размеров будут иметь меньшее значение τ, катушки же бóльших размеров — большее значение τ, причем τ будет изменяться пропорционально квадрату линейных размеров, например квадрату диаметра D катушки.

Внесение сердечника из ферромагнитного материала значительно увеличивает постоянную времени катушки, так как увеличивается L вследствие увеличения μ. Однако при этом цепь становится нелинейной и зависимость тока от времени, строго говоря, будет отличаться от только что полученной, так что понятие о постоянной времени становится условным. Если в магнитной цепи сердечника из ферромагнитного материала имеется достаточный воздушный зазор, то практически L мало зависит от тока i и полученные в настоящем параграфе соотношения остаются справедливыми с большой точностью для таких катушек. При этом постоянная времени τ при той же затрате меди, как, например, в приведенном конкретном случае, может быть увеличена по сравнению со значением катушки без сердечника в несколько десятков раз.

Из сказанного видно, что постоянные времени больших катушек, магнитные цепи которых содержат участки из ферромагнитных материалов, могут быть весьма значительны. Например, постоянная времени обмотки возбуждения крупных гидрогенераторов может иметь значение $\tau \approx 5$ с.

Полученная выше зависимость постоянной времени τ от линейных размеров l геометрически подобных катушек значительно затрудняет моделирование переходных процессов, происходящих в мощных больших устройствах, с помощью малых лабораторных моделей, если при этом не изменять масштаб времени.

2. В качестве другого примера рассмотрим процесс отключения от источника постоянного напряжения цепи, состоящей из индуктивной катушки с индуктивностью L и сопротивлением r и параллельно с ней соединенной ветви с сопротивлением r_0 (рис. 9.5). Переходный процесс при этом описывается уравнением

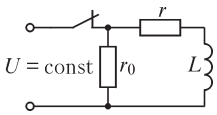


Рис. 9.5

$$i = i'' = Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \text{где} \quad \tau = \frac{L}{r + r_0}.$$

До размыкания рубильника в катушке протекает ток $i_L(-0) = U/r$. Следовательно,

$$A = i_L(+0) = i_L(-0) = U/r.$$

Таким образом,

$$i = \frac{U}{r} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

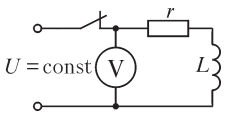


Рис. 9.6

Напряжение на участке с сопротивлением r_0 до размыкания было равно U, а в первый момент после размыкания оно окажется равным

$$r_0 i(+0) = U\frac{r_0}{r}.$$

Если $r_0 \gg r$, например, на зажимах катушки с малым сопротивлением r включен вольтметр с большим сопротивлением r_0 (рис. 9.6), то при отключении цепи напряжение на вольтметре в первый момент повысится в r_0/r раз.

Если энергия магнитного поля, запасенная в катушке, достаточно велика, то вольтметр может быть сожжен. Во избежание возникновения больших перенапряжений при отключении цепей постоянного тока, обладающих большой индуктивностью, например, обмоток возбуждения генераторов постоянного тока, эти цепи предварительно замыкают на малое сопротивление.

3. В качестве еще одного примера определим процесс при включении рассматриваемой цепи под постоянное напряжение $u = U = \text{const}$ (рис. 9.7). Ток установившегося режима в данном случае равен $i' = U/r$. Следовательно,

$$i = i' + i'' = \frac{U}{r} + Ae^{-\frac{r}{L}t}.$$

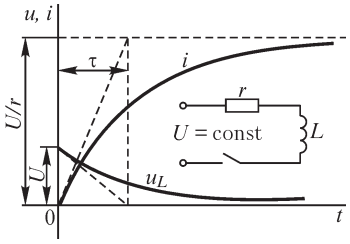


Рис. 9.7

Если до включения ток i был равен нулю $[i(-0) = 0]$, то

$$i(+0) = i(-0) = U/r + A = 0 \quad \text{и} \quad A = -U/r.$$

Таким образом,

$$i = \frac{U}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right) = \frac{U}{r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Напряжение на зажимах катушки при этом

$$u_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{U}{r}\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = Ue^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Зависимости $i(t)$ и $u_L(t)$ изображены на рис. 9.7.

4. Наконец, рассмотрим процесс при включении цепи под синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$. Ток установившегося режима при этом будет равен (см. § 4.4)

$$i' = \frac{U_m}{z}\sin(\omega t + \psi - \varphi) = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

и, следовательно,

$$i = i' + i'' = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Здесь $z = \sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}$; $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\omega L}{r}$ и $\tau = L/r$. Постоянная A определяется из начального условия, что ток до включения был равен нулю: $i(-0) = 0$. Тогда

$$i(+0) = i(-0) = 0 = I_m \sin(\psi - \varphi) + A.$$

Таким образом,

$$i = i' + i'' = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) - I_m \sin(\psi - \varphi)e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

На рис. 9.8 приведены кривые $u(t)$, $i\ \ t)$, $i\ \ t)$, и $i(t)$. При $t = 0$ начальное значение свободного тока i'' равно и противоположно току i' и $i = 0$. Начальное значение свободного тока зависит от начальной фазы ψ напряжения. Наибольшее начальное значение свободного тока, равное амплитуде I_m установившегося тока, имеет место, если $\psi - \varphi = \pm\pi/2$. Наибольшее значение результирующего тока, как видно из рис. 9.8, не превышает двойной амплитуды установившегося тока. Свободный ток вообще не возникает, и сразу наступает установившийся режим при условии $\psi = \varphi$.

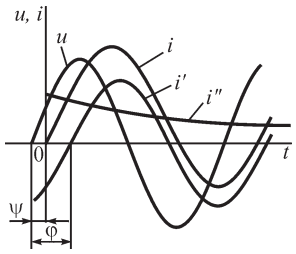


Рис. 9.8

Применительно к рассматриваемой задаче уравнение состояния должно быть составлено для единственной переменной состояния — тока в индуктивной катушке. Значение напряжения на резисторе, выраженное через переменную состояния i, равно ri. Из второго закона Кирхгофа имеем

$$\frac{di}{dt} = -\frac{r}{L}i + \frac{U_m}{L}\sin(\omega t + \psi).$$

При $i(+0) = I$ общее решение этого уравнения будет иметь вид

$$i = e^{-\frac{r}{L}t} I + \frac{U_m}{L}\int_0^t e^{-\frac{r}{L}(t-\tau)} \sin(\omega\tau + \psi)d\tau.$$

Произведя довольно простые, но многочисленные операции по интегрированию, подстановке пределов и ряд преобразований, получим

$$i = Ie^{-\frac{r}{L}t} + \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}}\sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}}\sin(\psi - \varphi)e^{-\frac{r}{L}t}; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{r}.$$

Это выражение при $I = 0$ совпадает с полученным ранее классическим методом уравнением для тока i. Приведенный пример использования общего решения для метода уравнений состояния показывает, что непосредственное применение его сопряжено с выполнением большого числа аналитических операций по вычислению интеграла. В этом отношении классический метод, во всяком случае для таких простых случаев, более продуктивен.

9.6. Переходные процессы в цепи с последовательно соединенными участками *r* и *C*

Рассмотрим переходные процессы в цепи, состоящей из последовательно включенных участка с сопротивлением r и конденсатора емкостью C. Обозначив напряжение на зажимах цепи через u, а напряжение на обкладках конденсатора и значение его заряда соответственно через u_C и q, имеем

$$ri + u_C = u.$$

Так как

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_C)}{dt} = C\frac{du_C}{dt},$$

то

$$rC\frac{du_C}{dt}+u_C=u.$$

Соответствующее однородное уравнение, определяющее свободное напряжение u''_C, будет

$$rC\frac{du''_C}{dt}+u''_C=0.$$

Его характеристическое уравнение

$$rC\alpha+1=0$$

имеет единственный корень $\alpha=-1/(rC)$. Поэтому

$$u''_C=Ae^{\alpha t}=Ae^{-\frac{t}{rC}}=Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

где rC τ — постоянная времени рассматриваемой цепи.

Для переходного процесса получим

$$u_C=u'_C+u''_C=u'_C+Ae^{-\frac{t}{rC}},$$

причем установившееся напряжение u'_C может быть найдено, если известен вид функции $u(t)$, а постоянная интегрирования A определяется по начальным условиям.

Рассмотрим ряд частных случаев.

1. Пусть цепь (r, C) замыкается накоротко, что соответствует равенству нулю напряжения u (рис. 9.9). Для установившегося напряжения u'_C на зажимах конденсатора имеем $u'_C=0$ и, следовательно,

$$u_C=u''_C=Ae^{-\frac{t}{rC}}.$$

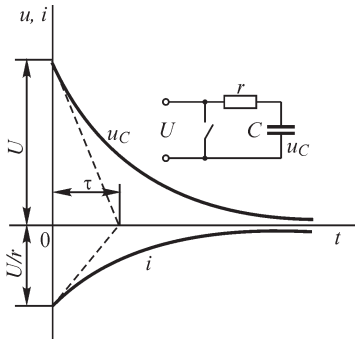


Рис. 9.9

Положим, что к моменту коммутации, до короткого замыкания, напряжение на зажимах конденсатора было равно $u_C=(-0)=U_0$. Следовательно, из условия $u_C(+0)=u_C(-0)$, полагая в последнем уравнении $u_C=U_0$ и t 0, находим U_0 A.

Таким образом, $u_C=U_0e^{-\frac{t}{rC}}$.

Для тока в цепи получим

$$i=C\frac{du_C}{dt}=-\frac{U_0}{r}e^{-\frac{t}{rC}}.$$

Согласно этому решению, ток в начальный момент меняется скачком от нуля до U_0/r. Это является результатом того, что мы полностью пренебрегли индуктивностью цепи.

Энергия, выделяемая в виде теплоты в сопротивлении цепи, равна энергии, запасенной в электрическом поле конденсатора в начальный момент времени. Действительно,

$$\int_0^\infty i^2 r\,dt = \frac{U_0^2}{r}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{rC}}dt = \frac{1}{2}CU_0^2.$$

Постоянная времени $\tau = rC$ в реальных устройствах может иметь самые различные значения. Например, если конденсатор с емкостью $C = 100$ мкФ разряжается через сопротивление $r = 100$ Ом, то постоянная времени $\tau = 100\cdot10^{-6}\cdot100 = 0{,}01$ с. Если тот же конденсатор оставить заряженным и отключенным от остальной цепи, то он будет медленно разряжаться через свое сопротивление утечки. Пусть это сопротивление r 10^9 Ом. Тогда $\tau = 100\cdot10^{-6}\cdot10^9 = 10^5$ с = 27,8 ч, т. е. конденсатор с такой хорошей изоляцией сохранит через сутки примерно одну треть своего начального заряда.

2. В качестве другого примера исследуем процесс при включении рассматриваемой цепи под постоянное напряжение $u = U = \text{const}$ (рис. 9.10). Пусть конденсатор до включения не был заряжен, т. е. $u_C(-0) = 0$.

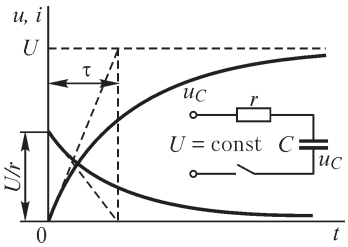


Рис. 9.10

Установившееся напряжение на зажимах конденсатора после завершения переходного процесса будет $u'_C = U$. Таким образом,

$$u_C = u'_C + u''_C = U + Ae^{-\frac{t}{rC}}.$$

Постоянную интегрирования A определим из условия $u_C(+0) = u_C(-0) = 0$ и, полагая в последнем уравнении $t = 0$, получим

$$0 = U + A \quad \text{или} \quad A = -U.$$

Следовательно,

$$u_C = U - Ue^{-\frac{t}{rC}} = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Для тока в цепи имеем

$$i = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U}{r}e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Из выражения для u_C видно, что напряжение на зажимах конденсатора и заряд его нарастают по тому же закону, что и ток в цепи (r, L) при включении ее под постоянное напряжение. Что же касается тока i (рис. 9.10), то при включении цепи он сразу получает значение U/r, так как в момент $t = 0$ напряжение на зажимах конденсатора равно нулю и ток в цепи определяется лишь напряжением U и сопротивлением r цепи. В дальнейшем напряжение на зажимах конденсатора постепенно возрастает и ток в цепи убывает по тому же показательному закону, что и при разряде конденсатора.

Определяя количество теплоты, выделившейся в цепи во время заряда конденсатора, получим то же значение $\frac{1}{2}CU^2$, что и при разряде конденсатора, и мо-

жем поэтому сказать, что при $u = U$ const количество энергии, превращаемой в теплоту при заряде конденсатора через сопротивление, равно энергии, запасаемой в электрическом поле конденсатора. Следовательно, работа источника внешней ЭДС в рассматриваемом случае равна CU^2, т. е. удвоенному значению энергии, запасаемой в электрическом поле конденсатора. Однако такое соотношение имеет место только при включении цепи (r, C) под постоянное напряжение $u = U$ const. Если напряжение u на зажимах цепи увеличивать медленно, то соотношение между количеством энергии, превращаемой в теплоту, и энергией, запасаемой в конденсаторе, будет более выгодным. Это важное положение покажем на примере в § 12.3. Естественно, что при этом характер изменения тока и напряжения на конденсаторе будет определяться характером нарастания напряжения на зажимах цепи и будет отличаться от только что рассмотренного при U = const.

Если конденсатор до включения был заряжен, т. е. на его обкладках было напряжение $u_C(-0)$ $u_C(0)$, то постоянная интегрирования A определится из условия

$$u_C(+0) \quad u_C(-0) = u_C(0) \quad U + A \text{ или } A = [u_C(0) - U].$$

В случае $u_C(0) > 0$ (рис. 9.11) конденсатор дозаряжается до напряжения U, а в случае $u_C(0) < 0$ — перезаряжается от начального отрицательного напряжения до приложенного напряжения (рис. 9.12).

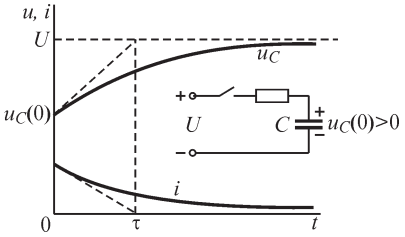


Рис. 9.11

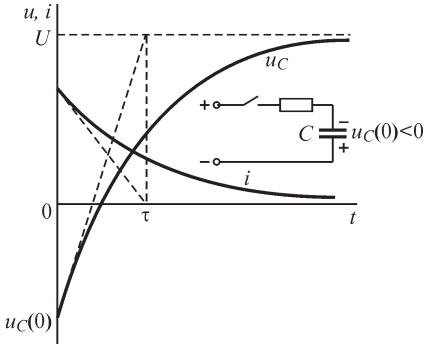


Рис. 9.12

3. Рассмотрим еще процесс включения цепи (r, C) под синусоидальное напряжение u $U_m \sin(\omega t + \psi)$. Напряжение u_C на зажимах конденсатора в установившемся режиме при этом будет равно (см. § 4.4)

$$u'_C = \frac{I_m}{\omega C}\sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, для переходного процесса имеем

$$u_C = \frac{I_m}{\omega C}\sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Здесь

$$I_m = \frac{U_m}{z}; \quad z = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{-1}{r\omega C} \quad \text{и} \quad \tau = rC.$$

Постоянная A определяется из начального условия, согласно которому должно быть задано напряжение на зажимах конденсатора $u_C(-0)$ до включения цепи. Если конденсатор не был заряжен, то $u_C(-0) = 0$ и, следовательно,

$$u_C(+0) = u_C(-0) = 0 = \frac{I_m}{\omega C}\sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + A,$$

откуда

$$A = -\frac{I_m}{\omega C}\sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом,

$$u_C = \frac{I_m}{\omega C}\sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{I_m}{\omega C}\sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Для тока в переходном процессе в этом случае получим

$$i = C\frac{du_C}{dt} = i' + i'' = I_m \sin\left(\omega t + \psi - \varphi\right) + \frac{I_m}{r\omega C}\sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Если конденсатор был предварительно заряжен, то $u_C(-0) = u_C(+0)$ и, следовательно,

$$u_C(+0) = u_C(-0) = u_C(0) = \frac{I_m}{\omega C}\sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + A,$$

откуда и определится постоянная A.

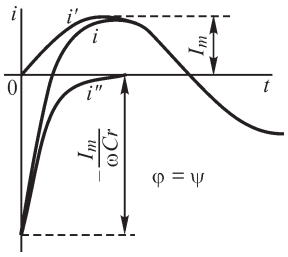


Рис. 9.13

Из полученных выражений видно, что переходный процесс зависит от величины ψ.

Если $\psi = \varphi \pm \pi/2$, то переходный процесс не возникает и сразу же наступает установившийся режим. При $\psi = \varphi \pm \pi/2$ установившееся напряжение на конденсаторе в момент $t \quad 0$ равно нулю. Таким образом, имеется полное соответствие между запасом энергии в конденсаторе до включения (в данном случае нуль) и запасом энергии, который должен быть в установившемся режиме (в данном случае также нуль). Поэтому переходный процесс и не возникает.

Если включение происходит при $\psi = \varphi$, то свободное напряжение u_C'' будет наибольшим и в начальный момент имеет значение $I_m/(\omega C)$. Начальное значение свободного тока при этом будет $-I_m/(\omega Cr)$. Если $\omega rC \ll 1$, т. е. $r \ll 1/(\omega C)$, то в начальный момент происходит большой всплеск тока, намного превосходящий амплитуду I_m (рис. 9.13). Однако такой большой ток протекает незначительную часть периода, так как $\omega Cr \quad \frac{2\pi}{T}\tau \ll 1$, и, следовательно, $\tau \ll T$.

Максимальное значение напряжения u_C в переходном процессе не превышает удвоенной амплитуды $U_{Cm} = I_m/(\omega C)$ напряжения на конденсаторе при установившемся режиме.

Применительно к данной задаче уравнение состояния должно быть составлено для единственной переменной состояния — напряжения конденсатора. Значение тока в резисторе равно $(u - u_C)/r$. Из первого закона Кирхгофа имеем

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{rC}u_C + \frac{1}{rC}U_m \sin(\omega t + \psi).$$

При $u_C(+0) = U_0$ общее решение этого уравнения будет иметь вид

$$u_C = e^{-\frac{t}{rC}}U_0 + \frac{U_m}{rC}\int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{rC}} \sin(\omega t + \psi)\, d\tau = U_0 e^{-\frac{t}{rC}} +$$

$$+\frac{U_m}{\sqrt{1+(r\omega C)^2}}\left[-\sin\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{t}{rC}} + \sin\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

9.7. Переходные процессы в цепи с последовательно соединенными участками *r*, *L* и *C*

Рассмотрим переходные процессы в цепи, содержащей последовательно включенные участок с сопротивлением *r*, катушку с индуктивностью *L* и конденсатор с емкостью *C* (рис. 9.14).

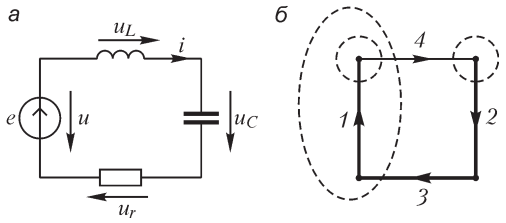


Рис. 9.14

Уравнение этой цепи имеет вид

$$ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + u_C(0) = u(t). \qquad (*)$$

Дифференцируя обе части выражения (*), получим уравнение второго порядка для тока *i* в цепи:

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + r\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{du}{dt}.$$

Соответствующее однородное уравнение, определяющее свободный ток i'', после деления на *L* будет

$$\frac{d^2 i''}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{di''}{dt} + \frac{i''}{LC} = 0,$$

или, обозначив $r/L = 2\delta$ и $1/(LC) = \omega_0^2$, получим

$$\frac{d^2 i''}{dt^2} + 2\delta\frac{di''}{dt} + \omega_0^2 i'' = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0$$

имеет два корня:

$$\alpha_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}; \quad \alpha_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

или

$$\alpha_1 = -\frac{r}{2L} + \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = -\frac{r}{2L} - \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Таким образом,

$$i'' = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}.$$

Для тока переходного процесса, следовательно, имеем

$$i = i' + i'' = i' + A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}. \qquad (**)$$

Ток установившегося режима i' можно найти, если известен вид функции $u(t)$.

Произвольные постоянные интегрирования A_1 и A_2 определяем из начальных физических условий неизменности тока в катушке и напряжения на зажимах конденсатора в момент коммутации: $i(+0) = i(-0)$, $u_C(+0) = u_C(-0)$. Для краткости в выражениях $i\ (+0)$ и $u_C(+0)$ будем опускать знак «плюс», т. е. начальные значения переходных тока в цепи и напряжения на конденсаторе будем обозначать $i(0)$ и $u_C(0)$.

Как было сказано в § 9.4, для определения постоянных A_1 и A_2 надо знать значение тока и всех его производных до $(n - 1)$-й включительно в начальный момент времени. Так как в данном случае имеем уравнение второго порядка ($n = 2$), то необходимо знать начальное значение тока и его первой производной. Начальное значение тока в данном случае задано. Начальное значение первой производной тока находим из уравнения цепи, используя упомянутые выше физические начальные условия, а именно при $t \quad 0$ из уравнения (*) имеем

$$ri(0) + L\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} + u_C(0) = u(0),$$

где $u(0)$ — значение приложенного напряжения $u(t)$ при $t = 0$. Отсюда

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = \frac{u(0) - u_C(0) - ri(0)}{L}.$$

Из уравнения (**) для производной тока имеем

$$\frac{di}{dt} = \frac{di'}{dt} + A_1\alpha_1 e^{\alpha_1 t} + A_2\alpha_2 e^{\alpha_2 t}.$$

Подставляя в уравнение (**) для тока и в полученное выражение для его производной слева от знака равенства найденные начальные значения тока и его производной, а справа — t 0, получим

$$\left.\begin{aligned} i(0) &= i'(0) + A_1 + A_2; \\ \frac{u(0) - u_C(0) - ri(0)}{L} &= \left(\frac{di'}{dt}\right)_{t=0} + A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2, \end{aligned}\right\} \qquad (***)$$

где i (0) и $\left(\frac{di'}{dt}\right)_{t=0}$ — значения тока установившегося режима и его производной в начальный момент времени, известные из найденного ранее частного решения исходного дифференциального уравнения (*).

Из уравнений (***) определяем постоянные A_1 и A_2.

Уравнения состояния должны быть составлены относительно двух переменных состояния i_L i и u_C. В этой цепи ток и напряжение на резистивном элементе непосредственно определяются через одну из переменных состояния — ток в индуктивной катушке i_L i. Имеем i_r i_L i и u_r $i_r r$ ri. В графе электрической схемы (см. рис. 9.14, *а*) каждый элемент представим в виде ветви. Отнесем ветвь с катушкой индуктивности к связям, а остальные ветви — к ветвям дерева (см. рис. 9.14, *б*). Из уравнений для сечения *2* и из единственного уравнения для контура, образованного связью *4,* вытекает

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{i}{C}; \quad \frac{di}{dt} = -\frac{u_C}{L} - \frac{ir}{L} + \frac{e}{L}.$$

Можно представить эти уравнения в матричной форме:

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix} u_C \\ i \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{r}{L} \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} u_C \\ i \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

В соответствии с обозначениями, введенными в § 9.2, имеем

$$\mathbf{X} = \begin{Vmatrix} u_C \\ i \end{Vmatrix}; \quad \mathbf{A}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{r}{L} \end{Vmatrix}; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}; \quad \mathbf{V} = \begin{Vmatrix} e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Заметим, что матрица $\mathbf{B}_1$ имеет столько столбцов, сколько ветвей имеется в графе схемы, и столько строк, сколько переменных состояния. Нумерация ветвей графа схемы подчинена такой последовательности. Сначала к ветвям дерева отнесена ветвь с ЭДС, затем ветвь, содержащая конденсатор, и дерево дополнено ветвью, содержащей резистор. Ветвь, содержащая индуктивную катушку, отнесена к связи графа схемы.

Общее решение этой системы уравнений согласно формулам, приведенным в § 9.2, будет

$$\begin{Vmatrix} u_C \\ i \end{Vmatrix} = \left\{ \frac{\begin{Vmatrix} -\alpha_2 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{r}{L}-\alpha_2 \end{Vmatrix}}{\alpha_1-\alpha_2} e^{\alpha_1 t} + \frac{\begin{Vmatrix} -\alpha_1 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{r}{L}-\alpha_1 \end{Vmatrix}}{\alpha_2-\alpha_1} e^{\alpha_2 t} \right\} \begin{Vmatrix} u_C(0) \\ i(0) \end{Vmatrix} +$$

$$+\int_0^t \left\{ \frac{\begin{Vmatrix} -\alpha_2 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{r}{L}-\alpha_2 \end{Vmatrix}}{\alpha_1-\alpha_2} e^{\alpha_1(t-\tau)} + \frac{\begin{Vmatrix} -\alpha_1 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{r}{L}-\alpha_1 \end{Vmatrix}}{\alpha_2-\alpha_1} e^{\alpha_2(t-\tau)} \right\} \begin{Vmatrix} 0 \\ \frac{e(\tau)}{L} \end{Vmatrix} d\tau.$$

Несмотря на громоздкость подынтегрального выражения, интегрировать следует функции вида $\int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} e(\tau) d\tau$.

Если $e(\tau) = 0$, $i(0) = 0$ и $u_C(0) = U_0$, то имеем

$$\begin{Vmatrix} u_C \\ i \end{Vmatrix} = \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2} \left\{ \begin{Vmatrix} -\alpha_2 & \frac{1}{C} \\ -\frac{r}{L} & -\frac{r}{L}-\alpha_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} U_0 \\ 0 \end{Vmatrix} e^{\alpha_1 t} - \begin{Vmatrix} -\alpha_1 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{r}{L}-\alpha_1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} U_0 \\ 0 \end{Vmatrix} e^{\alpha_2 t} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_1-\alpha_2} \left\{ \begin{Vmatrix} -\alpha_2 U_0 \\ -\frac{1}{L} U_0 \end{Vmatrix} e^{\alpha_1 t} - \begin{Vmatrix} -\alpha_1 U_0 \\ -\frac{1}{L} U_0 \end{Vmatrix} e^{\alpha_2 t} \right\} = \frac{U_0}{\alpha_1-\alpha_2} \begin{Vmatrix} -\alpha_2 e^{\alpha_1 t} + \alpha_1 e^{\alpha_2 t} \\ -\frac{1}{L} e^{\alpha_1 t} + \frac{1}{L} e^{\alpha_2 t} \end{Vmatrix}.$$

Здесь α_1 и α_2 — корни уравнения

$$\det(\mathbf{A}_1 - \alpha \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} -\alpha & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{r}{L}-\alpha \end{vmatrix} = \alpha\left(\frac{r}{L}+\alpha\right) + \frac{1}{LC} = 0.$$

9.8. Разряд конденсатора на цепь *r, L*

Рассмотрим важный случай разряда конденсатора с емкостью C на цепь, обладающую активным сопротивлением r и индуктивностью L. В данном случае при-

ложенное напряжение, а также ток установившегося режима равны нулю, т. е. $u(t) = 0$ и $i(t) = 0$.

Для определения произвольных постоянных в уравнениях (***) предыдущего параграфа мы должны принять $i(0) = 0$, $i'(0) = 0$, $u(0) \quad 0, \left(\frac{di'}{dt}\right)_{t=0} = 0$. Обозначая $u_C(0) = U_0$, получим

$$0 = A_1 + A_2; \quad -U_0/L = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2,$$

откуда

$$A_1 = -A_2 = A = -\frac{U_0}{L(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Окончательно для тока i имеем

$$i = -\frac{U_0}{L(\alpha_1 - \alpha_2)}(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t})$$

и, соответственно, для напряжений на катушке и на конденсаторе

$$u_L = L\frac{di}{dt} = -\frac{U_0}{\alpha_1 - \alpha_2}(\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t});$$

$$u_C = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + U_0 = -\frac{U_0}{\alpha_1 - \alpha_2}(\alpha_2 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t}).$$

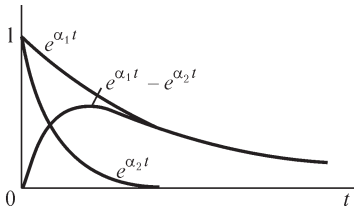


Рис. 9.15

При выводе последнего выражения для u_C следует принять во внимание, что $\alpha_1\alpha_2 = \omega_0^2 = 1/(LC)$.

Характер процессов при разряде конденсатора оказывается существенно различным в зависимости от того, будут ли корни характеристического уравнения вещественными или комплексными, что определяется соотношениями между параметрами r, L и C.

Исследуем различные возможные случаи.

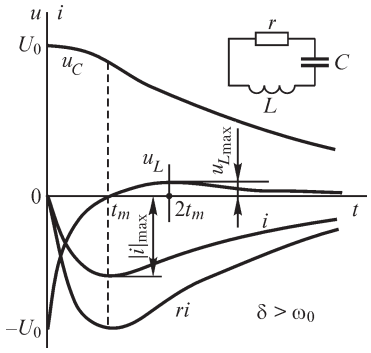


Рис. 9.16

1. Пусть корни характеристического уравнения *вещественны* и отличны друг от друга. Это имеет место при условии $\delta > \omega_0$, т. е. $r/(2L) > 1/\sqrt{LC}$ или $r > 2\sqrt{L/C}$.

Так как $\alpha_1 < 0$ и $\alpha_2 < 0$ и, кроме того, $|\alpha_2| > |\alpha_1|$, то при изменении t от 0 до ∞ величины $e^{\alpha_1 t}$ и $e^{\alpha_2 t}$ убывают от 1 до 0 и притом разность $e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}$ всегда положительна (рис. 9.15). Следовательно, ток i не меняет своего направления, т. е. конденсатор все время разряжается; в частности, при $u_C(0) = U_0 > 0$ ток все время отрицателен. Такой односторонний разряд конденсатора называют а п е р и о д и ч е с к и м р а з р я д о м.

На рис. 9.16 изображены зависимости $i(t)$, $ri(t)$, $u_C(t)$ и $u_L(t)$. В интервале времени $0 < t < t_m$ ток по абсолютному значению возрастает и достигает максимума

при $t = t_m = \left(\ln\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\Big/(\alpha_1 - \alpha_2)$. Значение t_m находится из условия $di/dt = u_L/L = 0$, т. е. из условия $\alpha_1 e^{\alpha_1 t_m} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t_m} = 0$. В интервале времени $t_m < t <$ ток по абсолютному значению убывает, стремясь к нулю.

Напряжение на конденсаторе монотонно убывает, также стремясь к нулю.

На рис. 9.14 показаны принятые ранее всюду, и в частности при составлении уравнений в настоящем параграфе, взаимоотношения между *условным* положительным направлением тока и условными положительными напряжениями на конденсаторе, на катушке и участке с сопротивлением. При $u_C > 0$ и $i_C > 0$ конденсатор заряжается.

В рассматриваемом случае апериодического разряда мы получили, естественно, $i < 0$ при $u_C > 0$. *Действительное* направление тока при разряде конденсатора показано штриховой стрелкой на рис. 9.17. На этом же рисунке *действительные* направления напряжений показаны знаками «+» и «–». Из уравнения

$$u_C = -\left(L\frac{di}{dt} + ri\right)$$

следует, что напряжение на зажимах конденсатора в любой момент времени уравновешивается суммой напряжения на зажимах катушки самоиндукции и напряжения на участке с сопротивлением. В первый момент времени, когда ri 0, напряжение на зажимах конденсатора полностью уравновешивается напряжением на зажимах катушки. Ток начинает возрастать по абсолютному значению именно с такой скоростью, чтобы наступило такое равновесие. В интервале времени $0 < t < t_m$ (рис. 9.16) напряжение u_C частично уравновешивается напряжением на катушке и частично напряжением на участке с сопротивлением. С возрастанием t на долю катушки приходится все меньшее напряжение и, соответственно, скорость нарастания тока уменьшается. В момент t_m величины u_C и ri оказываются равными и противоположными по знаку ($u_C = -ri$), т. е. оставшееся к этому моменту времени напряжение на конденсаторе полностью уравновешивается напряжением на участке с сопротивлением. Поэтому ток дальше возрастать не может. В этот момент он достигает максимума, так как после этого момента он должен убывать вследствие того, что конденсатор продолжает разряжаться.

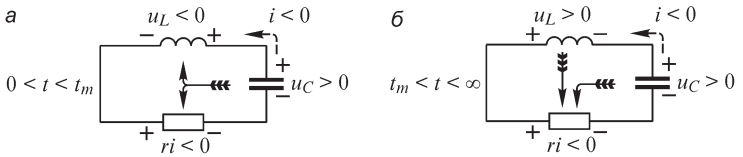


Рис. 9.17

На рис. 9.17 показаны знаки напряжений на катушке и на участке с сопротивлением в интервале времени $0 < t < t_m$, а также стрелкой с хвостовым оперением показано действительное направление потока энергии в этот промежуток времени. Напряжение на конденсаторе и ток в нем разных знаков, и, следовательно,

мощность $p_C = u_C i$ отрицательна, т. е. энергия отдается конденсатором из его электрического поля. Напряжения на катушке и на участке с сопротивлением одного знака с током, и, следовательно, $p_L = u_L i > 0$ и $p_r = ri^2 > 0$, т. е. энергия поступает в катушку, запасаясь в ее магнитном поле, и выделяется в виде теплоты в сопротивлении.

В интервале времени $t_m < t < \infty$ напряжение на катушке, так же как и напряжение на конденсаторе, положительно — они совместно преодолевают сопротивление цепи, что легко видеть из рассмотрения знаков напряжений, показанных на рис. 9.17. Теперь мощность $p_L = u_L i$ отрицательна, и катушка, так же как и конденсатор, отдает запасенную в ней энергию. Вся эта энергия превращается в теплоту, что показано стрелками с хвостовым оперением.

Представляет интерес сопоставить кривые на рис. 9.16 с кривыми на рис. 9.9, полученными при рассмотрении разряда конденсатора на сопротивление r в предположении, что $L = 0$. При таком предположении в начальный момент ток скачком принимает значение, определяемое отношением начального значения напряжения на конденсаторе к сопротивлению. При $L \neq 0$ (рис. 9.16) ток увеличивается постепенно от нулевого начального значения. Соответственно, скорость спадания напряжения на конденсаторе в начальный период разряда при $L \neq 0$ получается меньше, чем при $L = 0$.

2. Рассмотрим теперь случай, когда корни характеристического уравнения *вещественны* и равны друг другу. Это имеет место при условии $\delta = \omega_0$, т. е. при $r \quad 2\sqrt{L/C}$. Имеем $\alpha_1 = \alpha_2 = -\delta$. При этом выражения для тока и напряжений становятся неопределенными из-за равенства нулю и числителя, и знаменателя. Раскроем эти неопределенности по правилу Лопиталя, считая, что α_1 — переменная и стремится к $\alpha_2 = -\delta$. Для тока получим

$$i = -\frac{U_0}{L} \lim_{\alpha_1 \to \alpha_2} \frac{e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}}{\alpha_1 - \alpha_2} = -\frac{U_0}{L} t e^{\alpha_2 t} = -\frac{U_0}{L} t e^{-\delta t}.$$

Для напряжений соответственно

$$u_L = L\frac{di}{dt} = U_0(\delta t - 1)\, e^{-\delta t};$$

$$u_C = \frac{1}{C}\int_0^t i\, dt + U_0 = U_0(\delta t + 1)\, e^{-\delta t}.$$

Характер процессов в этом случае не отличается от рассмотренного выше, когда $\delta > \omega_0$. Процесс также *апериодический*. Момент достижения током максимума абсолютного значения теперь равен $t_m = 1/\delta$. Данный случай при $\delta = \omega_0$ является предельным случаем апериодического разряда, так как при дальнейшем уменьшении r ниже значения $2\sqrt{L/C}$ разряд становится колебательным.

3. Пусть корни характеристического уравнения являются *комплексными*. Это имеет место при условии $\delta < \omega_0$, т. е. при $r < 2\sqrt{L/C}$. Введем обозначение

$\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega'$. Корни характеристического уравнения при этом можем записать в виде

$$\alpha_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta + j\omega' = \omega_0 e^{j\theta};$$

$$\alpha_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta - j\omega' = \omega_0 e^{-j\theta},$$

где $\theta = \mathrm{arctg}\,(\omega'/-\delta)$. Угол θ лежит в пределах $\pi/2 < \theta < \pi$, так как

$$\sin\theta = \omega'/\omega_0 > 0 \quad \text{и} \quad \cos\theta = -\delta/\omega_0 < 0.$$

Для тока имеем выражение

$$i = -\frac{U_0}{(\alpha_1 - \alpha_2)L}(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}) = -\frac{U_0}{2j\omega' L}(e^{-\delta t} e^{j\omega' t} - e^{-\delta t} e^{-j\omega' t}) =$$

$$= -\frac{U_0}{\omega' L} e^{-\delta t} \sin\omega' t = -Ie^{-\delta t} \sin\omega' t.$$

Для u_L и u_C имеем

$$u_L = -\frac{U_0}{(\alpha_1 - \alpha_2)}(\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t}) = -\frac{U_0}{2j\omega'}(\omega_0 e^{j\theta} e^{-\delta t} e^{j\omega' t} - \omega_0 e^{-j\theta} e^{-\delta t} e^{-j\omega' t}) =$$

$$= -\frac{U_0 \omega_0}{2j\omega'} e^{-\delta t}\left(e^{j(\omega' t + \theta)} - e^{-j(\omega' t + \theta)}\right) = -U_0 \frac{\omega_0}{\omega'} e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \theta);$$

$$u_C = -\frac{U_0}{(\alpha_1 - \alpha_2)}(\alpha_2 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t}) = -\frac{U_0}{2j\omega'}(\omega_0 e^{-j\theta} e^{-\delta t} e^{j\omega' t} - \omega_0 e^{j\theta} e^{-\delta t} e^{-j\omega' t}) =$$

$$= -\frac{U_0 e^{-\delta t} \omega_0}{2j\omega'}\left(e^{j(\omega' t - \theta)} - e^{-j(\omega' t - \theta)}\right) = -U_0 \frac{\omega_0}{\omega'} e^{-\delta t} \sin(\omega' t - \theta).$$

На рис. 9.18 изображены в функции от $\omega' t$ величины ri, u_L и u_C. Кривая тока i подобна кривой ri. Из полученных аналитических выражений, а также из рисунка видно, что процесс в этом случае является колебательным. Ток и напряжения на всех участках периодически меняют знак. Амплитуда колебаний убывает по показательному закону, следовательно, в цепи совершаются затухающие колебания тока и напряжений. Угловая частота затухающих колебаний

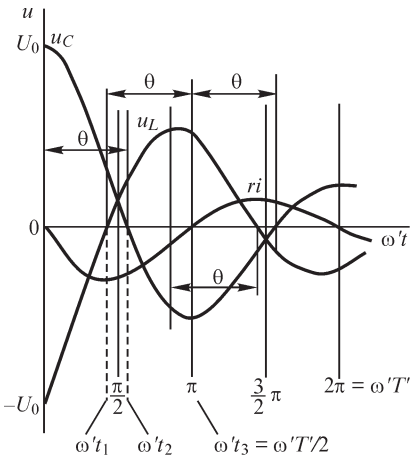


Рис. 9.18

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}.$$

Соответственно период затухающих колебаний определяется из формулы

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = 2\pi \Big/ \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}.$$

В предельном случае $r = 0$ имеем $\delta = 0$, $\omega' = \omega_0$, и $T' \quad T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. В этом случае колебания будут н е з а т у х а ю щ и м и, так как энергия полей не рассеивается. Величину T_0 называют п е р и о д о м н е з а т у х а ю щ и х к о л е б а н и й и выражающую его формулу

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

формулой Томсона. Угловая частота незатухающих колебаний $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, как видим, равна резонансной частоте контура. Принимая во внимание, что при $\delta = 0$ имеем $\theta = \pi/2$, в этом случае получаем $i = -\dfrac{U_0}{\omega_0 L}\sin\omega_0 t$, $u_L \quad -U_0 \sin(\omega_0 t + \pi/2)$ и $u_C \quad -U_0 \sin(\omega_0 t - \pi/2)$. Кривые i, u_L и u_C для этого предельного случая изображены на рис. 9.19. Они полностью соответствуют характеру этих кривых при установившемся процессе в случае резонанса.

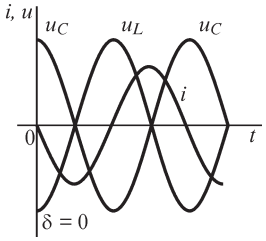


Рис. 9.19

При $r \quad 0$ имеем $\omega' < \omega_0$ и $T' > T_0$. В предельном случае, когда $r = 2\sqrt{L/C}$, т. е. $\delta = \omega_0$, получаем $\omega' = 0$ и $T \quad = \infty$. При этом колебательный разряд переходит в апериодический. Этот предельный случай был рассмотрен ранее.

Быстроту затухания тока принято характеризовать так называемым д е к р е м е н т о м к о л е б а н и й Δ, равным отношению двух последующих амплитуд одного знака:

$$\Delta = Ie^{-\delta t} : Ie^{-\delta(t+T')} = e^{\delta T'},$$

а также л о г а р и ф м и ч е с к и м д е к р е м е н т о м к о л е б а н и й, равным

$$\vartheta = \ln\Delta = \delta T'.$$

При малом затухании $T' \quad T_0$ и

$$\vartheta = \delta T' \approx \delta T_0 = \frac{r}{2L}2\pi\sqrt{LC} = \pi r\Big/\sqrt{\frac{L}{C}} = \pi d.$$

При рассмотрении явления резонанса величина d была названа *затуханием контура*, так как при малом затухании она пропорциональна логарифмическому декременту колебаний.

Остановимся несколько подробнее на процессах, происходящих при затухающем колебательном разряде конденсатора.

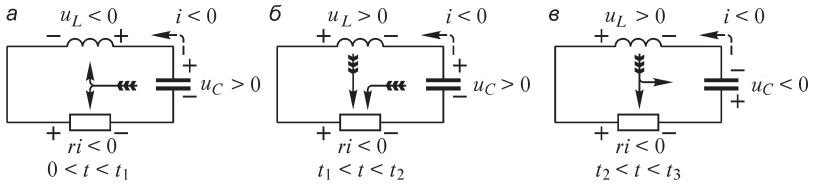


Рис. 9.20

В интервале времени $0 < t < t_1$ (рис. 9.20, *а)*, пока ток нарастает от нуля до максимального абсолютного значения, характер процесса такой же, как и при

апериодическом разряде в интервале $0 < t < t_m$. Это видно из тождественности рисунков 9.17, *а* и 9.20, *а*. Точно так же характер процесса при колебательном разряде в интервале $t_1 < t < t_2$ (рис. 9.20, *б*) аналогичен характеру процесса при апериодическом разряде в интервале $t_m < t < \infty$ (см. рис. 9.17, *б*). При апериодическом разряде напряжение на конденсаторе и ток уменьшаются до нуля при $t = \infty$. Но при колебательном разряде к моменту t_2, когда конденсатор полностью разрядится, ток в катушке сохраняет еще конечное значение, что является результатом сравнительно небольших потерь энергии в предыдущем интервале времени.

Сохранившаяся к моменту t_2 энергия в магнитном поле катушки и является причиной того, что процесс продолжается в последующее время. В интервале времени $t_2 < t < t_3$, где $t_3 \quad T'/2$, ток, поддерживаемый ЭДС самоиндукции, продолжает протекать в том же направлении и заряжает конденсатор, причем напряжение на конденсаторе уже будет другого знака ($u_C < 0$). В этом промежутке времени (рис. 9.20, *в*) энергия из магнитного поля катушки частично переходит в энергию электрического поля конденсатора и частично превращается в теплоту в сопротивлении *r*. К моменту $T'/2$ конденсатор заряжается до максимального абсолютного значения своего напряжения. В этот момент $i \quad 0$ и $u_L \quad -u_C$. В следующую половину периода энергетический процесс в точности повторяется, но знаки напряжений и тока будут противоположными их знакам в рассмотренном интервале $0 < t < T'/2$. Напряжение на конденсаторе в момент $t = T'$ будет в Δ раз меньше начального напряжения U_0. Кривые на рис. 9.18 построены при $\Delta = 4$, чему соответствуют $\vartheta \approx \ln \Delta = 1{,}4$ и $\theta = 102°55'$.

9.9. Включение цепи *r, L, C* под постоянное напряжение

Исследуем переходные процессы в цепи *(r, L, C)* при включении ее под постоянное напряжение $U = \text{const}$ при нулевых начальных условиях, т. е. при $i(-0) = 0$ и $u_C(-0) = 0$.

Уравнение для данной цепи

$$L\frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + u_C(0) = u(t),$$

как было показано в § 9.7, имеет решение

$$i = i' + A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}.$$

В данном случае ток установившегося режима будет равен нулю, т. е. $i' = 0$. Следовательно,

$$i = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t};$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = L(A_1\alpha_1 e^{\alpha_1 t} + A_2\alpha_2 e^{\alpha_2 t}).$$

Используя начальные условия для тока, имеем $i(0) = 0 = A_1 + A_2$. Из уравнения цепи и из выражения для u_L, учитывая, что $u_C(0) = 0$ и $u(t) = U = \text{const}$, находим при $t \quad 0$

$$L\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = L(A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2) = U.$$

Из полученных выражений находим произвольные постоянные A_1 и A_2:

$$A_1 = -A_2 = \frac{U}{L(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Таким образом,

$$i = \frac{U}{L(\alpha_1 - \alpha_2)}(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t});$$

$$u_C = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + u_C(0) = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt = \frac{U}{\alpha_1 - \alpha_2}(\alpha_2 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t}) + U.$$

Сравнивая полученные выражения для тока i и напряжения u_C с выражениями для этих величин, приведенными в начале предыдущего параграфа для случая разряда конденсатора, видим, что закон изменения тока в обоих случаях один и тот же и токи различаются только знаками, так как теперь рассматривается процесс зарядки конденсатора. Напряжение же на конденсаторе при разряде изменяется от начального значения U_0 до нуля, а при зарядке — от нуля до конечного значения U; переход происходит по аналогичному закону.

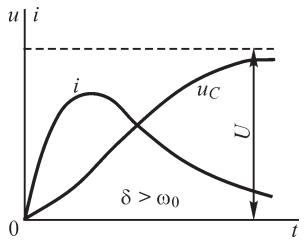


Рис. 9.21

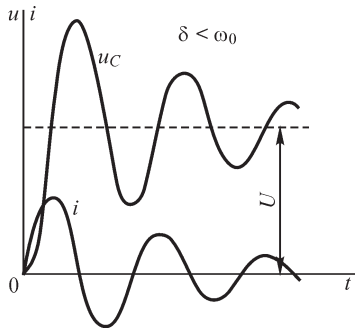


Рис. 9.22

Характер переходного процесса, как и при разряде конденсатора, зависит от того, будут ли корни характеристического уравнения вещественными (при $\delta \geq \omega_0$) или комплексными (при $\delta < \omega_0$). В первом случае процесс зарядки конденсатора апериодический (рис. 9.21), а во втором случае — колебательный (рис. 9.22).

9.10. Включение цепи *r, L, C* под синусоидальное напряжение

Исследуем переходные процессы в цепи (r, L, C) при включении ее под синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$. Как и прежде (см. § 9.7), общее решение для тока в цепи имеет вид

$$i = i' + A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}.$$

Ток i' в установившемся режиме, согласно изложенному в четвертой главе, равен

$$i' = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

где $I_m = \dfrac{U_m}{z}$; $z = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}$; $\psi_i = \psi_u - \varphi$;

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - 1/\omega C}{r}.$$

Произвольные постоянные A_1 и A_2 определим, исходя из начальных условий. Пусть в начальный момент времени ток в цепи и напряжение на зажимах конденсатора равны нулю, т. е. $i(0) = 0$, $u_C(0) = 0$. Из выражения для тока i получаем

$$0 = I_m \sin\psi_i + A_1 + A_2,$$

из уравнения цепи и из выражения для производных токов находим

$$L\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = U_m \sin\psi_u = L\left(\frac{di'}{dt}\right)_{t=0} + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2.$$

Подставляя в это уравнение выражения

$$U_m \sin\psi_u = I_m z \sin(\psi_i + \varphi) = I_m (z\cos\varphi \sin\psi_i + z\sin\varphi\cos\psi_i) =$$

$$= I_m (r\sin\psi_i + x\cos\psi_i) = I_m \left[r\sin\psi_i + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\cos\psi_i \right]$$

$$\text{и} \quad L\left(\frac{di'}{dt}\right)_{t=0} = \omega L I_m \cos\psi_i,$$

а также замечая, что $1/(LC) = \omega_0^2$ и $r/L = 2\delta$, получим

$$-I_m \frac{\omega_0^2}{\omega}\cos\psi_i + I_m 2\delta \sin\psi_i = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2.$$

Решая это уравнение совместно с уравнением

$$0 = I_m \sin\psi_i + A_1 + A_2$$

и учитывая, что $2\delta + \alpha_2 = -\alpha_1$, найдем

$$A_1 = -\frac{I_m}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(\alpha_1 \sin\psi_i + \frac{\omega_0^2}{\omega}\cos\psi_i\right);$$

$$A_2 = \frac{I_m}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(\alpha_2 \sin\psi_i + \frac{\omega_0^2}{\omega}\cos\psi_i\right).$$

Таким образом, для тока i получаем

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) - I_m \frac{\sin\psi_i}{\alpha_1 - \alpha_2}(\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t}) - I_m \frac{\cos\psi_i}{\alpha_1 - \alpha_2}\frac{\omega_0^2}{\omega}(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t})$$

и, соответственно,

$$u_C = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + u_C(0) = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt = -I_m \frac{1}{\omega C}\cos(\omega t + \psi_i) -$$

$$-I_m \frac{\sin\psi_i}{C(\alpha_1 - \alpha_2)}(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}) - I_m \frac{\cos\psi_i}{\omega C(\alpha_1 - \alpha_2)}(\alpha_2 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t}).$$

Для комплексных корней характеристического уравнения, т. е. когда $\delta < \omega_0$, переходный процесс является колебательным. В этом случае, принимая во внимание, что $\alpha_{1,2} = -\delta \pm j\omega'$, целесообразно содержащиеся в вышеприведенных общих выражениях для i и u_C множители записать в виде

$$\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}) = \frac{1}{\omega'} e^{-\delta t}\sin\omega' t;$$

$$\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}(\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t}) = \frac{\omega_0}{\omega'} e^{-\delta t}\sin(\omega' t + \theta);$$

$$\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}(\alpha_2 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t}) = \frac{\omega_0}{\omega'} e^{-\delta t}\sin(\omega' t - \theta),$$

как это было сделано в § 9.8. При этом выражения для i и u_C примут вид

$$\left.\begin{aligned} i &= I_m \sin(\omega t + \psi_i) - \left[\sin\psi_i \sin(\omega' t + \theta) + \frac{\omega_0}{\omega}\cos\psi_i \sin\omega' t\right]\frac{\omega_0}{\omega'} I_m e^{-\delta t}; \\ u_C &= -\frac{I_m}{\omega C}\cos(\omega t + \psi_i) - \left[\sin\psi_i \sin\omega' t + \frac{\omega_0}{\omega}\cos\psi_i \sin(\omega' t - \theta)\right]\frac{I_m}{\omega' C} I_m e^{-\delta t}. \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Ограничимся рассмотрением случаев, когда $\omega = \omega'$ и ω и ω' близки, но не равны друг другу. При этом затухание будем предполагать малым, т. е. считать $\delta << \omega_0$.

Пусть $\omega = \omega'$. Принимая во внимание, что $\delta << \omega_0$, можем полагать $\omega \approx \omega_0$ и $\theta \approx \pi/2$; при этом последние уравнения принимают вид

$$i \approx I_m(1 - e^{-\delta t})\sin(\omega t + \psi_i); \quad u_C \approx -\frac{I_m}{\omega C}(1 - e^{-\delta t})\cos(\omega t + \psi_i).$$

Характерная особенность переходного процесса заключается в том, что амплитуда колебаний тока и напряжения на конденсаторе постепенно нарастает с момента включения ($t = 0$) до своего установившегося значения (рис. 9.23).

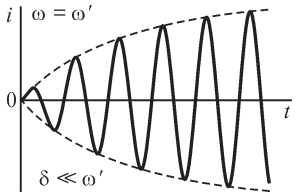


Рис. 9.23

Следует отметить, что амплитуда установившегося напряжения на конденсаторе $\frac{I_m}{\omega C} = \frac{U_m}{z}\frac{1}{\omega C}$ может значительно превзойти амплитуду приложенного напряжения U_m, так как частота $\omega = \omega'$ весьма близка к частоте резонанса ω_0, и, следовательно, емкостное сопротивление конденсатора $x_C \quad 1/(\omega C)$ значительно превышает сопротивление z всей цепи при малом затухании.

Рассмотрим теперь случай, когда ω и ω′ близки по значению, но не равны друг другу. Так как затухание мы приняли малым, то в выражениях для i и u_C приближенно можно полагать $\omega_0/\omega' \approx 1$, $\omega_0/\omega \approx 1$. Принимая в первые после включения моменты времени $e^{-\delta t} \approx 1$, получим

$$i \approx I_m[\sin(\omega t + \psi_i) - \sin(\omega' t + \psi_i)] = 2I_m \sin\left(\frac{\omega - \omega'}{2} t\right)\cos\left(\frac{\omega + \omega'}{2} t + \psi_i\right);$$

$$u_C \approx \frac{I_m}{\omega C}[\cos(\omega t + \psi_i) - \cos(\omega' t + \psi_i)] = 2\frac{I_m}{\omega C}\sin\left(\frac{\omega - \omega'}{2} t\right)\sin\left(\frac{\omega + \omega'}{2} t + \psi_i\right).$$

Эти выражения совпадают с полученными ранее в § 8.8, и, следовательно, в цепи возникают биения колебаний. Характер кривых был приведен на рис. 8.11. Постепенно вследствие хотя и малого, но конечного затухания биения прекратятся и в цепи установятся синусоидальные колебания установившегося режима, что видно из уравнений (*), так как множитель $e^{-\delta t}$ стремится к нулю.

9.11. Переходные процессы при мгновенном изменении параметров участков цепи

В реальных цепях параметры участков цепи изменяются в течение конечных, хотя и весьма малых промежутков времени Δt. Однако при расчете, абстрагируясь от действительности, часто можем предполагать, что параметры участков изменяются мгновенно, т. е. скачком, на определенную величину. Это может иметь место при замыкании отдельных участков накоротко, при размыкании или включении ветвей цепи и т. д. Для расчета переходных процессов в этих случаях необходимо, так же как и во всех ранее рассмотренных случаях, составить дифференциальные уравнения цепи после коммутации и найти их общее решение.

В случае скачкообразного изменения сопротивления r цепи на конечную величину не возникает никаких особенностей в отношении определения произвольных постоянных интегрирования — токи в катушках и напряжения в конденсаторах в момент коммутации не изменяются.

Некоторые особенности для определения произвольных постоянных интегрирования возникают при мгновенных изменениях индуктивностей или емкостей, что будет видно из дальнейшего.

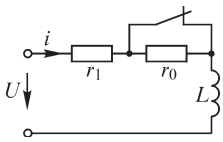


Рис. 9.24

Рассмотрим сначала переходный процесс при мгновенном изменении сопротивления r на конечную величину на примере цепи, приведенной на рис. 9.24. Пусть приложенное к цепи напряжение постоянно и в момент $t = 0$ происходит размыкание ключа, т. е. увеличение сопротивления цепи от r_1 до $r_1 + r_0$. Дифференциальное уравнение цепи после размыкания ключа имеет вид

$$(r_1 + r_0)i + L\frac{di}{dt} = u.$$

Его решение в соответствии с изложенным в § 9.5 будет

$$i = i' + Ae^{-\frac{r_1 + r_0}{L}t}.$$

Установившийся ток i' после размыкания ключа равен $i' = \dfrac{U}{r_1 + r_0} = I_2$. Для определения постоянной A воспользуемся условием $i(+0) = i(-0)$. Если до размыкания ключа в цепи протекал установившийся постоянный ток $I_1 = U/r_1$, т. е. $i(-0) = I_1$, то

$$i(+0) = I_1 = I_2 + A \quad \text{или} \quad A = I_1 - I_2,$$

откуда

$$i = I_2 + (I_1 - I_2)e^{-\frac{r_1+r_0}{L}t}.$$

На рис. 9.25 представлена кривая изменения тока i.

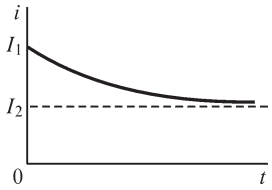


Рис. 9.25

Рассмотрим теперь переходный процесс при скачкообразном изменении индуктивности на примере цепи, представленной на рис. 9.26, в которой в момент $t \quad 0$ происходит размыкание ключа.

Дифференциальное уравнение цепи после размыкания ключа имеет вид

$$(r_1 + r_2)i + (L_1 + L_2)\frac{di}{dt} = U,$$

и его решение

$$i = i' + Ae^{-\frac{r_1+r_2}{L_1+L_2}t} = i' + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (*)$$

Постоянный установившийся ток i' ограничивается сопротивлениями r_1 и r_2 и равен

$$i' = \frac{U}{r_1 + r_2}.$$

Для определения произвольной постоянной интегрирования A не можем воспользоваться условием неизменности токов в катушках L_1 и L_2 в моменты $t \quad -0$ и $t \quad +0$. Действительно, в момент $t \quad -0$ токи в катушках были различны, а именно $i_{1L}(-0) = U/r_1 \neq 0$, т. е. до размыкания ключа в цепи протекал постоянный установившийся ток, который определялся сопротивлением r_1. В катушке же L_2 ток отсутствовал и $i_{2L}(-0) = 0$, поскольку в ветви этой катушки имеется конечное сопротивление r_2 и весь ток проходил по ветви с ключом, имевшей сопротивление, равное нулю. После размыкания ключа в момент $t = +0$ токи в обеих катушках должны быть одинаковы. Следовательно, токи в катушках в момент коммутации должны скачком измениться, что возможно только при появлении бесконечно больших напряжений на катушках.

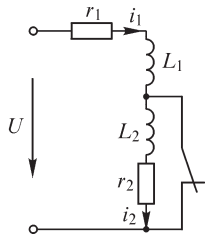


Рис. 9.26

Так как приложенное напряжение конечно, а также конечными остаются падения напряжения на сопротивлениях r_1 и r_2 вследствие конечных значений токов, то сумма напряжений на катушках остается конечной и, следовательно, эти

бесконечно большие напряжения в момент коммутации можно считать равными и противоположными, т. е.

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} \quad \text{при} \quad -0 < t < +0.$$

Интегрируя это равенство в пределах от $t = -0$ до $t = +0$, находим

$$L_1 \int_{t=-0}^{t=+0} \frac{di_1}{dt} dt = -L_2 \int_{t=-0}^{t=+0} \frac{di_2}{dt} dt \qquad (**)$$

или

$$L_1 \int_{i_{1L}(-0)}^{i_{1L}(+0)} di_1 = -L_2 \int_{i_{2L}(-0)}^{i_{2L}(+0)} di_2,$$

т. е.

$$L_1[i_{1L}(+0) - i_{1L}(-0)] = -L_2[i_{2L}(+0) - i_{2L}(-0)],$$

или

$$L_1 \Delta i_1 = -L_2 \Delta i_2, \quad \text{или} \quad \Delta\Psi_1 + \Delta\Psi_2 = 0.$$

Так как

$$i_{1L}(+0) = i_{2L}(+0) = i(+0) \quad \text{и} \quad i_{2L}(-0) = 0,$$

то

$$(L_1 + L_2)\, i(+0) = L_1 i_{1L}(-0).$$

Из последнего равенства, а также из равенства $\Delta\Psi_1 + \Delta\Psi_2 = 0$ видно, что в процессе коммутации *осталась неизменной сумма потокосцеплений с обеими катушками*.

Найдя из последнего выражения ток $i(+0)$

$$i(+0) = i_{1L}(-0) \frac{L_1}{L_1 + L_2} = \frac{U}{r_1} \frac{L_1}{L_1 + L_2},$$

определяем постоянную A из выражения (*):

$$\frac{U}{r_1} \frac{L_1}{L_1 + L_2} = \frac{U}{r_1 + r_2} + A.$$

Таким образом,

$$i = i' + Ae^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{U}{r_1 + r_2} + \left(\frac{U}{r_1} \frac{L_1}{L_1 + L_2} - \frac{U}{r_1 + r_2} \right) e^{-\frac{r_1 + r_2}{L_4 + L_2} t}.$$

Предположение, что коммутация происходит за бесконечно малый промежуток времени ($\Delta t \quad 0$), теоретически привело к появлению бесконечно больших напряжений на катушках, т. е. эти напряжения приняли вид *импульсов* бесконечно большой амплитуды, длящихся бесконечно малый промежуток времени ($\Delta t \quad 0$) (рис. 9.27). Однако интегралы (**) этих импульсов за время коммутации имеют конечные значения и равны приращениям потокосцеплений в катушках $\Delta\Psi_1$ и $\Delta\Psi_2$.

Обратим внимание на то, что энергия, запасенная в магнитном поле первой катушки до коммутации,

$$W_{м}(-0)=\frac{L_1}{2}[i_{1L}(-0)]^2=\frac{L_1}{2}\left(\frac{U}{r_1}\right)^2$$

больше энергии, запасенной в магнитных полях обеих катушек после коммутации:

$$W_{м}(+0)=\frac{L_1+L_2}{2}[i(+0)]^2=\frac{L_1}{2}\left(\frac{U}{r_1}\right)^2\frac{L_1}{L_1+L_2}.$$

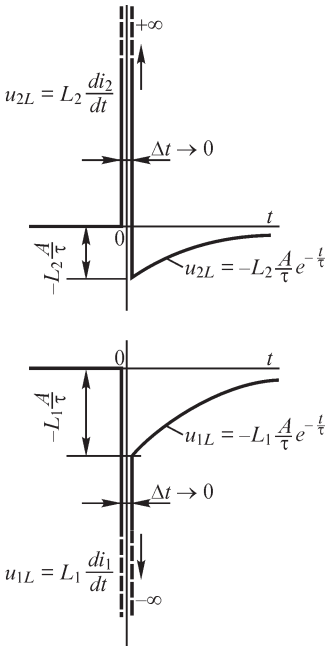


Рис. 9.27

Разность этих энергий расходуется на необратимые процессы во время коммутации, хотя длительность коммутации бесконечно мала. Это возможно, так как на участках цепи развиваются бесконечно большие мощности.

Такие результаты — итог предельной идеализации явления. В действительности сопротивление ключа не может меняться скачком от нуля до бесконечности, так как большие напряжения между контактами ключа вызовут между ними электрическую искру или электрическую дугу. Кроме того, всякая катушка обладает распределенной емкостью между ее витками, так же как имеется емкость между расходящимися контактами ключа; поэтому процесс коммутации совершается в конечный промежуток времени Δt, в течение которого завершается быстро протекающий переходный процесс от момента начала до момента конца коммутации. Этот переходный процесс в зависимости от соотношений параметров может быть апериодическим или колебательным с очень высокой частотой, и разность энергий $W_{м}(-0) - W_{м}(+0)$ расходуется в сопротивлениях цепи, в частности в сопротивлениях между контактами ключа, или на излучение при очень высокой частоте. Этот процесс, проходящий за время Δt, при отмеченной выше идеализации не рассматриваем. Но если его рассмотреть, то будут справедливы сформулированные в § 9.4 физические условия коммутации — неизменность токов в катушках и напряжений на конденсаторах, а также неизменность энергий, запасенных в катушках и конденсаторах.

Интересно отметить, что, соблюдая условие $L_1/r_1 = L_2/r_2$, получим $A = 0$, т. е. новое установившееся значение постоянного тока получается сразу после коммутации. Это обстоятельство может быть использовано, если нам желательно в очень короткий промежуток времени Δt изменить постоянный ток в катушке. Естественно, изоляция катушек должна выдерживать импульсы высокого напряжения.

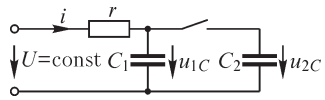


Рис. 9.28

Рассмотрим процесс в цепи, изображенной на рис. 9.28, при замыкании ключа, т. е. процесс при скачкообразном изменении емкости от C_1 до $C_1 + C_2$, предпо-

лагая, что ветви с конденсаторами C_1 и C_2 не имеют индуктивностей и сопротивлений. Будем считать, что до замыкания ключа конденсатор C_1 был заряжен до напряжения U, а конденсатор C_2 не был заряжен.

Дифференциальное уравнение цепи после замыкания ключа примет вид

$$ri + u_C = U \quad \text{или} \quad r(C_1 + C_2)\frac{du_C}{dt} + u_C = U$$

и имеет решение

$$u_C = u'_C + Ae^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad (***)$$

где $u'_C = U$ и $\tau = r(C_1 + C_2)$.

Для определения A нельзя воспользоваться условием неизменности напряжения на конденсаторах C_1 и C_2 в моменты $t = -0$ и $t \quad +0$, так как при $t = -0$ было $u_{1C}(-0) = U \neq 0$ и $u_{2C}(-0) = 0$, а при $t = +0$ имеем $u_{1C}(+0) = u_{2C}(+0)$.

Следовательно, напряжения на конденсаторах в момент коммутации должны скачком измениться, что возможно только при появлении в ветвях C_1 и C_2 импульсов тока бесконечной амплитуды и бесконечно малой длительности. Так как суммарный ток i остается конечным, то эти импульсы равны по амплитуде и противоположны по знаку, т. е.

$$C_1\frac{du_{1C}}{dt} = -C_2\frac{du_{2C}}{dt} \quad \text{при} \quad -0 < t < +0.$$

Интегрируя это равенство в пределах от $t = -0$ до $t = +0$, находим

$$C_1\int_{u_{1C}(-0)}^{u_{1C}(+0)} du_{1C} = -C_2\int_{u_{2C}(-0)}^{u_{2C}(+0)} du_{2C},$$

т. е.

$$C_1[u_{1C}(+0) - u_{1C}(-0)] = -C_2[u_{2C}(+0) - u_{2C}(-0)],$$

или

$$C_1\Delta u_{1C} = -C_2\Delta u_{2C} \quad \text{или} \quad \Delta q_1 + \Delta q_2 = 0.$$

Так как $u_{1C}(+0) = u_{2C}(+0) = u_C(+0)$, и $u_{2C}(-0) = 0$, то

$$(C_1 + C_2)u_C(+0) = C_1u_{1C}(-0).$$

Из последнего равенства, а также из равенства $\Delta q_1 + \Delta q_2 = 0$ видно, что в процессе коммутации *осталась неизменной сумма зарядов обоих конденсаторов*.

Найдя из последнего выражения напряжение $u_C(+0)$:

$$u_C(+0) = u_{1C}(-0)\frac{C_1}{C_1 + C_2} = U\frac{C_1}{C_1 + C_2},$$

определим постоянную A из выражения (***). Получим

$$u_C = u'_C + Ae^{-\frac{t}{\tau}} = U + U\left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} - 1\right)e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Легко убедиться, что энергия конденсатора C_1 до коммутации

$$W_э(-0) = C_1U^2/2$$

больше энергии, запасенной в обоих конденсаторах после коммутации:

$$W_э(+0) = \frac{C_1 + C_2}{2}[u_C(+0)]^2 = \frac{C_1 U^2}{2}\frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

В действительности физические процессы при коммутации происходят и в этой цепи за конечный промежуток времени и имеют характер, аналогичный рассмотренному в предыдущем примере.

9.12. Расчет переходных процессов в сложной цепи

Общую методику расчета переходных процессов в сложной электрической цепи рассмотрим на примерах цепей, представленных на рис. 9.29 и 9.30.

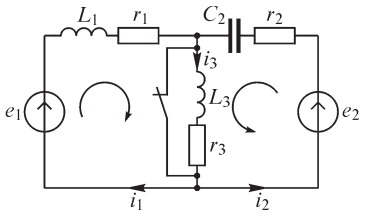


Рис. 9.29

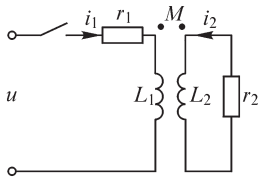


Рис. 9.30

1. Применим метод контурных токов для цепи (рис. 9.29), образовавшейся после размыкания ключа. Имеем

$$\left.\begin{aligned} &(r_1 + r_3)i_1 + (L_1 + L_3)\frac{di_1}{dt} + r_3 i_2 + L_3\frac{di_2}{dt} = e_1; \\ &r_3 i_1 + L_3\frac{di_1}{dt} + (r_2 + r_3)i_2 + L_3\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i_2\,dt + u_C(0) = e_2. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Решим эту систему уравнений относительно контурного тока i_1. Обозначим операцию дифференцирования буквой $D = d/dt$ и операцию интегрирования от 0 до t через $1/D$. Тогда, как известно из курса математики, для линейных уравнений можно, оперируя этим символом как некоторой величиной, решить систему уравнений относительно одной неизвестной. Имеем

$$[r_1 + r_3 + (L_1 + L_3)D]\,i_1 + (r_3 + L_3 D)i_2 = e_1;$$

$$(r_3 + L_3 D)\,i_1 + \left(r_2 + r_3 + L_3 D + \frac{1}{C_2 D}\right)i_2 = e_2 - u_C(0).$$

Умножим первое уравнение на $r_2 + r_3 + L_3 D + 1/(C_2 D)$, а второе — на $r_3 + L_3 D$ и вычтем из первого второе. Получим

$$[r_1 + r_3 + (L_1 + L_3)D]\left(r_2 + r_3 + L_3 D + \frac{1}{C_2 D}\right)i_1 - (r_3 + L_3 D)^2 i_1 =$$

$$= \left(r_2 + r_3 + L_3 D + \frac{1}{C_2 D}\right)e_1 - (r_3 + L_3 D)[e_2 - u_C(0)]$$

или, обозначая

$$L_1L_3 = a_3; \qquad L_1(r_2 + r_3) + L_3(r_1 + r_2) = a_2;$$

$$(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1) + \frac{L_1 + L_3}{C_2} = a_1; \qquad \frac{r_1 + r_3}{C_2} = a_0,$$

находим

$$a_3D^3i_1 + a_2D^2i_1 + a_1Di_1 + a_0i_1 =$$

$$= L_3D^2e_1 + (r_2 + r_3)De_1 + \frac{1}{C_2}e_1 - L_3D^2[e_2 - u_C(0)] - r_3D[e_2 - u_C(0)].$$

Имея в виду, что

$$D^3i = \frac{d^3i}{dt^3}; \; D^2i = \frac{d^2i}{dt^2}; \; Di = \frac{di}{dt} \text{ и } DA = \frac{dA}{dt} = 0 \; (A = \text{const}),$$

получим искомое дифференциальное уравнение относительно тока i_1:

$$a_3\frac{d^3i_1}{dt^3} + a_2\frac{d^2i_1}{dt^2} + a_1\frac{di_1}{dt} + a_0i_1 = b_2\frac{d^2e_1}{dt^2} + b_1\frac{de_1}{dt} + b_0e_1 - c_2\frac{d^2e_2}{dt^2} - c_1\frac{de_2}{dt}.$$

Характеристическое уравнение однородного дифференциального уравнения примет вид

$$a_3\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0.$$

Данное уравнение имеет три корня: α_1, α_2, α_3 — и, соответственно, для свободного тока i_1'' можем написать

$$i_1'' = A_{11}e^{\alpha_1t} + A_{12}e^{\alpha_2t} + A_{13}e^{\alpha_3t}.$$

Так же как в § 9.2, первый индекс у постоянных A_{ks} относится к искомому току, а второй — к корням уравнения.

Следовательно, полное решение для тока i_1 будет

$$i_1 = i_1' + A_{11}e^{\alpha_1t} + A_{12}e^{\alpha_2t} + A_{13}e^{\alpha_3t}.$$

Как было отмечено в § 9.4, для определения произвольных постоянных A_{11}, A_{12}, A_{13} необходимо знать i_1 и его производные di_1/dt и d^2i_1/dt^2 в момент времени $t = 0$, которые выражаются через значения токов в катушках и напряжений на конденсаторах до размыкания ключа: $i_{1L}(-0)$, $i_{3L}(-0)$ и $u_C(-0)$, а также через ток i_1' установившегося режима при $t = +0$.

Значения токов и напряжений в установившемся режиме определяются по методам, изложенным в гл. 5 и 8, в зависимости от вида ЭДС e_1 и e_2. Значения $i_1(-0)$, $i_2(-0)$ и $u_C(-0)$ будем считать заданными, так как их легко рассчитать для цепи с замкнутым ключом.

В момент коммутации остаются неизменными токи в индуктивных катушках. Поскольку $i_{1L} = i_1$ и $i_{3L} = i_2 + i_1$, то имеем $i_1(+0) = i_{1L}(-0)$, $i_1(+0) + i_2(+0) = i_{3L}(0) = 0$ или $i_2(+0) = -i_1(+0)$. Для напряжения на конденсаторе получим $u_C(+0) = u_C(-0)$.

Заметим, что в отношении начальных условий здесь не возникает особенностей, отмеченных при рассмотрении второго примера в предыдущем параграфе. Хотя в данном случае также размыкается ключ, замыкавший ветвь с индуктив-

ностью, но требование, чтобы после размыкания ключа токи в обеих катушках стали равными друг другу, отсутствует, так как есть путь для тока через вторую ветвь, в которой нет индуктивности и в которой ток может меняться скачком.

Для определения производных тока i_1 в этом случае проще всего поступить следующим образом. Вычитая второе уравнение (*) из первого, получим уравнение согласно второму закону Кирхгофа по контуру, охватывающему оба источника ЭДС:

$$r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - \frac{1}{C}\int_0^t i_2\,dt - u_C(0) - r_2 i_2 = e_1 - e_2.$$

Отсюда определим $L_1 \dfrac{di_1}{dt}$ при $t = 0$:

$$L_1\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} = e_1(0) - e_2(0) - r_1 i_1(0) + u_C(0) + r_2 i_2(0).$$

Продифференцировав последнее уравнение, получим

$$e_1' - e_2' = r_1 \frac{di_1}{dt} + L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} - \frac{i_2}{C} - r_2 \frac{di_2}{dt}.$$

В этом уравнении в момент $t = 0$ неизвестны $\dfrac{d^2 i_1}{dt^2}$ и $\dfrac{di_2}{dt}$.

Определим $\left(\dfrac{di_2}{dt}\right)_{t=0}$ из второго контурного уравнения (*):

$$\left(L_3 \frac{di_2}{dt}\right)_{t=0} = e_2(0) - r_3[i_1(0) + i_2(0)] - i_2(0)\,r_2 - \left(L_3 \frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} - u_C(0).$$

Подставляя $\left(\dfrac{di_2}{dt}\right)_{t=0}$ в предыдущее выражение, получим значение второй производной тока i_1 при $t = 0$.

Таким образом, для определения постоянных имеем

$$i_1(0) = i_1'(0) + A_{11} + A_{12} + A_{13};$$

$$\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{di_1'}{dt}\right)_{t=0} + \alpha_1 A_{11} + \alpha_2 A_{12} + \alpha_3 A_{13};$$

$$\left(\frac{d^2 i_1}{dt^2}\right)_{t=0} = \left(\frac{d^2 i_1'}{dt^2}\right)_{t=0} + \alpha_1^2 A_{11} + \alpha_2^2 A_{12} + \alpha_3^2 A_{13},$$

где величины, стоящие слева, уже определены. Решая совместно эти три уравнения, найдем постоянные A_{11}, A_{12}, A_{13}.

Для определения тока i_2, решение уравнения которого можно записать в виде

$$i_2 = i_2' + A_{21} e^{\alpha_1 t} + A_{22} e^{\alpha_2 t} + A_{23} e^{\alpha_3 t},$$

можно произвести аналогичные расчеты, причем выражение для $(d^2i_2/dt^2)_{t=0}$ легко определить по известной $(d^2i_1/dt^2)_{t=0}$ и по остальным величинам, определенным выше для i_1.

2. В качестве примера расчета цепи со взаимной индукцией рассмотрим расчет цепи, представленной на рис. 9.30. Уравнения для этой цепи имеют вид

$$i_1r_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} = u; \quad M\frac{di_1}{dt} + r_2i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} = 0.$$

Обозначая $d/dt = D$, решим систему относительно i_1. Получим

$$(r_1 + L_1D)(r_2 + L_2D)i_1 - M^2D^2i_1 = (r_2 + L_2D)u$$

или

$$(L_1L_2 - M^2)D^2i_1 + (r_1L_2 + r_2L_1)Di_1 + r_1r_2i_1 = L_2Du + r_2u.$$

Учитывая, что $D^ni = d^ni/dt^n$, находим

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{d^2i_1}{dt^2} + (r_1L_2 + r_2L_1)\frac{di_1}{dt} + r_1r_2i_1 = r_2u + L_2\frac{du}{dt}. \qquad (**)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$(L_1L_2 - M^2)\alpha^2 + (r_1L_2 + r_2L_1)\alpha + r_1r_2 = 0,$$

откуда для двух его корней α_1 и α_2 получаем

$$\alpha_{1,2} = -\frac{r_1L_2 + r_2L_1}{2L_1L_2(1-k^2)} \pm \sqrt{\left[\frac{r_1L_2 + r_2L_1}{2(1-k^2)L_1L_2}\right]^2 - \frac{r_1r_2}{L_1L_2(1-k^2)}},$$

принимая во внимание, что $M^2 = k^2L_1L_2$.

Пусть включение производится при нулевых начальных условиях под действие постоянного напряжения $u \quad U = \text{const}$. Тогда из уравнения (**), полагая в нем все производные и токов и напряжений равными нулю, получим ток установившегося режима $i' = U/r_1$, что непосредственно вытекает также из первого уравнения.

Таким образом, для тока i_1 имеем выражение

$$i_1 = i_1' + i_1'' = \frac{U}{r_1} + A_{11}e^{\alpha_1 t} + A_{12}e^{\alpha_2 t}.$$

Произвольные постоянные определим, имея в виду, что

$$i_1(+0) = i_1(-0) = 0; \quad i_2(+0) = i_2(-0) = 0.$$

Из второго уравнения для момента $t = 0$ находим $ri_2(0) = 0$ и

$$M\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} = -L_2\left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0} \quad \text{или} \quad \left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{M}{L_2}\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0}.$$

Подставив последнее в уравнение для первого контура, найдем при $t = 0$

$$\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} = U \quad \text{или} \quad \left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} = \frac{U}{L_1(1-k^2)}.$$

Таким образом, при $t = 0$ имеем

$$i_1(0) = 0 = \frac{U}{r_1} + A_{11} + A_{12};$$

$$\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} = \frac{U}{L_1(1-k^2)} = \alpha_1 A_{11} + \alpha_2 A_{12},$$

откуда, определив A_{11} и A_{12}, для i_1 получим

$$i_1 = \frac{U}{r_1} + \frac{U}{L_1(1-k^2)(\alpha_1 - \alpha_2)}(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}) + \frac{U}{r_1(\alpha_1 - \alpha_2)}(\alpha_2 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t}).$$

Имея в виду, что $i_2' = 0$, находим

$$i_2 = A_{21}e^{\alpha_1 t} + A_{22}e^{\alpha_2 t}.$$

Начальные условия при $t = 0$:

$$i_2(0) = 0; \quad \left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{M}{L_2}\left(\frac{di_1}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{UM}{L_1 L_2(1-k^2)}.$$

Следовательно,

$$0 = A_{21} + A_{22} \quad \text{и} \quad -\frac{UM}{L_1 L_2(1-k^2)} = \alpha_1 A_{21} + \alpha_2 A_{22},$$

откуда

$$A_{21} = -A_{22} = -\frac{UM}{L_1 L_2(1-k^2)(\alpha_1 - \alpha_2)};$$

$$i_2 = -\frac{UM}{L_1 L_2(1-k^2)(\alpha_1 - \alpha_2)}(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}).$$

Зависимости i_1 и i_2 от времени приведены на рис. 9.31.

Как видно из выражения для производной тока i_1, в первый момент времени ток i_1 растет быстрее по сравнению со случаем, когда вторичный контур разомкнут или когда $k = 0$. Поскольку производная тока i_2 знакопеременна, то убыстрение процесса нарастания тока i_1 происходит не все время. Спустя некоторый промежуток времени, когда производная тока i_2 меняет знак, наличие вторичного контура, наоборот, приводит к замедлению роста тока i_1 в последующие моменты времени. Для сравнения на рис. 9.31 штриховой линией показана зависимость $i_1(t)$ при отсутствии магнитной связи.

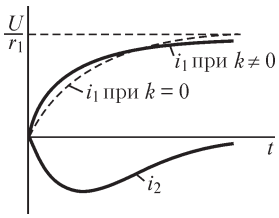


Рис. 9.31

9.13. Расчет переходных процессов методом переменных состояния

Приведенные в предыдущем параграфе примеры показывают, что формирование и решение уравнений, описывающих переходные процессы, даже для сравнительно простых цепей оказываются весьма трудоемкими. В связи с этим боль-

шое значение имеет разработка компьютерных методов решения этих задач. В настоящем параграфе будет рассмотрен метод переменных состояния, который исторически явился первым методом, позволившим алгоритмизировать формирование уравнений для электрических цепей достаточно общего вида.

Понятие переменных состояния было введено в § 9.3. Энергия магнитного поля $W_м$ катушки с индуктивностью L может быть выражена через ток i_L катушки или ее потокосцепление Ψ:

$$W_м = \frac{\Psi^2}{2L} = \frac{Li_L^2}{2}.$$

Энергия электрического поля $W_э$ конденсатора с емкостью C аналогичным образом может быть выражена через напряжение u_C на обкладках конденсатора или его заряд q:

$$W_э = \frac{q^2}{2C} = \frac{Cu_C^2}{2}.$$

Таким образом, энергетическое состояние электрической цепи может быть однозначно определено указанием значений потокосцеплений или токов всех катушек индуктивности и зарядов или напряжений всех конденсаторов. Для определенности, будем использовать далее в качестве переменных состояния токи катушек индуктивностей i_L и напряжения конденсаторов u_C.

Метод переменных состояния позволяет формировать систему дифференциальных уравнений относительно переменных состояния $x_1, x_2, ..., x_n$ в так называемой нормальной форме:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1(t);\\
&\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + f_2(t);\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\
&\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n(t),
\end{aligned}$$

где a_{ij} $(i, j = 1, 2, ..., n)$ — элементы квадратной матрицы, определяемой топологией анализируемой цепи и параметрами ее элементов, f_i $(i = 1, 2, ..., n)$ — элементы вектора, также определяемые топологией цепи и параметрами действующих в ней источников электромагнитной энергии.

Чтобы каждое уравнение, написанное согласно первому и второму законам Кирхгофа, было дифференциальным уравнением первого порядка относительно i_L и u_C, каждый контур и сечение должны содержать только один реактивный элемент.

При составлении уравнений согласно первому закону Кирхгофа в графе цепи следует выделить ветвь дерева, через которую проходит сечение. При этом поверхность, которая разделяет цепь на две части, пересечет некоторое число *связей* (*хорд*) и только одну ветвь *дерева*.

Уравнение баланса токов для такого r-го сечения является дифференциальным уравнением первого порядка относительно одной переменой, если j-я ветвь

дерева содержит конденсатор. В такой ветви ток связан с напряжением конденсатора следующим образом:

$$i_{Cj} = C_j \frac{du_{Cj}}{dt}.$$

Такое r-е уравнение в матричной форме записи $\mathbf{Di} = \mathbf{0}$ системы уравнений первого закона Кирхгофа можно представить в виде

$$d_{rj} C_j \frac{du_{Cj}}{dt} = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{l} d_{rk} i_k,$$

где l — число ветвей цепи; $d_{r1}, d_{r2}, ..., d_{rl}$ — элементы r-й строки матрицы сечений $\mathbf{D}$.

Уравнение баланса напряжений в s-м контуре является дифференциальным уравнением первого порядка относительно одной переменной, если связь (хорда), образующая контур, содержит катушку индуктивности. В такой p-й ветви

$$u_{Lp} = L \frac{di_{Lp}}{dt}.$$

Тогда s-е уравнение в матричной записи $\mathbf{Cu} = \mathbf{0}$ системы уравнений второго закона Кирхгофа можно записать так:

$$c_{sp} L_p \frac{di_p}{dt} = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{l} c_{sk} u_k,$$

где $c_{s1}, c_{s2}, ..., c_{sl}$ — элементы s-й строки матрицы контуров $\mathbf{C}$.

Таким образом, чтобы составить систему уравнений в нормальной форме, следует в качестве переменных брать напряжения конденсаторов, относя ветви, содержащие эти элементы, к ветвям дерева, а также токи катушек индуктивности, относя ветви, содержащие эти элементы, к связям.

Матрично-топологический метод составления системы уравнений для расчета установившихся режимов, как правило, связан с введением понятия обобщенной ветви, содержащей наряду с пассивными элементами в ветви (r, L, C) также источник ЭДС, последовательно соединенный с пассивной частью ветви, и источник тока, включенный параллельно ветви с ЭДС. Введение этого понятия при возможности эквивалентных преобразований источников ЭДС в источники тока и наоборот позволяет составить наиболее экономные (в смысле числа неизвестных) системы уравнений. Сокращение числа узлов и ветвей в таком случае упрощает и описание цепи.

При составлении уравнений состояния введение обобщенных ветвей осложняет последующие преобразования. Поэтому целесообразно за счет выделения каждого элемента электрической цепи в отдельную ветвь упростить составление системы дифференциальных уравнений. Если каждый элемент электрической цепи выделяется в качестве ветви, то отнесение ветвей к дереву или к связям следует производить с учетом следующего. К ветвям дерева должны быть последовательно отнесены сначала ветви с источниками ЭДС, затем ветви с конденсаторами. Если такое дерево не связывает все узлы, то должны быть добавлены

ветви с резисторами и только в последнюю очередь ветви с катушками индуктивности. Дерево, составленное согласно этому правилу, называют *нормальным*. Соответственно в качестве связей (хорд) сначала должны быть выделены источники тока, затем индуктивные элементы и резистивные ветви и в последнюю очередь ветви с конденсаторами. Подграф, составленный согласно этому правилу, называют *нормальным подграфом связей* (*хорд*). Граф электрической цепи, содержащий нормальное дерево и нормальный подграф связей, считают *нормальным* или *правильным*.

Согласно условиям составления нормального дерева и дополнения его до полного графа, токи и напряжения электрической цепи можно записать в виде

$$\mathbf{i}=\left\| \mathbf{i}_{E\text{д}}^{t}\ \mathbf{i}_{C\text{д}}^{t}\ \mathbf{i}_{R\text{д}}^{t}\ \mathbf{i}_{L\text{д}}^{t}\ \mathbf{i}_{\text{Э}\text{с}}^{t}\ \mathbf{i}_{L\text{с}}^{t}\ \mathbf{i}_{G\text{с}}^{t}\ \mathbf{i}_{C\text{с}}^{t} \right\|^{t} = \left\| \mathbf{i}_{\text{д}}^{t}\ \mathbf{i}_{\text{с}}^{t} \right\|^{t},$$

$$\mathbf{u}=\left\| \mathbf{u}_{E\text{д}}^{t}\ \mathbf{u}_{C\text{д}}^{t}\ \mathbf{u}_{R\text{д}}^{t}\ \mathbf{u}_{L\text{д}}^{t}\ \mathbf{u}_{\text{Э}\text{с}}^{t}\ \mathbf{u}_{L\text{с}}^{t}\ \mathbf{u}_{G\text{с}}^{t}\ \mathbf{u}_{C\text{с}}^{t} \right\|^{t} = \left\| \mathbf{u}_{\text{д}}^{t}\ \mathbf{u}_{\text{с}}^{t} \right\|^{t},$$

где $\mathbf{i}_{E\text{д}}$, $\mathbf{u}_{E\text{д}}$ — токи и напряжения ветвей дерева с источниками ЭДС; $\mathbf{i}_{C\text{д}}$, $\mathbf{u}_{C\text{д}}$ — токи и напряжения конденсаторов, входящих в состав ветвей дерева; $\mathbf{i}_{R\text{д}}$, $\mathbf{u}_{R\text{д}}$ — токи и напряжения резисторов, составляющих ветви дерева; $\mathbf{i}_{L\text{д}}$, $\mathbf{u}_{L\text{д}}$ — токи и напряжения катушек индуктивностей, входящих в ветви дерева, $\mathbf{i}_{\text{с}}$, $\mathbf{u}_{\text{с}}$ — токи и напряжения источников тока, отнесенных к подграфу связей; $\mathbf{i}_{L\text{с}}$, $\mathbf{u}_{L\text{с}}$ — токи и напряжения катушек индуктивностей, включенных в подграф связей, $\mathbf{i}_{R\text{с}}$, $\mathbf{u}_{R\text{с}}$ — токи и напряжения резисторов, входящих в подграф связей; $\mathbf{i}_{C\text{с}}$, $\mathbf{u}_{C\text{с}}$ — токи и напряжения конденсаторов, входящих в подграф связей.

Возможны случаи, когда в электрической цепи имеются контуры, состоящие только из конденсаторов и (или) источников ЭДС, или сечения, содержащие только катушки индуктивности и (или) источники тока. Задачи расчета таких цепей рассмотрены в § 9.11.

В соответствии с таким разбиением ветвей можно выделить четыре подматрицы-строки в матрице контуров **C**, соответствующие: 1) ветвям-связям, содержащим источники тока; 2) ветвям-связям, содержащим катушки индуктивности; 3) ветвям-связям, содержащим резистивные элементы; 4) ветвям-связям, содержащим конденсаторы. Следовательно,

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \\ \text{Э}_{\text{с}} \\ L_{\text{с}} \\ g_{\text{с}} \\ C_{\text{с}} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} E_{\text{д}} & C_{\text{д}} & r_{\text{д}} & L_{\text{д}} & \text{Э}_{\text{с}} & L_{\text{с}} & g_{\text{с}} & C_{\text{с}} \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccccccc} \mathbf{F}_{\text{Э}E} & \mathbf{F}_{\text{Э}C} & \mathbf{F}_{\text{Э}R} & \mathbf{F}_{\text{Э}L} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{LE} & \mathbf{F}_{LC} & \mathbf{F}_{LR} & \mathbf{F}_{LL} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{GE} & \mathbf{F}_{GC} & \mathbf{F}_{GR} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{CE} & \mathbf{F}_{CC} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right\| \end{array}$$

По приоритету отнесения конденсаторов к подграфу связей в контур, образованный звеном (конденсатором), не могут войти резистивная и индуктивная ветви дерева, т. е. равны нулю подматрицы $\mathbf{F}_{CR}$ и $\mathbf{F}_{CL}$. Действительно, емкостная ветвь может быть отнесена к категории связей, если она образует контур, содержащий источник ЭДС и конденсаторы. Если некоторый узел соединен с другими узлами индуктивными элементами, то ветвь с одной из них должна войти

в состав дерева. Тогда ветвь $L_д$ может войти в сечения, образованные $L_с$-связями. Таким образом, в сечения, образованные из $g_с$ резистивных ветвей-связей, ветви дерева $L_д$ не входят. Следовательно, равен нулю и элемент $\mathbf{F}_{GL}$.

В соответствии с известными соотношениями $\mathbf{D} = \left\| \mathbf{1} - \mathbf{F}^t \right\|$, $\mathbf{C} = \left\| \mathbf{F}\ \mathbf{1} \right\|$ законы Кирхгофа можно записать следующим образом:

$$\mathbf{Di} = \begin{array}{c} \\ E_д \\ C_д \\ R_д \\ L_д \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} E_д & C_д & r_д & L_д & \mathfrak{I}_с & L_с & g_с & C_с \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{F}^t_{\mathfrak{I}E} & -\mathbf{F}^t_{LE} & -\mathbf{F}^t_{GE} & -\mathbf{F}^t_{CE} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{F}^t_{\mathfrak{I}C} & -\mathbf{F}^t_{LC} & -\mathbf{F}^t_{GC} & -\mathbf{F}^t_{CC} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{F}^t_{\mathfrak{I}R} & -\mathbf{F}^t_{LR} & -\mathbf{F}^t_{GR} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\mathbf{F}^t_{\mathfrak{I}L} & -\mathbf{F}^t_{LL} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\| \end{array} \mathbf{i} = \mathbf{0};$$

$$\left\| \mathbf{1} - \mathbf{F}^t \right\| \left\| \begin{array}{c} \mathbf{i}_д \\ \mathbf{i}_с \end{array} \right\| = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{Cu} = \begin{array}{c} \\ \mathfrak{I}_с \\ L_с \\ g_с \\ C_с \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} E_д & C_д & r_д & L_д & \mathfrak{I}_с & L_с & G_с & C_с \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccccc} \mathbf{F}_{\mathfrak{I}E} & \mathbf{F}_{\mathfrak{I}C} & \mathbf{F}_{\mathfrak{I}R} & \mathbf{F}_{\mathfrak{I}L} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{LE} & \mathbf{F}_{LC} & \mathbf{F}_{LR} & \mathbf{F}_{LL} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{GE} & \mathbf{F}_{GC} & \mathbf{F}_{GR} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{CE} & \mathbf{F}_{CC} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right\| \end{array} \mathbf{u} = \mathbf{0};$$

$$\left\| \mathbf{F}\ \mathbf{1} \right\| \left\| \begin{array}{c} \mathbf{u}_д \\ \mathbf{u}_с \end{array} \right\| = \mathbf{0};$$

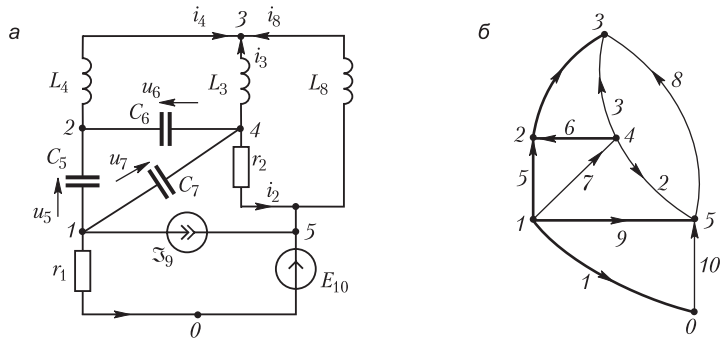
где $\mathbf{1}$ — единичные матрицы, размерности которых определяются числом строк в подматрицах $\mathbf{F}_{ij}$; $E_д$, $C_д$ — номера ветвей, входящих в дерево и содержащих источники ЭДС, конденсаторы и т. д.; $_с$, $L_с$ — номера ветвей, входящих в подграф связей и содержащих источники тока, индуктивные элементы и др. Ранжирование ветвей и их нумерация подчинены правилам составления нормальных дерева и подграфа связей. При составлении нормального графа электрической цепи матрицу соединений $\mathbf{A}$ также следует упорядочить, расположив ветви таким образом, чтобы сначала были перечислены ветви нормального дерева, а затем уже и нормального подграфа связей: $\mathbf{A} = \left\| \mathbf{A}_д\ \mathbf{A}_с \right\|$. Для нормального графа справедливо равенство

$$\mathbf{Ai} = \mathbf{0}, \quad \left\| \mathbf{A}_д\ \mathbf{A}_с \right\| \left\| \begin{array}{c} \mathbf{i}_д \\ \mathbf{i}_с \end{array} \right\| = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{A}$ — матрица соединений размерности $(q - 1) \times l$ (q — число узлов, l — число ветвей); $\mathbf{i}$ — вектор-столбец токов (включая ветви с источниками тока) размерностью l. Из соотношений $\mathbf{A}_д\mathbf{i}_д = -\mathbf{A}_с\mathbf{i}_с$, $\mathbf{i}_д = \mathbf{F}^t\mathbf{i}_с$ следует, что $-\mathbf{F}^t = \mathbf{A}_д^{-1}\mathbf{A}_с$. Таким образом, составление с помощью компьютера матриц $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ можно произвести

на основании матрицы соединений **A**, которая вводится в компьютер в качестве части исходных данных, представляющих описание топологии электрической цепи.

Рассмотрим формирование уравнений состояния для электрической цепи, представленной на рис. 9.32. Параметры цепи в системе СИ сведем в табл. 9.1. Эта таблица может быть заполнена в любой последовательности, по мере введения топологического описания в компьютер.



$r_1 = 10^{-13}$ Ом; $r_2 = 0{,}015$ Ом; $L_3 = 0{,}5$ мГн; $L_4 = 7{\cdot}10^{-5}$ Гн; $C_5 = 0{,}11$ пФ; $C_6 = 0{,}21$ пФ; $C_7 = 0{,}1$ пФ; $L_8 = 10^{-5}$ Гн; $\mathfrak{I}_9 = 0{,}1$ А; $E_{10} = 1{,}2$ В

Рис. 9.32

Таблица 9.1

Элемент	№ ветви	Начальный узел	Конечный узел	Значения параметров
r	1	1	0	10^{-13}
g	2	4	5	$1{,}5{\cdot}10^{-2}$
L	3	4	3	$5{\cdot}10^{-4}$
L	4	2	3	$7{\cdot}10^{-5}$
C	5	1	2	$1{,}1{\cdot}10^{-13}$
C	6	4	2	$2{,}1{\cdot}10^{-13}$
C	7	1	4	10^{-13}
L	8	5	3	10^{-5}
	9	1	5	10^{-1}
E	10	0	5	1,2

В дальнейшем она может быть перестроена в соответствии с правилами составления нормального графа электрической цепи. Перестроенная табл. 9.2 и служит основой для составления матриц **A**, **C** и **D** и расчета матрицы **F**. Используя табл. 9.2, можно составить следующие матрицы:

Таблица 9.2

Элемент	№ ветви	Начальный узел	Конечный узел	Значения параметров
E	10	0	5	1,2
C	5	1	2	$1{,}1\cdot10^{-13}$
C	6	4	2	$2{,}1\cdot10^{-13}$
r	1	1	0	10^{-13}
L	4	2	3	$7\cdot10^{-5}$
$\mathfrak{J}$	9	1	5	10^{-1}
L	3	4	3	$5\cdot10^{-4}$
L	8	4	3	10^{-5}
g	2	5	5	$1{,}5\cdot10^{-2}$
C	7	1	4	10^{-13}

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \text{Ветви} \\ \text{Узлы} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left\| \begin{array}{ccccc|ccccc} 10 & 5 & 6 & 1 & 4 & 9 & 3 & 8 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\mathbf{A}_д} & & & & & \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\mathbf{A}_с} & & & & \end{array} \right\| ;$$

$$\mathbf{A}_д^{-1} = \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right\| ; \quad -\mathbf{F}^t = \mathbf{A}_д^{-1} \cdot \mathbf{A}_с = \begin{array}{c} \\ 10 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{array} \left\| \begin{array}{ccccc} 9 & 3 & 8 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| ;$$

$$\mathbf{F} = \begin{array}{c} \\ 9 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \\ 7 \end{array} \left\| \begin{array}{ccccc} 10 & 5 & 6 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| .$$

Из матрицы **F** следует, что

$$\mathbf{F}_{\mathfrak{I}E} = 9\begin{array}{c}10\\ \boxed{-1}\\ E_{\text{д}}\end{array}\mathfrak{I}_{\text{с}};\quad \mathbf{F}_{\mathfrak{I}C} = 9\begin{array}{c}5\ \ 6\\ \boxed{0}\boxed{0}\\ C_{\text{д}}\end{array}\mathfrak{I}_{\text{с}};\quad \mathbf{F}_{\mathfrak{I}R} = 9\begin{array}{c}1\\ \boxed{-1}\\ r_{\text{д}}\end{array}\mathfrak{I}_{\text{с}};\quad \mathbf{F}_{\mathfrak{I}L} = 9\begin{array}{c}4\\ \boxed{0}\\ L_{\text{д}}\end{array}\mathfrak{I}_{\text{с}};$$

$$\mathbf{F}_{LE} = \begin{array}{c}10\\ 3\ \boxed{0}\\ 8\ \boxed{1}\\ E_{\text{д}}\end{array}L_{\text{с}};\quad \mathbf{F}_{LC} = \begin{array}{c}5\ \ 6\\ 3\ \boxed{0}\boxed{-1}\\ 8\ \boxed{-1}\boxed{0}\\ C_{\text{д}}\end{array}L_{\text{с}};\quad \mathbf{F}_{LR} = \begin{array}{c}1\\ 3\ \boxed{0}\\ 8\ \boxed{1}\\ r_{\text{д}}\end{array}L_{\text{с}};\quad \mathbf{F}_{LL} = \begin{array}{c}4\\ 3\ \boxed{-1}\\ 8\ \boxed{-1}\\ L_{\text{д}}\end{array}L_{\text{с}};$$

$$\mathbf{F}_{GE} = 2\begin{array}{c}10\\ \boxed{-1}\\ E_{\text{д}}\end{array}G_{\text{с}};\quad \mathbf{F}_{GC} = 2\begin{array}{c}5\ \ 6\\ \boxed{1}\boxed{-1}\\ C_{\text{д}}\end{array}g_{\text{с}};\quad \mathbf{F}_{GR} = 2\begin{array}{c}1\\ \boxed{-1}\\ r_{\text{д}}\end{array}G_{\text{с}};\quad \mathbf{F}_{GL} = 2\begin{array}{c}4\\ \boxed{0}\\ L_{\text{д}}\end{array}G_{\text{с}};$$

$$\mathbf{F}_{CE} = 7\begin{array}{c}10\\ \boxed{1}\\ E_{\text{д}}\end{array}C_{\text{с}};\quad \mathbf{F}_{CC} = 7\begin{array}{c}5\ \ 6\\ \boxed{-1}\boxed{1}\\ C_{\text{д}}\end{array}C_{\text{с}};\quad \mathbf{F}_{CR} = 7\begin{array}{c}1\\ \boxed{0}\\ r_{\text{д}}\end{array}C_{\text{с}};\quad \mathbf{F}_{CL} = 7\begin{array}{c}4\\ \boxed{0}\\ L_{\text{д}}\end{array}C_{\text{с}};$$

Приведенное описание электрической цепи в виде, удобном для ввода в компьютер, не является единственным. Так, табл. 9.1 содержит информацию лишь о характере элементов, числе ветвей, условно-положительных направлениях токов и напряжений (с помощью введения в таблицу понятий начального и конечного узлов), значениях параметров и позволяет описать электрические цепи, состоящие только из двухполюсников. Описание электрических цепей, содержащих многополюсные элементы, следует выполнить иным способом — путем введения дополнительных столбцов, характеризующих число полюсов и номеров узлов, к которым они присоединены, и ссылки на дополнительные списки параметров, описывающие эти многополюсники или их эквивалентные электрические схемы.

Переход от табл. 9.1 к табл. 9.2 производят с помощью последовательного перебора элементов. Сначала в табл. 9.1 выделяется строка с ветвью, содержащей ЭДС, в качестве первой строки табл. 9.2. После обработки ветвей с ЭДС в табл. 9.1 выбирают строки с емкостными элементами. При выделении каждой строки в табл. 9.1 проверяется соблюдение условия, при котором новый элемент не образует контур с уже помещенными в табл. 9.2 элементами. Для этого достаточно, чтобы хотя бы один из узлов нового элемента не содержался в списке узлов, перечисленных ранее. Если это условие не выполняется, то данный элемент записывается в конце табл. 9.2. Добавление ветвей с элементами C, r и L производят до тех пор, пока в список узлов не войдут все узлы электрической цепи. Если соблюдено правило проверки отсутствия контуров, то полная комплектация списка узлов свидетельствует о том, что список ветвей, образующих нормальное дерево (рис. 9.32, *б*), в табл. 9.2 заполнен. После этого формируется подграф связей, содержащий источники тока, индуктивные катушки, резисторы и уже записанные в конце табл. 9.2 конденсаторы.

Составление матрицы **A** на основе табл. 9.2 не составляет трудностей. Достаточно нумеровать строки матрицы **A** по номерам узлов, а столбцы — согласно номерам ветвей в табл. 9.2. Начальный узел в табл. 9.2 для данной ветви опреде-

ляет элемент матрицы **A**, равный +1 (например, для ветви *5* начальный узел в табл. 9.2 совпадает с узлом *1*; следовательно, элемент a_{15} матрицы **A** равен +1). Конечный узел в табл. 9.2 для данной ветви характеризует элемент матрицы **A**, равный –1 (например, для ветви *4* конечный узел в табл. 9.2 совпадает с узлом *3*; следовательно, элемент a_{34} матрицы **A** равен –1). Заметим, что номера столбцов матрицы **A** аналогичны номерам соответствующих ветвей нормального графа. Имеет смысл произвести перенумерацию ветвей таким образом, чтобы номера столбцов матрицы **A** с 1 до *l* совпадали с новыми номерами ветвей нормального графа. Для этого достаточно произвести перенумерацию следующим образом: ветви *10* присвоить порядковый номер *1* (10 → 1), ветви *5* — порядковый номер *2* (5 → 2) и т. д.: 6 → 3, 1 → 4, 4 → 5, 9 → 6, 3 → 7, 8 → 8, 2 → 9, 7 → 10. Такую перенумерацию следует произвести для исключения путаницы в обозначениях матриц **A**, **C**, **D** и перехода к привычному способу счета номеров строк и столбцов матриц (a_{ij} будет характеризовать элемент матрицы **A**, принадлежащий *i*-й строке и *j*-му столбцу).

Систему уравнений **Cu** = **0** и **Di** = **0** можно записать в развернутом виде:

$$\mathbf{Cu} = \left\| \mathbf{F}\ \mathbf{1} \right\| \left\| \begin{matrix} \mathbf{u}_{\text{д}} \\ \mathbf{u}_{\text{с}} \end{matrix} \right\| = \mathbf{F}\mathbf{u}_{\text{д}} + \mathbf{u}_{\text{с}} = \mathbf{0} \quad \text{или} \quad \mathbf{u}_{\text{с}} = -\mathbf{F}\mathbf{u}_{\text{д}};$$

$$\mathbf{Di} = \left\| \mathbf{1} - \mathbf{F}^t \right\| \left\| \begin{matrix} \mathbf{i}_{\text{д}} \\ \mathbf{i}_{\text{с}} \end{matrix} \right\| = \mathbf{i}_{\text{д}} - \mathbf{F}^t \mathbf{i}_{\text{с}} = \mathbf{0} \quad \text{или} \quad \mathbf{i}_{\text{д}} = \mathbf{F}^t \mathbf{i}_{\text{с}};$$

Уравнения для подматриц токов и напряжений

$$\mathbf{i}_{\text{с}} = \left\| \mathfrak{I}_{\text{с}}\ \mathbf{i}_{L\text{с}}\ \mathbf{i}_{G\text{с}}\ \mathbf{i}_{C\text{с}} \right\|^t; \quad \mathbf{u}_{\text{с}} = \left\| \mathbf{u}_{\mathfrak{I}\text{с}}\ \mathbf{u}_{L\text{с}}\ \mathbf{u}_{G\text{с}}\ \mathbf{u}_{C\text{с}} \right\|^t;$$

$$\mathbf{i}_{\text{д}} = \left\| \mathbf{i}_{E\text{д}}\ \mathbf{i}_{C\text{д}}\ \mathbf{i}_{R\text{д}}\ \mathbf{i}_{L\text{д}} \right\|^t; \quad \mathbf{u}_{\text{д}} = \left\| \mathbf{u}_{E\text{д}}\ \mathbf{u}_{C\text{д}}\ \mathbf{u}_{R\text{д}}\ \mathbf{u}_{L\text{д}} \right\|^t$$

можно записать в развернутом виде через матрицу **F**:

$$\mathbf{u}_{\mathfrak{I}_{\text{с}}} = -\mathbf{F}_{\mathfrak{I}E}\mathbf{u}_{E\text{д}} - \mathbf{F}_{\mathfrak{I}C}\mathbf{u}_{C\text{д}} - \mathbf{F}_{\mathfrak{I}R}\mathbf{u}_{R\text{д}} - \mathbf{F}_{\mathfrak{I}L}\mathbf{u}_{L\text{д}}; \tag{1}$$

$$\mathbf{u}_{L_{\text{с}}} = -\mathbf{F}_{LE}\mathbf{u}_{E\text{д}} - \mathbf{F}_{LC}\mathbf{u}_{C\text{д}} - \mathbf{F}_{LR}\mathbf{u}_{R\text{д}} - \mathbf{F}_{LL}\mathbf{u}_{L\text{д}}; \tag{2}$$

$$\mathbf{u}_{G_{\text{с}}} = -\mathbf{F}_{GE}\mathbf{u}_{E\text{д}} - \mathbf{F}_{GC}\mathbf{u}_{C\text{д}} - \mathbf{F}_{GR}\mathbf{u}_{R\text{д}}; \tag{3}$$

$$\mathbf{u}_{C\text{с}} = -\mathbf{F}_{CE}\mathbf{u}_{E\text{д}} - \mathbf{F}_{CC}\mathbf{u}_{C\text{д}}; \tag{4}$$

$$\mathbf{i}_{E_{\text{д}}} = \mathbf{F}^t_{\mathfrak{I}E}\mathfrak{I}_{\text{с}} + \mathbf{F}^t_{LE}\mathbf{i}_{L\text{с}} + \mathbf{F}^t_{GE}\mathbf{i}_{G\text{с}} + \mathbf{F}^t_{CE}\mathbf{i}_{C\text{с}}; \tag{5}$$

$$\mathbf{i}_{C_{\text{д}}} = \mathbf{F}^t_{\mathfrak{I}C}\mathfrak{I}_{\text{с}} + \mathbf{F}^t_{LC}\mathbf{i}_{L\text{с}} + \mathbf{F}^t_{GC}\mathbf{i}_{G\text{с}} + \mathbf{F}^t_{CC}\mathbf{i}_{C\text{с}}; \tag{6}$$

$$\mathbf{i}_{R\text{д}} = \mathbf{F}^t_{\mathfrak{I}R}\mathfrak{I}_{\text{с}} + \mathbf{F}^t_{LR}\mathbf{i}_{L\text{с}} + \mathbf{F}^t_{GR}\mathbf{i}_{G\text{с}}; \tag{7}$$

$$\mathbf{i}_{L\text{д}} = \mathbf{F}^t_{\mathfrak{I}L}\mathfrak{I}_{\text{с}} + \mathbf{F}^t_{LL}\mathbf{i}_{L\text{с}}. \tag{8}$$

Согласно последнему соотношению и закону электромагнитной индукции, при наличии взаимной индуктивной связи между всеми катушками индуктивности можно записать

$$\left\|\begin{matrix}\mathbf{u}_{L\text{д}}\\ \mathbf{u}_{L\text{c}}\end{matrix}\right\| = \frac{d}{dt}\left\|\begin{matrix}\mathbf{L}_{\text{д,д}} & \mathbf{L}_{\text{д,c}}\\ \mathbf{L}_{\text{c,д}} & \mathbf{L}_{\text{c,c}}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\mathbf{i}_{L\text{д}}\\ \mathbf{i}_{L\text{c}}\end{matrix}\right\| = \frac{d}{dt}\left\{\left\|\begin{matrix}\mathbf{L}_{\text{д,д}} & \mathbf{L}_{\text{д,c}}\\ \mathbf{L}_{\text{c,д}} & \mathbf{L}_{\text{c,c}}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\mathbf{F}^t_{L\mathfrak{I}}\,\mathfrak{I}_{\text{c}} + \mathbf{F}^t_{LL}\mathbf{i}_{L\text{c}}\\ \mathbf{i}_{L\text{c}}\end{matrix}\right\|\right\}, \qquad (9)$$

где $\mathbf{i}_{L\text{д}}$, $\mathbf{u}_{L\text{д}}$ — подматрицы токов и напряжения индуктивных катушек, вошедших в дерево графа; $\mathbf{i}_{L\text{c}}$, $\mathbf{u}_{L\text{c}}$ — подматрицы токов и напряжения катушек индуктивности элементов, вошедших в подграф связей.

Также, согласно выражению для токов через конденсаторы, получаем

$$\left\|\begin{matrix}\mathbf{i}_{C\text{д}}\\ \mathbf{i}_{C\text{c}}\end{matrix}\right\| = \frac{d}{dt}\left\|\begin{matrix}\mathbf{C}_{\text{д}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\text{c}}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\mathbf{u}_{C\text{д}}\\ \mathbf{u}_{C\text{c}}\end{matrix}\right\|. \qquad (10)$$

Для резистивных элементов

$$\left\|\begin{matrix}\mathbf{i}_{G\text{д}}\\ \mathbf{i}_{R\text{c}}\end{matrix}\right\| = \frac{d}{dt}\left\|\begin{matrix}\mathbf{G}_{\text{д}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^{-1}_{\text{c}}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\mathbf{u}_{G\text{д}}\\ \mathbf{u}_{R\text{c}}\end{matrix}\right\| \text{ или } \left\|\begin{matrix}\mathbf{u}_{G\text{д}}\\ \mathbf{u}_{R\text{c}}\end{matrix}\right\| = \frac{d}{dt}\left\|\begin{matrix}\mathbf{G}^{-1}_{\text{д}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\text{c}}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\mathbf{i}_{G\text{д}}\\ \mathbf{i}_{R\text{c}}\end{matrix}\right\|. \qquad (11)$$

Если каждый из подграфов резистивных ветвей, входящих в дерево или подграф связей, содержит управляемые напряжением источники тока, то они могут быть учтены в матрицах $\mathbf{G}_{\text{д}}$ и $\mathbf{R}_{\text{c}}$. Например, если в i-й резистивной ветви, входящей в дерево, имеется источник тока $\mathfrak{I}_i = g_{ij}u_j$, управляемый напряжением j-й резистивной ветви дерева u_j, то соответствующий элемент g_{ij} матрицы $\mathbf{G}_{\text{д}}$ равен g_{ij}. (Заметим, что $g_{ij} = 0$, если в ветви i отсутствует управляемый напряжением u_j источник тока.) Точно так же, если в подграфе связей содержится управляемый напряжением связи u_s источник тока $_q = g_{sq}u_s$, то его можно учесть добавлением в подматрицу $\mathbf{G}_{\text{c}}$ элемента g_{sq}. Путем взаимных эквивалентных преобразований источников тока и ЭДС можно учесть все виды зависимых источников. При наличии источников тока, управляемых напряжением ветвей дерева, последнее выражение имеет вид

$$\left\|\begin{matrix}\mathbf{i}_{G\text{д}}\\ \mathbf{i}_{R\text{c}}\end{matrix}\right\| = \frac{d}{dt}\left\|\begin{matrix}\mathbf{G}_{\text{д,д}} & \mathbf{G}_{\text{д,c}}\\ \mathbf{G}_{\text{c,д}} & \mathbf{G}_{\text{c,c}}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\mathbf{u}_{G\text{д}}\\ \mathbf{u}_{R\text{c}}\end{matrix}\right\| \text{ или } \left\|\begin{matrix}\mathbf{u}_{G\text{д}}\\ \mathbf{u}_{R\text{c}}\end{matrix}\right\| = \frac{d}{dt}\left\|\begin{matrix}\mathbf{G}_{\text{д,д}} & \mathbf{G}_{\text{д,c}}\\ \mathbf{G}_{\text{c,д}} & \mathbf{G}_{\text{c,c}}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\mathbf{i}_{G\text{д}}\\ \mathbf{i}_{R\text{c}}\end{matrix}\right\|.$$

Для упрощения дальнейших выкладок предположим, что в цепи управляемые источники таковы, что их можно учесть в подграфах

$$\mathbf{G}_{\text{д,д}} = \mathbf{G}_{\text{д}},\ \ \mathbf{G}_{\text{c,c}} = \mathbf{G}_{\text{c}},\ \ (\mathbf{G}_{\text{д,c}} = \mathbf{G}_{\text{c,д}} = 0).$$

В системе (1)—(8) дифференциальными являются уравнения (2) и (6). Для них

$$\frac{d}{dt}\left\|\mathbf{C}_{\text{c,д}}\ \mathbf{u}_{\text{c,д}}\right\| = \mathbf{F}^t_{\mathfrak{I}C}\mathfrak{I}_{\text{c}} + \mathbf{F}^t_{LC}\mathbf{i}_{L\text{c}} + \mathbf{F}^t_{GC}\mathbf{i}_{G\text{c}} + \mathbf{F}^t_{CC}\mathbf{i}_{C\text{c}}; \qquad (12)$$

$$\frac{d}{dt}\left\|\mathbf{L}_{\text{c,д}}\mathbf{i}_{L\text{д}} + \mathbf{L}_{\text{c,c}}\mathbf{i}_{L\text{c}}\right\| = -\mathbf{F}_{LE}\mathbf{u}_{E\text{д}} - \mathbf{F}_{LC}\mathbf{u}_{C\text{д}} - \mathbf{F}_{LR}\mathbf{u}_{R\text{д}} - \mathbf{F}_{LL}\mathbf{u}_{L\text{д}}. \qquad (13)$$

Согласно (3) и (7)

$$\mathbf{G}_{\text{д}}\mathbf{u}_{R\text{д}} = \mathbf{F}^t_{\mathfrak{I}R}\mathfrak{I}_{\text{c}} + \mathbf{F}^t_{LR}\mathbf{i}_{L\text{c}} + \mathbf{F}^t_{GR}\mathbf{G}_{\text{c}}(-\mathbf{F}_{GE}\mathbf{u}_{E\text{д}} - \mathbf{F}_{GC}\mathbf{u}_{C\text{д}}\mathbf{F}_{GR}\mathbf{u}_{R\text{д}});$$

$$\mathbf{u}_{R\text{д}} = (\mathbf{G}_{\text{д}} + \mathbf{F}^t_{GR}\mathbf{G}_{\text{c}}\mathbf{F}_{GR})^{-1}(\mathbf{F}^t_{\mathfrak{I}R}\mathfrak{I}_{\text{c}} + \mathbf{F}^t_{LR}\mathbf{i}_{L\text{c}} - \mathbf{F}^t_{GR}\mathbf{G}_{\text{c}}\mathbf{F}_{GE}\mathbf{u}_{E\text{д}} - \mathbf{F}^t_{GR}\mathbf{G}_{\text{c}}\mathbf{F}_{GC}\mathbf{u}_{C\text{д}});$$

$$\mathbf{R}_{\text{с}}\mathbf{i}_{G\text{с}} = -\mathbf{F}_{GE}\mathbf{u}_{E\text{д}} - \mathbf{F}_{GC}\mathbf{u}_{C\text{д}} - \mathbf{F}_{GR}\mathbf{R}_{\text{д}}(\mathbf{F}^t_{\Im R}\mathbf{\Im}_{\text{с}} + \mathbf{F}^t_{LR}\mathbf{i}_{L\text{с}} + \mathbf{F}^t_{GR}\mathbf{i}_{G\text{с}}); \quad (14)$$

$$\mathbf{i}_{G\text{с}} = (\mathbf{R}_{\text{с}} + \mathbf{F}_{GR}\mathbf{R}_{\text{д}}\mathbf{F}^t_{GR})^{-1}(-\mathbf{F}_{GE}\mathbf{u}_{E\text{д}} - \mathbf{F}_{GC}\mathbf{u}_{C\text{д}} - \mathbf{F}_{GR}\mathbf{R}_{\text{д}}\mathbf{F}^t_{\Im R}\mathbf{\Im}_{\text{с}} - \mathbf{F}_{GR}\mathbf{R}_{\text{д}}\mathbf{F}^t_{LR}\mathbf{i}_{L\text{с}}). \quad (15)$$

Из (8) и (9), а также (4) и (10) следует

$$\mathbf{u}_{L\text{д}} = \frac{d}{dt}[\mathbf{L}_{\text{д,д}}(\mathbf{F}^t_{L\Im}\mathbf{\Im}_{\text{с}} + \mathbf{F}^t_{LL}\mathbf{i}_{L\text{с}}) + \mathbf{L}_{\text{дс}}\mathbf{i}_{L\text{д}}]; \quad (16)$$

$$\mathbf{i}_{C\text{с}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{C}_{\text{с,с}}\ \mathbf{u}_{C\text{с}}) = \frac{d}{dt}\mathbf{C}_{\text{с,с}}\ (-\mathbf{F}_{CE}\mathbf{u}_{E\text{д}} - \mathbf{F}_{CC}\mathbf{u}_{C\text{д}}). \quad (17)$$

Подставив в (12) из (15) и (17), а в (13) из (14) и (16) и введя обозначения

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\text{с}} + \mathbf{F}_{GR}\mathbf{R}_{\text{д}}\mathbf{F}^t_{GR}; \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}_{\text{д}} + \mathbf{F}^t_{GR}\mathbf{G}_{\text{с}}\mathbf{F}_{GR}; \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_{\text{д}} + \mathbf{F}^t_{CC}\mathbf{C}_{\text{с}}\mathbf{F}_{CC};$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\text{с,с}} + \mathbf{F}_{LL}\mathbf{L}_{\text{д,д}}\mathbf{F}^t_{LL} + \mathbf{F}_{LL}\mathbf{L}_{\text{д,с}} + \mathbf{L}_{\text{с,д}}\mathbf{F}^t_{LL},$$

окончательно получим

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{L}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\mathbf{u}_{C\text{д}}\\ \mathbf{i}_{L\text{с}}\end{Vmatrix} = \mathbf{A}_1\begin{Vmatrix}\mathbf{u}_{C\text{д}}\\ \mathbf{i}_{L\text{с}}\end{Vmatrix} + \mathbf{B}_1\begin{Vmatrix}\mathbf{u}_{E\text{д}}\\ \mathbf{\Im}_{\text{с}}\end{Vmatrix} + \mathbf{B}_2\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix}\mathbf{u}_{E\text{д}}\\ \mathbf{\Im}_{\text{с}}\end{Vmatrix},$$

где

$$\mathbf{A}_1 = \begin{Vmatrix}-\mathbf{F}^t_{GC}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}_{GC} & (\mathbf{F}^t_{LC} - \mathbf{F}^t_{GC}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}_{GR}\mathbf{R}_{\text{д}}\mathbf{F}^t_{LR})\\ (-\mathbf{F}_{LC} + \mathbf{F}_{LR}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}^t_{GR}\mathbf{G}_{\text{с}}\mathbf{F}_{GC}) & -\mathbf{F}_{LR}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}^t_{LR}\end{Vmatrix};$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{Vmatrix}-\mathbf{F}^t_{GC}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}_{GE} & (\mathbf{F}^t_{\Im C} - \mathbf{F}^t_{GC}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}_{GR}\mathbf{R}_{\text{д}}\mathbf{F}^t_{\Im R})\\ (-\mathbf{F}_{LE} + \mathbf{F}_{LR}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}^t_{GR}\mathbf{G}_{\text{с}}\mathbf{F}_{GE}) & -\mathbf{F}_{LR}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}^t_{\Im R}\end{Vmatrix};$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{Vmatrix}-\mathbf{F}^t_{CC}\mathbf{C}_{\text{с}}\mathbf{F}_{CE} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & (-\mathbf{F}_{LL}\mathbf{L}_{\text{д,д}}\mathbf{F}^t_{\Im L} - \mathbf{L}_{\text{с,д}}\mathbf{F}^t_{\Im L})\end{Vmatrix}.$$

Если

$$\mathbf{x} = \begin{Vmatrix}\mathbf{u}_{C\text{д}}\\ \mathbf{i}_{L\text{с}}\end{Vmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{Vmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{L}\end{Vmatrix}^{-1}\mathbf{A}_1; \quad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{L}\end{Vmatrix}^{-1}\begin{Vmatrix}\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\frac{d}{dt}\end{Vmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{Vmatrix}\mathbf{u}_{E\text{д}}\\ \mathbf{\Im}_{\text{с}}\end{Vmatrix},$$

то можно уравнение состояния записать в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}.$$

Для электрической цепи, эквивалентная схема которой представлена на рис. 9.32, *а*, имеем:

$$\mathbf{R}_{\text{д}} = \|r_1\|; \ \mathbf{G}_{\text{с}} = \|g_2\|; \ \mathbf{R} = \mathbf{R}_{\text{с}} + \mathbf{F}_{GR}\mathbf{R}_{\text{д}}\mathbf{F}^t_{GR} = \|r_2\| + \|-1\|\|r_1\|\|-1\| = \|r_1 + r_2\| = \|r\|;$$

$$\mathbf{C}_{\text{с}} = \|C_7\|; \ \mathbf{L}_{\text{д,д}} = \|L_4\|; \ \mathbf{G} = \mathbf{G}_{\text{д}} + \mathbf{F}^t_{GR}\mathbf{G}_{\text{с}}\mathbf{F}_{GR} = \|g_1\| + \|-1\|\|g_2\|\|-1\| = \|g_1 + g_2\| = \|g\|;$$

$$\mathbf{L}_{\text{с,с}} = \begin{Vmatrix} L_3 & M_{38} \\ M_{83} & L_8 \end{Vmatrix};\ \mathbf{L}_{\text{д,с}} = \begin{Vmatrix} M_{34} & M_{84} \end{Vmatrix};\ \mathbf{C}_{\text{д}} = \begin{Vmatrix} C_5 & 0 \\ 0 & C_6 \end{Vmatrix}.$$

Элементы матрицы $\mathbf{A}_1 = \begin{Vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{Vmatrix}$:

$$\mathbf{a}_{11} = -\mathbf{F}_{GC}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}_{GC} = -\begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} r \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} 1 & -1 \end{Vmatrix} = -\frac{1}{r} \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix};$$

$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{F}_{LC}^t - \mathbf{F}_{GC}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}_{GR} \mathbf{R}_{\text{д}} \mathbf{F}_{LR}^t = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} - \frac{r_1}{r} \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} - \frac{r_1}{r} \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & -r_2/r \\ -1 & -r_1/r \end{Vmatrix};$$

$$\mathbf{a}_{21} = -\mathbf{F}_{LC} + \mathbf{F}_{LR} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}_{GR}^t \mathbf{G}_{\text{с}} \mathbf{F}_{GC} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} + \frac{g_2}{g} \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & -1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} + \frac{g_2}{g} \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ r_2/r & r_1/r \end{Vmatrix};$$

$$\mathbf{a}_{22} = -\mathbf{F}_{LR} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}_{LR}^t = -\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} g \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \end{Vmatrix} = \frac{1}{g} \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Элементы матрицы $\mathbf{B}_1 = \begin{Vmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} \\ \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22} \end{Vmatrix}$:

$$\mathbf{b}_{11} = -\mathbf{F}_{GC}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}_{GE} = -\frac{1}{r} \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -1 \end{Vmatrix} = -\frac{1}{r} \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \end{Vmatrix};$$

$$\mathbf{b}_{12} = \mathbf{F}_{\text{э}C}^t - \mathbf{F}_{GC}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F}_{GR} \mathbf{R}_{\text{д}} \mathbf{F}_{\text{э}R}^t = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} - \frac{r_1}{r} \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -1 \end{Vmatrix} = -\frac{r_1}{r} \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -r_1/r \\ r_1/r \end{Vmatrix};$$

$$\mathbf{b}_{21} = -\mathbf{F}_{LE} + \mathbf{F}_{LR} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}_{GR}^t \mathbf{G}_{\text{с}} \mathbf{F}_{GE} = \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \end{Vmatrix} + \frac{g_2}{g} \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \end{Vmatrix} + \frac{g_2}{g} \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ -g_1/g \end{Vmatrix};$$

$$\mathbf{b}_{22} = -\mathbf{F}_{LR} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}_{\text{э}R}^t = -\frac{1}{g} \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -1 \end{Vmatrix} = \frac{1}{g} \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1/g \end{Vmatrix}.$$

Элементы матрицы $\mathbf{B}_2 = \begin{Vmatrix} \mathbf{b}'_{11} & \mathbf{b}'_{12} \\ \mathbf{b}'_{21} & \mathbf{b}'_{22} \end{Vmatrix}$:

$$\mathbf{b}'_{11} = -\mathbf{F}_{CC}^t \mathbf{C}_{\text{с}} \mathbf{F}_{CE} = -\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} C_7 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix};\quad \mathbf{b}'_{12} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix};\quad \mathbf{b}'_{21} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix};$$

$$\mathbf{b}'_{22} = -\mathbf{F}_{LL}\mathbf{L}_{\text{д,д}}\mathbf{F}^t_{\Im L} - \mathbf{L}_{\text{с,д}}\mathbf{F}^t_{\Im L} = -\begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} L_4 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}; \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{0}.$$

Матрица индуктивностей

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{CC} + \mathbf{F}_{LL}\mathbf{L}_{\text{д,д}}\mathbf{F}^t_{LL} + \mathbf{F}_{LL}\mathbf{L}_{\text{д,с}} + \mathbf{L}_{\text{сд}}\mathbf{F}^t_{LL} =$$

$$= \begin{Vmatrix} L_3 & M_{38} \\ M_{83} & L_8 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -1 \\ -1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} L_4 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} -1 & -1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -1 \\ -1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} M_{34} & M_{84} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} M_{43} \\ M_{48} \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} -1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

При $M_{38} = M_{83} = M_{34} = M_{43} = M_{48} = M_{84} = 0$

$$\mathbf{L} = \begin{Vmatrix} L_3 + L_4 & L_4 \\ L_4 & L_8 + L_4 \end{Vmatrix}.$$

Матрица

$$\mathbf{C}_{\text{д}} = \begin{Vmatrix} C_5 & 0 \\ 0 & C_6 \end{Vmatrix}; \quad \mathbf{C}_{\text{с}} = \begin{Vmatrix} C_7 \end{Vmatrix}; \quad \mathbf{F}_{CC} = \begin{Vmatrix} -1 & 1 \end{Vmatrix};$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\text{д}} + \mathbf{F}^t_{CC}\mathbf{C}_{\text{с}}\mathbf{F}_{CC} = \begin{Vmatrix} C_5 & 0 \\ 0 & C_6 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} C_7 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} -1 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} C_5 + C_7 & -C_7 \\ -C_7 & C_6 + C_7 \end{Vmatrix}.$$

Окончательно получим

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix} u_5 \\ u_6 \\ i_3 \\ i_8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} C_5 + C_7 & -C_7 & 0 & 0 \\ -C_7 & C_6 + C_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 + L_4 & L_4 \\ 0 & 0 & L_4 & L_8 + L_4 \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \left(\begin{Vmatrix} -1/r & 1/r & 0 & -r_2/r \\ 1/r & -1/r & -1 & -r_1/r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ r_2/r & r_1/r & 0 & 1/g \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} u_5 \\ u_6 \\ i_3 \\ i_8 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1/r & -r_1/r \\ -1/r & r_1/r \\ 0 & 0 \\ -g_1/g & 1/g \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} E \\ \Im \end{Vmatrix} \right).$$

Для численного решения полученная система дифференциальных уравнений должна быть дополнена начальными условиями для переменных состояния. Система дифференциальных уравнений в совокупности с начальными условиями представляет так называемую задачу Коши. Методы решения этой задачи с помощью численного интегрирования будут рассмотрены в следующем параграфе.

9.14. Численное интегрирование уравнений состояния

Рассмотрим систему дифференциальных в общем случае нелинейных уравнений, записанную в нормальной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ — вектор переменных состояния, $\mathbf{f}$ — вектор-функция. Для сокращения записи и в соответствии с общепринятыми при изложении численных мето-

дов обозначениями будем использовать для обозначения производной по времени точку над переменной.

Решение уравнения будем искать на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ в виде таблицы.

t	t_0	$t_0 + h$	$t_0 + 2h$	…	$t_0 + nh$	…	$t_0 + Nh = t_0 + T$
$\mathbf{x}$	$\mathbf{x}(t_0)$	$\hat{\mathbf{x}}(t_0 + h)$	$\hat{\mathbf{x}}(t_0 + 2h)$	…	$\hat{\mathbf{x}}(t_0 + nh)$	…	$\hat{\mathbf{x}}(t_0 + T)$

Здесь $h > 0$ — некоторая малая величина, называемая *шагом интегрирования* или *шагом дискретности* (*дискретизации*) *таблицы*. Выбор этой величины должен обеспечивать возможность аппроксимации точек $\hat{\mathbf{x}}(t_n) = \hat{\mathbf{x}}(t_0 + nh)$, $n = 0, 1, 2, ..., N$, $N = T/h$ такой функцией, которая воспроизводила бы все особенности исследуемого процесса $\mathbf{x}(t)$ с достаточной для практики точностью. Для вычисления значений $\hat{\mathbf{x}}(t_0 + nh)$ дифференциальное уравнение заменяют алгебраическим, называемым *разностным уравнением* вида

$$\boldsymbol{\eta}(\hat{\mathbf{x}}, h) = \sum_{k=0}^{r} [a_{r-k}\hat{\mathbf{x}}_{n-k} - hb_{r-k}\varphi(t_{n-k}, \hat{\mathbf{x}}_{n-k}, h)] = 0,$$

в котором коэффициенты a_r, b_r одновременно не равны нулю, а $r \le n \le N$. При этом значения $\hat{\mathbf{x}}_n = \hat{\mathbf{x}}(t_n)$, приближенно описывающие $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}(t_n)$, определяют как решения систем алгебраических уравнений последовательно точка за точкой. Процесс вычисления таблицы с помощью разностных уравнений называют *численным интегрированием* (численным решением) дифференциального уравнения. Последнее соотношение называют *методом численного интегрирования* (*разностной схемой*). Число r соответствует *порядку разностного уравнения, который определяет число дополнительных начальных условий, необходимых для однозначного решения дифференциального уравнения. Совокупность начальных условий* $\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_{r-1}$ *для разностного уравнения называют началом таблицы*, а способ вычисления значений $\hat{\mathbf{x}}_{r-1}$ — *стартовым алгоритмом*. Отметим, что при $r = 1$ метод численного интегрирования называют *одношаговым*, а при $r > 1$ — *многошаговым*.

Простейшие методы численного интегрирования основываются на идеях, высказанных Эйлером, Коши, Рунге, и носят их имена. Рассмотрим эти идеи и методы подробнее.

Одна из идей построения разностного уравнения по исходному дифференциальному уравнению состоит в применении к нему формулы Ньютона—Лейбница

$$\mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{x}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau))d\tau = \mathbf{x}(t_n) + \int_0^h \mathbf{f}(t_{n+1} - \tau, \mathbf{x}(t_{n+1} - \tau))d\tau$$

с последующей аппроксимацией полученного интеграла.

Например, *явный метод Эйлера* (*метод ломаных*) соответствует приближенному вычислению интеграла по способу левых прямоугольников. При этом последнее уравнение принимает вид

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n + h\mathbf{f}_n, \quad \mathbf{f}_n = \mathbf{f}(t_n, \hat{\mathbf{x}}_n).$$

К *неявному методу Эйлера* (*неявному методу ломаных*) приводит приближенное вычисление интеграла по способу правых прямоугольников:

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n + h\mathbf{f}_{n+1}, \quad \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}(t_{n+1}, \hat{\mathbf{x}}_{n+1}).$$

Заметим, что последнее уравнение не разрешено относительно неизвестного значения $\hat{\mathbf{x}}_{n+1}$. Это обстоятельство и обусловило название метода численного интегрирования как неявного. В общем случае метод называют *неявным*, если $b_r \neq 0$, и *явным* в противном случае. Неявным, например, является *метод трапеций*

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n + \frac{h}{2}\left(\mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{f}_n\right),$$

получаемый при аппроксимации интеграла в формуле Ньютона—Лейбница по методу трапеций.

Обобщением двух последних методов является *метод Линигера—Уиллаби*

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n + h[(1-\mu)\dot{\hat{\mathbf{x}}}_{n+1} + \mu\dot{\hat{\mathbf{x}}}_n]; \quad 0 \le \mu \le 1/2,$$

который при $\mu = 0$ совпадает с неявным методом Эйлера, а при $\mu = 0{,}5$ — с методом трапеций.

При построении разностных схем наряду с формулой Ньютона—Лейбница используются и другие представления решения дифференциального уравнения, например представления в виде ряда Тейлора

$$\mathbf{x}(t_{n+1}) = \mathbf{x}(t_n) + h\sum_{k=1}^{\nu}\frac{h^{k-1}}{k!}\frac{d^k\mathbf{x}(t_n)}{dt^k} + \int_0^h \frac{(h-\tau)^\nu}{\nu!}\frac{d^{\nu+1}\mathbf{x}(t_n+\tau)}{d\tau^{\nu+1}}d\tau,$$

где высшие производные находят путем последовательного дифференцирования правой части исходного дифференциального уравнения. При пренебрежении интегралом в последнем выражении получают разностные уравнения первого порядка

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n + h\sum_{k=1}^{\nu}\frac{h^{k-1}}{k!}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\mathbf{f}_n. \qquad (*)$$

При $\nu = 1$ последнее уравнение совпадает с ранее рассмотренным уравнением явного метода Эйлера. Отметим, что полученное уравнение называют по числу учитываемых производных *методом степени* ν.

Для того, чтобы не вычислять непосредственно производные правой части дифференциального уравнения при реализации численных методов, обычно используют идею Рунге. При этом вместо уравнения (*) применяют разностное уравнение вида

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n + h\varphi(t_n, \hat{\mathbf{x}}_n, h).$$

Функцию $\varphi(t_n, \hat{\mathbf{x}}_n, h)$ строят таким образом, чтобы ее разложение по степеням h в точке t_n совпало до $h^{\nu-1}$ включительно с разложением в (*). Методы подобного типа называют методами Рунге—Кутта. Наиболее часто используют методы:

а) *метод Эйлера—Коши*

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n + \frac{h}{2}\left(\mathbf{k}_{1n} + \mathbf{k}_{2n}\right); \quad \mathbf{k}_{1n} = \mathbf{f}_n, \quad \mathbf{k}_{2n} = \mathbf{f}(t_{n+1}, \hat{\mathbf{x}}_n + h\mathbf{k}_{1n});$$

б) *усовершенствованный метод ломаных*

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n + h\mathbf{k}_{2n}; \quad \mathbf{k}_{1n} = \mathbf{f}_n, \ \mathbf{k}_{2n} = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \hat{\mathbf{x}}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_{1n}\right);$$

в) *метод четвертой степени*

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n + \frac{h}{6}\left(\mathbf{k}_{1n} + 2\mathbf{k}_{2n} + 2\mathbf{k}_{3n} + \mathbf{k}_{4n}\right);$$

$$\mathbf{k}_{1n} = \mathbf{f}_n, \ \mathbf{k}_{2n} = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \hat{\mathbf{x}}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_{1n}\right);$$

$$\mathbf{k}_{3n} = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \hat{\mathbf{x}}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_{2n}\right), \ \mathbf{k}_{4n} = \mathbf{f}\left(t_n + h, \hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{k}_{3n}\right).$$

Аналогичным образом могут быть сконструированы и неявные методы Рунге—Кутта.

Рассмотренные простые и пользующиеся широкой известностью методы называют иногда *классическими методами численного интегрирования*. Существует и множество других методов — методы Адамса, Милна (относятся к методам классического типа) и более сложные методы типа методов Шихмана, Гира и т. д. При выборе метода численного интегрирования прежде всего руководствуются получением результата (таблицы) с достаточной точностью и в требуемое время. При этом необходимо учитывать характеристики используемого компьютера — ограниченность разрядной сетки, быстродействие, объем оперативной памяти и т. д.

Важной проблемой при численном интегрировании уравнений состояния является выбор шага дискретизации. Выбор большого шага нарушает адекватность разностных уравнений решаемым дифференциальным уравнениям, что приводит к бессмысленному результату. Если же шаг выбран слишком малым, то расчет потребует больших временных затрат, а накопление ошибок округления может привести к существенному искажению результата. Поэтому программные реализации численных методов интегрирования должны включать процедуру выбора шага, автоматически учитывающую особенности каждого решаемого уравнения состояния. Причем для создания эффективных и надежных программ численного интегрирования требуются такие процедуры, которые при минимальных вычислительных затратах обеспечивают выбор шага дискретизации, близкого к оптимальному. Применительно к реализации классических методов интегрирования подобным требованиям удовлетворяют алгоритмы выбора шага, основанные на *правиле Рунге*, позволяющем оценить погрешность численного решения дифференциального уравнения.

При рассмотрении этого правила будем считать, что при интегрировании дифференциального уравнения $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ методом степени ν первоначально выбран шаг h и вычислено значение решения в точке $t_0 + h$. Обозначим вычисленное значение как $\mathbf{x}_h^{\nu}(t_0 + h)$. Оно отличается от истинного значения решения $\mathbf{x}(t_0 + h)$ в точке $t_0 + h$ на погрешность метода степени ν на шаге h, т. е.

$$\mathbf{x}(t_0+h)=\hat{\mathbf{x}}_h^{\nu}(t_0+h)+\mathbf{R}_h,\quad \mathbf{R}_h=\mathbf{M}h^{\nu+1},\quad \mathbf{M}=\operatorname{diag}\{m_i\},$$

где m_i — некоторые числа. Уменьшим шаг в два раза и вычислим значение решения $\hat{\mathbf{x}}_{h/2}^{\nu}(t_0+h)$ в той же точке за два шага, предварительно определив значение $\hat{\mathbf{x}}_{h/2}^{\nu}(t_0+h/2)$ в точке $t_0+h/2$. Истинное значение решения

$$\mathbf{x}(t_0+h)=\hat{\mathbf{x}}_{h/2}^{\nu}(t_0+h)+2\mathbf{R}_{h/2}=\hat{\mathbf{x}}_{h/2}^{\nu}(t_0+h)+2\mathbf{M}\left(\frac{h}{2}\right)^{\nu+1}=\hat{\mathbf{x}}_{h/2}^{\nu}(t_0+h)+2^{-\nu}\mathbf{R}_h,$$

где $\mathbf{R}_{h/2}=\mathbf{M}(h/2)^{\nu+1}$ — погрешность данного метода на шаге $h/2$. Следовательно, можно оценить погрешность вычисления решения дифференциального уравнения методом степени ν на шаге h:

$$\mathbf{R}_h=\frac{\hat{\mathbf{x}}_{h/2}^{\nu}(t_0+h)-\hat{\mathbf{x}}_h^{\nu}(t_0+h)}{1-2^{-\nu}}.$$

Подобный двукратный расчет одной точки решения для оценки погрешности вычисления называют *правилом Рунге*.

9.15. Устойчивость методов численного интегрирования

При выборе шага дискретизации существенным ограничением помимо соображений точности является и требование обеспечения устойчивости соответствующей разностной схемы. Для знакомства с понятием устойчивости разностной схемы и соответствующего ей метода численного интегрирования рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x},\quad \mathbf{x}\in R^m,\quad \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0,\quad t\in[0,T]. \qquad (*)$$

Положим для простоты, что собственные значения λ_k, $k=1, 2, \ldots, m$ матрицы $\mathbf{A}$ различны. При этом решение (*) асимптотически устойчиво, если вещественные части всех собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ отрицательны, т. е. $\operatorname{Re}\lambda_k<0$, и неустойчиво, если вещественные части некоторых собственных значений матрицы положительны. Если $\operatorname{Re}\lambda_k\le 0$, $k=1, 2, \ldots, m$, и некоторые собственные значения имеют нулевую вещественную часть, то решение $\mathbf{x}$ считается устойчивым (но не асимптотически устойчивым). Соответственно выделенным трем случаям и *уравнение* (*) считают *асимптотически устойчивым*, *неустойчивым* или просто *устойчивым*.

При численном интегрировании дифференциальное уравнение (*) заменяют разностным уравнением, устойчивость которого зависит уже не только от спектра матрицы $\mathbf{A}$, но и от параметров разностной схемы. Для оценки устойчивости разностных схем расщепим систему (*) на m несвязанных уравнений, т. е. преобразуем ее к диагональному виду

$$\dot{y}_k=\lambda_k y_k,\quad k=1, 2, \ldots, m;$$
$$\dot{\mathbf{y}}_k=\operatorname{diag}\{\lambda_k\}\mathbf{y},\quad \mathbf{y}\in R^m,\quad \mathbf{y}(0)=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}_0,\quad t\in[0,T] \qquad (**)$$

путем замены переменных $\mathbf{x}=\mathbf{S}\mathbf{y}$, где $\mathbf{S}$ — матрица правых собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$. Так как характеристики устойчивости этой последней системы

и системы (*) совпадают, то для получения оценок устойчивости разностных схем можно рассматривать отдельно уравнение

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(0) = x_0, \qquad (***)$$

представляющее собой обобщенную запись последнего уравнения. Коэффициент λ в этом уравнении в общем случае считают комплексным и равным $\lambda = \alpha + j\omega$, поскольку комплексными могут быть собственные значения λ_k матрицы **A**.

Применим для решения последнего уравнения разностное уравнение явного метода Эйлера

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n + h\lambda\hat{x}_n \quad \text{или} \quad \hat{x}_{n+1} = (1 + h\lambda)\hat{x}_n.$$

Решение этого уравнения, дискретного аналога однородного дифференциального уравнения первого порядка $\dot{x} = \lambda x$, может быть представлено в виде $\hat{x}_n = \rho_0\rho^n$. Тогда $\rho_0\rho^{n+1} = (1 + \lambda h)\,\rho_0\rho^n$, откуда $\rho = 1 + \lambda h$, $\hat{x}_n = (1 + \lambda h)^n$, $\rho_0 = x_0$.

Легко заметить, что такое решение уравнения $\dot{x} = \lambda x$ вытекает из приближенного представления решения однородного уравнения первого порядка в дискретные моменты времени:

$$x(t_n) = x(nh) = x_n = x_0 e^{n\lambda h} = x_0 (e^{\lambda h})^n = x_0\left(1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2\,!} + \ldots\right)^n \approx x_0 (1 + \lambda h)^n.$$

Если $\lambda < 0$ и h имеет такое значение, что $|1 + \lambda h| > 1$, то абсолютное значение решения x_n увеличивается, в то время как точное решение монотонно убывает с ростом n.

Рассмотрим в качестве примера случай $\lambda = -0{,}5$ с$^{-1}$, $h = 4{,}1$ с. Тогда $\lambda h = -2{,}05$; $1 + \lambda h = -1{,}05$. Точное решение $x_0\, e^{-2{,}05n}$ монотонно убывает с увеличением $n = 0, 1, 2, \ldots$ (табл. 9.3).

Таблица 9.3

n	0	1	2	3	4	5
$e^{-2{,}05n}$	1	0,12835	0,01657	0,00213	0,00027	0,000035
$(1 + \lambda h)^n$	1	–1,05	1,1025	–1,1576	1,2155	–1,2763

Решение же разностного уравнения является знакопеременным и растущим по абсолютному значению (табл. 9.3). Следовательно, для обеспечения асимптотической устойчивости решения последнего уравнения необходимо, чтобы $|1 + \lambda h| < 1$ или $(1 + h\alpha)^2 + (h\omega)^2 < 1$, где $\alpha = \mathrm{Re}\,\lambda$; $\omega = \mathrm{Im}\,\lambda$. Множество значений $h\lambda$, удовлетворяющих условию асимптотической устойчивости решения разностного уравнения для тестового уравнения (***), называют *областью устойчивости метода*, соответствующего этому разностному уравнению, в комплексной плоскости $h\lambda$. Таким образом, областью устойчивости явного метода Эйлера является внутренность круга единичного радиуса с центром $h\omega = 0$, $h\alpha = -1$ (рис. 9.33). Обратим внимание на то, что при чисто мнимом λ ($\alpha = 0$)

условие $|1+\lambda h|<1$ не может быть достигнуто ни при каком значении $h > 0$, т. е. устойчивому решению дифференциального уравнения (***) не соответствует какое-либо устойчивое решение разностного уравнения явного метода Эйлера. Поэтому явный метод Эйлера по условиям устойчивости непригоден для интегрирования устойчивых уравнений состояния вида (*), собственные значения матриц которых могут иметь нулевые вещественные части. В этом случае на каждом отдельном шаге интегрирования может быть достигнута вполне приемлемая точность, в то время как аппроксимирующая эти значения функция не соответствует функции истинного решения исходного дифференциального уравнения.

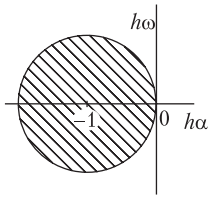


Рис. 9.33

Рассмотрим случай, когда $\alpha = \mathrm{Re}\,\lambda < 0$ и метод Эйлера может быть применен по условию устойчивости. Условие $|1+\lambda h|<1$ накладывает жесткие ограничения на шаг. Например, при чисто вещественном значении $\lambda = \alpha < 0$ из этого условия вытекает следующее ограничение на максимально допустимый шаг дискретизации: $h < |2/\lambda|$.

Таким образом, при интегрировании явным методом Эйлера уравнений состояния (*) с большими по модулю собственными значениями матриц коэффициентов шаг интегрирования по условиям устойчивости должен быть выбран достаточно малым. Такая ситуация возникает, например, при обработке уравнений электрических цепей с малыми постоянными времени, что соответствует большим по модулю вещественным частям собственных значений матриц уравнений состояния. При этом попытка увеличить шаг более величины, определяемой его максимальной оценкой, приводит к резкому возрастанию погрешности («взрыву» погрешности) и нарушению адекватности вычисленных значений истинному решению дифференциального уравнения.

Применим для решения уравнения (**) разностное уравнение неявного метода Эйлера

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n + h\lambda x_{n+1} \text{ или } \hat{x}_{n+1} = (1-h\lambda)^{-1}\hat{x}_n.$$

Для этого разностного уравнения решение также можно найти в виде $\hat{x}_n = \rho_0\rho^n$. Тогда $\rho_0\rho^{n+1} = \rho_0\rho^n + h\lambda\rho_0\rho^{n+1}$, $\rho(1-\lambda h) = 1$ или $\rho = (1-\lambda h)^{-n}$ и, следовательно, $\hat{x}_n = x_0(1-\lambda h)^{-n}$. Это выражение является приближенным представлением точного решения

$$x(t_n) = x(nh) = x_n = x_0 e^{n\lambda h} = x_0(e^{-n})^{-\lambda h} = x_0(e^{(-\lambda h)})^{-n} \approx x_0(1-\lambda h)^{-n}.$$

Для обеспечения асимптотической устойчивости последнего уравнения необходимо, чтобы $|(1-h\lambda)^{-1}|<1$ или для $\lambda = \alpha + j\omega \to (1-h\alpha)^2 + (h\omega)^2 > 1$. Областью устойчивости данного метода является вся плоскость, за исключением единичного круга в правой полуплоскости с центром в точке (1, 0) (рис. 9.34). Как видно из полученного неравенства, условие устойчивости не налагает каких-либо ограничений на шаг дискретизации при интегрировании абсолютно устойчивых дифференциальных уравнений. Выбор шага в этом случае должен осуществляться только по соображениям точности вычислений. Заметим, что решения

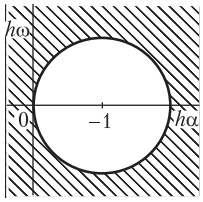


Рис. 9. 34

разностного уравнения неявного метода Эйлера оказываются устойчивыми и в правой полуплоскости, где решение исходного дифференциального уравнения неустойчиво. Следовательно, использование этого метода для интегрирования неустойчивых дифференциальных уравнений дает результат, не адекватный характеру истинного решения.

Рассмотренный материал показывает, что не любой метод численного интегрирования и не любой шаг дискретизации при данных значениях λ обеспечивают соответствие дифференциального разностному уравнению по всем видам устойчивости. Такое соответствие может быть достигнуто при использовании неявного метода трапеций, разностное уравнение которого для уравнения (***) имеет вид

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n + \frac{h\lambda}{2}(\dot{\hat{x}}_{n+1} + \dot{\hat{x}}_n) \quad \text{или} \quad \hat{x}_{n+1} = (1 - h\lambda/2)^{-1}(1 + h\lambda/2)\hat{x}_n.$$

Соответствующее решение этого разностного уравнения имеет вид $\hat{x}_n = \rho_0\rho^n$. Тогда

$$\rho_0\rho^{n+1} = \rho_0\rho^n + \lambda h/2\,(\rho_0\rho^{n+1} + \rho_0\rho^n), \quad \rho(1 - \lambda h/2) = 1 + \lambda h/2, \quad \rho = \frac{1 + \lambda h/2}{1 - \lambda h/2},$$

$$\hat{x}_n = \hat{x}_0\left(\frac{1 + \lambda h/2}{1 - \lambda h/2}\right)^n.$$

Последнее выражение является приближенным представлением точного решения, комбинацией явного и неявного методов Эйлера. Оно также может быть получено из следующего приближения:

$$x(t_n) = x(nh) = x_n = x_0 e^{n\lambda h} = x_0 e^{2n\lambda h/2} = x_0 e^{n\lambda h/2} e^{(-\lambda h/2)(-n)} =$$
$$= x_0 (e^{\lambda h/2})^n (e^{-\lambda h/2})^{-n} \approx x_0 (1 + \lambda h/2)^n (1 - \lambda h/2)^{-n}.$$

Заметим, что приближение $e^{n\lambda h} \approx (1 + \lambda h/2)^n (1 - \lambda h/2)^{-n}$ непосредственно следует и из так называемой Паде-аппроксимации экспоненты. Таким образом, и здесь вид разностного уравнения определяется способом приближенного представления экспоненты $e^{\lambda h}$.

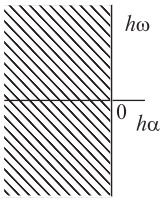


Рис. 9.35

Область устойчивости метода трапеций, которая определяется неравенством $|(1 - h\lambda/2)^{-1}(1 + h\lambda/2)| < 1$ или $(1 + h\lambda/2)^2 < (1 - h\lambda/2)^2$, показана на рис. 9.35. Суть же отмеченного свойства метода трапеций состоит в том, что при чисто мнимом значении λ ($\lambda = j\omega$) устойчивому решению исходного уравнения (***) соответствует устойчивое решение разностного уравнения, так как

$$\left|\left(1 - \frac{h\lambda}{2}\right)^{-1}\left(1 + \frac{h\lambda}{2}\right)\right| = \frac{\left|1 + j\dfrac{h\omega}{2}\right|}{\left|1 - j\dfrac{h\omega}{2}\right|} = 1.$$

Это обстоятельство позволяет использовать метод трапеций для интегрирования таких уравнений (*), матрица **A** коэффициентов которых содержит пару мнимых сопряженных значений. Решение в этом случае имеет составляющую

вида незатухающего гармонического колебания, что обычно и приводит к трудностям при интегрировании.

Используя рассмотренный метод, можно определить области устойчивости и других разностных схем. На рис. 9.36 показаны области устойчивости методов Рунге—Кутта второго и четвертого порядков.

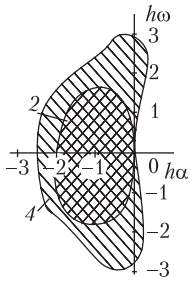


Рис. 9.36

При выборе разностной схемы и шага интегрирования вопросы устойчивости схемы должны быть согласованы с вопросами точности, поскольку адекватность схемы решаемому уравнению только по условиям устойчивости еще не гарантирует ее «хороших» свойств. Для примера рассмотрим решение тестового уравнения (***) методом трапеций при Re $\lambda < 0$; $h\lambda \ll -1$. На n-м шаге

$$\hat{x}_n = (1 + h\lambda/2)^n (1 - h\lambda/2)^{-n} x_0, \quad \hat{x}_0 = x_0.$$

При $h\lambda \to -\infty |\hat{x}_n| \to |x_0|$. Для точного решения $x_n = e^{\lambda nh} x_0$ и $x_n \to 0$ при $h\lambda \to -\infty$. Таким образом, при решении данного уравнения методом трапеций шаг не может быть выбран слишком большим из-за невозможности получения требуемой точности решения. В то же время использование неявного метода Эйлера позволяет получить адекватный результат:

$$\hat{x}_n = (1 - h\lambda)^{-n} \hat{x}_0, \ \ \hat{x}_n \to 0 \ \text{ при } \ h\lambda \to -\infty.$$

Поэтому применение неявного метода Эйлера может оказаться более эффективным при решении систем (*), все собственные значения матрицы **A** коэффициентов которых имеют большие по модулю и отрицательные вещественные части. Рассмотренный пример иллюстрирует сложность выбора метода, наиболее адекватного специфическим особенностям решаемого уравнения. Но определяющими принципиальную возможность эффективного применения данного метода при интегрировании определенного класса уравнений являются все же соображения устойчивости. Так, использование явных методов Эйлера и Рунге—Кутта для интегрирования подобных систем с большими по модулю вещественными частями собственных значений привело бы к столь существенному ограничению шага, что сделало невозможным получение достоверного результата из-за ошибок накопления или же, в лучшем случае, потребовало недопустимо больших затрат времени при реализации на компьютере.

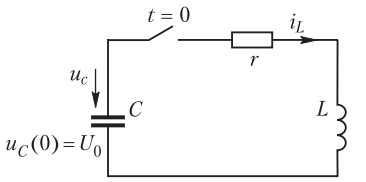
Заметим, что для большинства уравнений состояния электрических цепей собственные значения матриц коэффициентов локализованы в левой полуплоскости, но могут быть расположены в ней достаточно произвольным образом. Поэтому для интегрирования этих уравнений целесообразно применять методы, область устойчивости которых включает всю левую полуплоскость плоскости $h\lambda$. Такие методы называют *A-устойчивыми*. К таким методам относятся, например, неявные методы Эйлера и трапеций. Явные же методы Эйлера и Рунге—Кутта не *A*-устойчивы. Справедливы следующие утверждения:

- никакой явный линейный многошаговый метод не является *A*-устойчивым;
- не существует *A*-устойчивого неявного линейного многошагового метода со степенью $\nu > 2$.

Тот факт, что явные классические методы (Рунге—Кутта, Эйлера) не обладают A-устойчивостью, свидетельствует о том, что их использование для интегрирования систем дифференциальных уравнений приводит к большим вычислительным трудностям. На существование подобных систем уравнений, трудно поддающихся интегрированию явными классическими методами, впервые обратили внимание в 1952 г. и назвали их *жесткими системами дифференциальных уравнений*. В настоящее время существует специальная теория жестких уравнений и методов их решения. Большой вклад в развитие этой теории внес советский математик и электротехник Ю. В. Ракитский. Заметим, что применительно к уравнениям электрических цепей жесткость является скорее правилом, чем исключением.

9.16. Жесткость систем дифференциальных уравнений электрических цепей

При создании математических моделей электрических цепей встает проблема учета элементов с малыми значениями индуктивностей, емкостей, проводимостей, сопротивлений. Поскольку пренебрежение такими элементами может нарушить адекватность модели реальной цепи, исследователь зачастую вынужден учитывать большое число подобных элементов. Вследствие этого электрическим цепям соответствуют дифференциальные уравнения относительно высоких порядков. Причем, как правило, при описании решений подобных уравнений в интервале наблюдения требуется привлечение двух видов функций: быстроубывающих с большими производными и функций с малыми производными. Необходимость использования таких функций для описания решений дифференциальных систем характеризует явление жесткости, а сами подобные системы называют *жесткими*. Явление жесткости типично для задач теории электрических цепей. Вместе с тем численное решение жестких дифференциальных систем сопряжено со значительными трудностями. Причины таких трудностей целесообразно рассмотреть подробнее.



$r = 20$ кОм; $L = 10^{-6}$ Гн; $C = 5$ мкФ

Рис. 9.37

Рассмотрим процесс разряда конденсатора на активно-индуктивную цепь (рис. 9.37). Зависимость тока в цепи от времени может быть получена из решения следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{CL} i_L = 0.$$

Запишем в общем виде его решение, состоящее только из свободной составляющей $i_L = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$, и определим корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \to \lambda^2 + 2 \cdot 10^{10}\lambda + 2 \cdot 10^{11} = 0.$$

По теореме Виета,

$$\lambda_1\lambda_2 = 1/LC = 2\cdot 10^{11};\quad \lambda_1+\lambda_2 = -R/L = -2\cdot 10^{10}.$$

Следовательно,

$$\lambda_1 \approx -2\cdot 10^{10} = -R/L;\quad \lambda_2 \approx -10 = -1/RC.$$

Исходя из независимых начальных условий

$$i_L(0) = C_1 + C_2 = 0,\ \ u_C(0) = \left[L\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0} + Ri_L(0)\right] = L(C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2) + R(C_1 + C_2) = U_0,$$

найдем постоянные интегрирования: $C_1 = -C_2 = U_0/R$. Тогда решение рассматриваемого уравнения запишем в виде

$$i_L \cong \frac{U_0}{R}\left(-e^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\frac{1}{RC}t}\right) = \frac{U_0}{2\cdot 10^4}\left(-e^{-2\cdot 10^{10}t} + e^{-10t}\right).$$

На рис. 9.38, выполненном для наглядности с искажением масштаба по оси t, выделим два участка.

Первый участок — участок пограничного слоя $t \in [0, \tau_{пс}]$ — характеризуется быстрым изменением (большой производной) тока. Длительность этого участка определяется минимальной постоянной времени $\tau_{min} = \tau_1 = |1/\lambda_1| = L/R$. Можно принять, например, $\tau_{пс} = (3\ldots5)\ \tau_{min}$. Второй участок, лежащий за пограничными слоем, характеризуется медленным изменением тока. Длительность этого участка, т. е. длительность наблюдения, определяется максимальной постоянной времени $\tau_{max} = \tau_2 = |1/\lambda_2| = RC$ (обычно процесс целесообразно рассматривать на интервале не более $(3\ldots5)\ \tau_{max}$). Имеет место явление жесткости. Следовательно, рассматриваемое уравнение, моделирующее процессы с такого рода явлением, относится к жестким дифференциальным уравнениям. Жестким является и уравнение состояния соответствующее данной цепи.

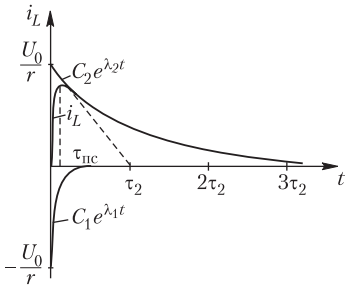


Рис. 9.38

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix} i_L \\ u_C \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2\cdot 10^{10} & -10^6 \\ -2\cdot 10^5 & 0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} i_L \\ u_C \end{Vmatrix};\quad \begin{Vmatrix} i_L(0) \\ u_C(0) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ U_0 \end{Vmatrix}.$$

Проанализируем трудности, возникающие при интегрировании подобных уравнений. Как было показано в § 9.15, выбор шага, обеспечивающего заданный тип устойчивости решения, должен подчиняться определенным условиям, зависящим от собственных чисел матрицы уравнений состояния, или, что то же, от корней характеристического уравнения. Например, при использовании явного метода Эйлера шаг интегрирования, обеспечивающий асимптотическую устойчивость решения, должен удовлетворять условию $|1 + h\lambda| < 1$. Для рассмотренного выше примера это условие равносильно двум неравенствам

$$|1 + h\lambda_1| = |1 - h\ 2\cdot 10^{10}| < 1;\ \ |1 + h\lambda_2| = |1 - h\cdot 10| < 1,$$

решая которые, получаем следующие ограничения на шаг: $h < 10^{-10}$; $h < 0{,}2$. Следовательно, при интегрировании данной системы уравнений шаг должен быть

ограничен значением $h < 10^{-10}$, определяемым минимальной постоянной времени $\tau_{\min} = \tau_1 = |1/\lambda_1| \approx 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ с. Длительность переходного процесса зависит от максимальной постоянной времени цепи:

$$(3\ldots5)\tau_{\max} = (3\ldots5)\tau_2 = (3\ldots5)\left|1/\lambda_2\right| = (0{,}3\ldots0{,}5)\text{ с.}$$

Таким образом, применение явного метода Эйлера для интегрирования рассматриваемого уравнения на интервале $T = 0{,}5$ с потребовало бы более 5 млрд (!) шагов и, соответственно, значительных затрат компьютерного времени для решения достаточно простой задачи. Учитывая ограниченность разрядной сетки реальных компьютеров и обусловленные этим ошибки округления, при соотношении шага $h < 10^{-10}$ и интервала интегрирования $T = 0{,}5$ с получить численное решение приведенного уравнения с удовлетворительной точностью не представляется возможным. Аналогичные трудности возникают и при использовании других явных классических методов, например методов Рунге—Кутта. Дело в том, что в явных классических методах интегрирования максимальный шаг интегрирования ограничивают по условиям обеспечения как локальной точности решения, так и его устойчивости (см. § 9.15). Поэтому в этих методах шаг интегрирования не может быть увеличен даже на тех интервалах, где решение изменяется плавно. В рассмотренном примере это относится к участку $t \geq \tau_{\text{пс}}$ (см. рис. 9.38). Действительно, точному решению данного уравнения на $(n + 1)$-м шаге

$$x_{n+1} = x_{1n+1} + x_{2n+1} = x_{1n}e^{\lambda_1 h} + x_{2n}e^{\lambda_2 h}$$

соответствует решение разностного уравнения

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_{1n}\rho_1 + \hat{x}_{2n}\rho_2,$$

где $\rho_1 = f(\lambda_1 h)$; $\rho_2 = f(\lambda_2 h)$. Таким образом, при любых значениях n, а следовательно, и t независимо от характера переходного процесса нарушение условия устойчивости из-за увеличения шага приведет к неустойчивости численного решения.

Рассмотрим следующий пример. Пусть в некоторый момент времени $t_n \geq \tau_{\text{пс}}$, когда быстрозатухающая составляющая уже незначительна, шаг интегрирования увеличен со значения $h_1 = 0{,}5\tau_{\min} = 0{,}5\lambda_1^{-1} = 0{,}25 \cdot 10^{-10}$ с до значения $h_2 = 0{,}5\tau_{\max} = 0{,}5\lambda_2^{-1} = 0{,}5 \cdot 10^{-1}$ с, т. е. в $h_2/h_1 = 2 \cdot 10^9$ раз. Рассмотрим поведение составляющей $\hat{x}_{1n}\rho_1$ решения разностного уравнения $\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_{1n}\rho_1 + \hat{x}_{2n}\rho_2$, соответствующей быстрозатухающей составляющей $x_{1n}e^{\lambda_1 n}$ решения $x_{n+1} = x_{1n}e^{\lambda_1 n} + x_{2n}e^{\lambda_2 n}$ исходной задачи (табл. 9.4).

Таблица 9.4

Метод интегрирования	Функция $\rho_1 = f(\lambda_1 h)$	Значение $\hat{x}_{1n}\rho_1$
Явный метод Эйлера	$1 + \lambda_1 h_2$	$\hat{x}_{1n}(1 - 10^9) \approx -\hat{x}_{1n} \cdot 10^9$
Неявный метод Эйлера	$(1 - \lambda_1 h_2)^{-1}$	$\hat{x}_{1n}(1 + 10^9)^{-1} \approx \hat{x}_{1n} \cdot 10^{-9}$
Метод трапеций	$(1 + \lambda_1 h_2/2)(1 - \lambda_1 h_2/2)^{-1}$	$\hat{x}_{1n}(1 - 10^9/2)(1 + 10^9/2)^{-1} \approx -\hat{x}_{1n}$

Как видно из табл. 9.4, при применении явного метода Эйлера увеличение шага интегрирования h привело к резкому (в миллиард раз!) увеличению по мо-

дулю составляющей $x_n \rho_1$ решения x_{n+1} разностного уравнения и, следовательно, к неадекватности решения разностного уравнения решению рассматриваемого уравнения. Аналогичная ситуация возникает и при использовании других явных методов численного интегрирования. Интегрирование жестких дифференциальных уравнений можно осуществлять неявными методами, шаг в которых выбирают в основном по условиям обеспечения заданной точности, и на участках плавного изменения решения он может быть увеличен. Однако необходимо заметить, что неявным методам присущи недостатки, связанные с их практической реализацией, особенно проявляющиеся именно для жестких систем. К ним относится, например, необходимость решения алгебраических, в общем случае нелинейных, систем уравнений. При этом возникают проблемы выбора численного метода решения таких систем, определения начального приближения для итерационного процесса, обеспечения сходимости такого процесса и т. д. Специфические свойства алгебраических систем, выявляемые при интегрировании неявными методами жестких уравнений состояния, например, плохая обусловленность систем, затрудняют их численную обработку. Таким образом, жесткость уравнений состояния порождает существенные вычислительные трудности их интегрирования.

Дадим, следуя Ю. В. Ракитскому, формальное определение жесткой системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, x), \quad t \in [0, T];$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ldots x_m(t)]^t, \quad \mathbf{f}(t, x) = [f_1(t, x) \ldots f_m(t, x)]^t. \qquad (*)$$

При этом будем исходить из того, что для жестких систем значения производных решения, характеризующих скорость его изменения, вне пограничного слоя $\tau_{\text{пс}} \ll T$ в N раз меньше ($N \gg 1$), чем внутри него.

Линеаризируем правую часть последнего уравнения в окрестности начальной точки:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \ldots .$$

Производные компонент вектора $\mathbf{x}(t)$ при $t \in [0, \tau_{\text{пс}}]$ могут достигать значений $L_{\max}|x_k(t)|$, где L — число, удовлетворяющее неравенству $0 < L \le \left\| \partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{x} \right\|$; здесь $\left\| \partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{x} \right\|$ — норма матрицы Якоби $\partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{x}$, $t \in [0, \ T]$.

Систему (*) называют жесткой, если при любом векторе начальных условий найдутся такие числа $\tau_{\text{пс}} < T$, $0 < L \le \left\| \partial \mathbf{f}/\partial \mathbf{x} \right\|$, $N > 1$, для которых выполняется неравенство

$$\left| \dot{x}_k \right|_{t \ge \tau_{\text{пс}}} \le \frac{L}{N} \max_{t \in [0,T]} \left| x_k(t) \right|, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Отметим одну важную особенность данного определения, заключающуюся в том, что понятие жесткости связывается с интервалом наблюдения решения $t \in [0, T]$. Если жесткую на интервале $t \in [0, T]$ систему рассматривать лишь на подынтервале $t \in [0, \tau_{\text{пс}}]$, то ее нельзя уже считать жесткой, так как здесь уже не

наблюдается того различия в характере поведения решения, которое положено в основу понятия жесткости. Заметим, что и интегрирование подобной системы на интервале $t \in [0, \tau_{пс}]$ не связано с какими-либо сложностями даже при использовании явных классических методов.

Если данное определение жесткости применить к линейной системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in R^m, \quad t \in [0, T],$$

то можно прийти к следующим условиям для собственных значений λ_j, $j = 1, 2, ..., m$, матрицы **A** жесткой системы:

$$|\lambda_j| e^{\mathrm{Re}\lambda_j \tau_{пс}} \le \frac{L}{N}, \quad \text{если} \quad \mathrm{Re}\lambda_j \le 0;$$

$$|\lambda_j| \le \frac{L}{N}, \qquad \text{если} \quad \mathrm{Re}\lambda_j \ge 0,$$

где $L = \max\limits_j |\lambda_j|$; $N \gg 1$; $\tau_{пс} \ll T$.

Оценим жесткость системы уравнений состояния цепи на рис. 9.37 при условии, что интервал наблюдения $t \in [0, T]$, где $T = 0{,}5$ с, если $\lambda_1 = -2 \cdot 10^{10}$; $\lambda_2 = -10$; $L = |\lambda_1| = 2 \cdot 10^{10}$.

Считая $\tau_{пс} = 5\tau_{\min} = 5|1/\lambda_{\max}| = 2{,}5 \cdot 10^{-10}$ с; $N = 100$, получаем, что данная система жесткая, поскольку для нее выполняются неравенства

$$|\lambda_1| e^{\mathrm{Re}\lambda_j \tau_{пс}} = 2 \cdot 10^{10} e^{-5} \le \frac{L}{N} = 2 \cdot 10^{10} \cdot \frac{1}{100};$$

$$|\lambda_2| e^{\mathrm{Re}\lambda_j \tau_{пс}} = 10 e^{-2{,}5 \cdot 10^{-9}} \le \frac{L}{N} = 2 \cdot 10^{8}.$$

В заключение остановимся на свойстве жестких систем, поясняющем явление жесткости и позволяющем по-новому подойти к проблеме обработки этих систем. Для обоснования этого свойства снова обратимся к решению $i_L = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$, $t \in [0, T]$ жесткой системы уравнений цепи (см. рис. 9.37). Заметим, что на интервале пограничного слоя $t \in [0, \tau_{пс}]$, где $\tau_{пс} = 5/|\lambda_1| = 2{,}5 \cdot 10^{-10}$ с, экспоненту $e^{\lambda_2 t} = e^{-10t}$ можно с большой степенью точности считать равной единице. Тогда решение этого уравнения может быть записано в виде

$$i_L \approx i_1 = C_2 + C_1 e^{\lambda_1 t} = \frac{U_0}{R}(1 - e^{\lambda_1 t}) \approx \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

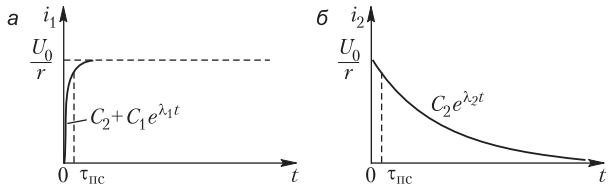


Рис. 9.39

Такому решению (рис. 9.39, *а*) соответствует уравнение более простой цепи (рис. 9.40, *а*), содержащей только один накопитель энергии. На интервале, следующем за пограничным слоем $t \in [\tau_{пс}, T]$, составляющую решения $C_1 e^{\lambda_1 t}$ можно считать практически равной нулю. Решение уравнения на этом интервале может быть записано в виде

$$i_L \approx i_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} = \frac{U_0}{R} e^{\lambda_2 t} \approx \frac{U_0}{R} e^{\frac{1}{RC} t}, t \in [\tau_{пс}, T].$$

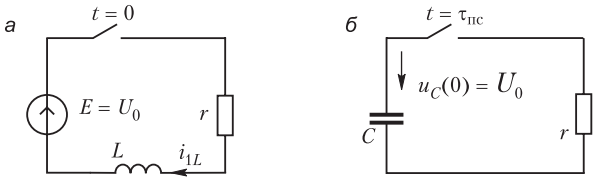


Рис. 9.40

Этому выражению (рис. 9.39, *б*) также соответствует уравнение более простой цепи (рис. 9.40, *б*), имеющей только один накопитель энергии. Уравнения цепей, изображенных на рис. 9.40, *а*, *б*, описывающие, соответственно, быстрые и медленные процессы, не являются жесткими. Жесткость же исходного уравнения обусловлена объединением описания столь различных по характеру процессов. Таким образом, одним из перспективных путей обработки жестких системе уравнений является корректировка самих систем, позволяющая разделить описание быстрых и медленных процессов. В рассмотренном примере такое раздельное описание процессов могло быть выполнено априори, поскольку физическая картина достаточно ясна. В том случае, когда рассматриваются жесткие уравнения состояния более сложных объектов, в которых физика процессов заранее не ясна, упрощения математических моделей на разных интервалах можно достичь лишь чисто математическими средствами. Использование процедуры корректировки математической модели, исключающей ее жесткость на отдельных временных интервалах, позволило бы эффективно применять самые простые и поэтому наиболее надежные методы численного интегрирования, такие, например, как явный метод Эйлера.

9.17. Системные методы численного решения уравнений состояния электрических цепей

В пассивных электрических цепях с резисторами переходные процессы, связанные с изменением энергетического состояния электрической цепи, постепенно затухают. В линейных электрических цепях преходящие составляющие токов и напряжений представлены суммой экспоненциальных членов, которые обычно уменьшаются со временем. Скорость уменьшения этих составляющих определяется отрицательными вещественными частями собственных чисел матрицы **A**. Для пассивных линейных электрических цепей чем больше по модулю вещественная часть собственного числа, тем скорее уменьшается влияние данного члена на последующий процесс.

В жестких системах собственные числа матрицы **A** сгруппированы таким образом, что значения их вещественных частей в одних группах α_1 , ..., α_i существенно отличаются от значений этих частей α_{i+1}, ..., α_j других групп, в то время как внутри данной группы эти значения различаются незначительно. Для исключения неопределенности будем считать, что такое положение имеет место, если наибольшее по модулю значение α_{i+1} (α_{j+1}) последующей группы примерно на порядок меньше наименьшего значения α_i (α_j) предыдущей группы.

При этих условиях можно выделить некоторый промежуток времени $\tau_{\text{пс}i}$ ($\tau_{\text{пс}j}$), по истечении которого влиянием экспонент, соответствующих этим группам собственных чисел, можно пренебречь. После момента времени $\tau_{\text{пс}i}$ можно пренебречь членами, соответствующими α_1, ..., α_i, а после момента времени $\tau_{\text{пс}j}$ также и членами, соответствующими α_{i+1}, ..., α_j.

С точки зрения рационального выполнения вычислений целесообразно увеличивать шаг интегрирования по мере затухания экспонент, соответствующих большим собственным числам, определяющим малый шаг интегрирования. Однако, как показано в § 9.15, такое увеличение не может быть произведено для системы уравнений из-за нарушения условия устойчивости разностного метода.

Такое последовательное увеличение шага интегрирования может быть произведено на основе метода, названного его автором, профессором Ленинградского политехнического института Ю. В. Ракитским *системным*. Этот метод основан на предложенном Ю. В. Ракитским следующем способе вычисления:

$$\exp(\mathbf{A}H), \quad \int_0^H \exp(\mathbf{A}\tau)d\tau\,\mathbf{b},$$

где $H = 2^N h$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, ..., b_m]^t$ — вектор; **A** — квадратная матрица размерностью $m \times m$.

Легко показать, что

$$\exp(\mathbf{A}2^{n+1}h) = (\exp(\mathbf{A}2^n h))^2, \quad \int_0^{2^{n+1}h} \exp(\mathbf{A}\tau)d\tau = \left(\int_0^{2^n h} \exp(\mathbf{A}\tau)d\tau\right)(1+\exp(\mathbf{A}2^n h)).$$

Если

$$\exp(\mathbf{A}h) = \boldsymbol{\varphi}_0, \quad \int_0^h \exp(\mathbf{A}\tau)d\tau = \boldsymbol{\Phi}_0, \quad \int_0^h \exp(\mathbf{A}\tau)d\tau\,\mathbf{b} = \mathbf{g}_0 = \boldsymbol{\Phi}_0\mathbf{b},$$

то приведенные выражения могут быть представлены в виде рекуррентных отношений

$$\boldsymbol{\varphi}_{k+1} = \boldsymbol{\varphi}_k^2; \quad \boldsymbol{\Phi}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}_k(1 + \boldsymbol{\varphi}_k), \quad \mathbf{g}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}_{k+1}\mathbf{b}.$$

Если

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(\mathbf{A}t)^k;$$

$$\int_0^t \exp(\mathbf{A}\tau)d\tau = t\cdot\mathbf{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}\mathbf{A}^k t^{k+1} = t\cdot\mathbf{1} + \mathbf{A}^{-1}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}(\mathbf{A}t)^{k+1},$$

то

$$\boldsymbol{\varphi}_k = \mathbf{1} + \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}_k = \mathbf{1} + \mathbf{A}\int_0^{2^k h} \exp(\mathbf{A}\tau)d\tau.$$

Тогда $\boldsymbol{\Phi}_{k+1} = \boldsymbol{\Phi}_k(2\cdot\mathbf{1} + \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}_k)$.

При малых значениях $\mathbf{A}h$ для достаточно точного представления $\boldsymbol{\varphi}_0$ и $\boldsymbol{\Phi}_0$ можно ограничиться малым числом членов в разложении

$$\boldsymbol{\varphi}_0 = \mathbf{1} + \mathbf{A}h + \frac{(\mathbf{A}h)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\mathbf{A}h)^\nu}{\nu!} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\Phi}_0 = h\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{A}h}{2} + \ldots \frac{(\mathbf{A}h)^{\nu-1}}{\nu!}\right); \quad \mathbf{g}_0 = \boldsymbol{\Phi}_0\mathbf{b},$$

приняв $\nu \le 1 \ldots 4$.

Путем последовательного перемножения матриц $\boldsymbol{\varphi}_k$ и $\boldsymbol{\Phi}_k$ можно определить матрицы $\boldsymbol{\varphi}_N$, $\boldsymbol{\Phi}_N$ и $\mathbf{g}_N$, соответствующие шагу интегрирования $H = 2^N h$. Например, при $N = 10$ $H = 2^{10}h = 1024h$.

Рассмотрим метод последовательного увеличения шагов для решения уравнения состояния линейных пассивных цепей при наличии в них источников постоянных токов и ЭДС. Уравнения таких цепей имеют вид

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix}\mathbf{u}_C\\ \mathbf{i}_L\end{Vmatrix} = \mathbf{A}\begin{Vmatrix}\mathbf{u}_C\\ \mathbf{i}_L\end{Vmatrix} + \mathbf{B}\begin{Vmatrix}\mathbf{E}\\ \mathfrak{I}\end{Vmatrix} \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{b} \in R^m, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Решение этого уравнения, выраженное через свободные и принужденные составляющие, имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \exp(\mathbf{A}\tau)d\tau\mathbf{b}.$$

Ранее отмечалось, что интегрирование и численное представление его результатов следует производить с укрупненными шагами H, определяющими наблюдаемые, выводимые на печать или изображаемые графически величины. Пусть $t_n = nH$. Считая значение $\mathbf{x}_n$ в момент времени t_n начальным для следующего интервала H, запишем разностное уравнение в виде

$$\mathbf{x}(t_n + H) = \mathbf{x}_{n+1} = \exp(\mathbf{A}H)\mathbf{x}_n + \int_0^H \exp(\mathbf{A}\tau)d\tau\mathbf{b}.$$

Учитывая, что $\exp(\mathbf{A}H) = \boldsymbol{\varphi}_N$, $\boldsymbol{\varphi}_N = \mathbf{1} + \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}_N$, а интеграл равен $\mathbf{g}_N = \boldsymbol{\Phi}_N\mathbf{b}$, можно записать

$$\mathbf{x}_{n+1} = \boldsymbol{\varphi}_N\mathbf{x}_n + \boldsymbol{\Phi}_N\mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_{n+1} = (\mathbf{1} + \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}_N)\mathbf{x}_n + \boldsymbol{\Phi}_N\mathbf{b} = \mathbf{x}_n + \boldsymbol{\Phi}_N(\mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{b});$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \boldsymbol{\Phi}_N\dot{\mathbf{x}}_n; \quad \mathbf{x}_{n+1} = \boldsymbol{\varphi}_N\mathbf{x}_n + \mathbf{g}_N.$$

Эффективность использования компьютера наибольшая в случае применения последнего уравнения. Следует заметить, что при системном методе решения уравнений состояния матричное разностное уравнение $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \boldsymbol{\Phi}_N\dot{\mathbf{x}}_n$ является аналогом разностного уравнения метода Эйлера, где вместо шага h

используется матрица $\mathbf{\Phi}_N$. Уравнения $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{\Phi}_N \dot{\mathbf{x}}_n$, $\mathbf{x}_{n+1} = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{x}_n + \mathbf{g}_N$ описывают системные методы первой степени. По аналогии с традиционными разностными методами можно построить системные методы более высоких степеней.

Ценность системных методов в том, что подбором N можно достичь заданную точность интегрирования. Так как норма матрицы $\|\mathbf{A}\| = \left(\sum_1^m \sum_1^m (a_{ij})^2 \right)^{0,5}$ определяет $\alpha_{\max}$, а при малых (порядка 10^{-1}) значениях $c = \|\mathbf{A}\|h$ сходимость экспоненты e^c обеспечивается с высокой степенью точности относительно небольшим $(2 \ldots 5)$ числом членов ряда $e^c = \sum_{\nu=0}^{L} \frac{c^\nu}{\nu!}$, то для практических задач достаточно, чтобы $h \le c/\|\mathbf{A}\|$ $(c \approx 0{,}1)$. Подбором N можно достичь желаемой степени укрупнения первоначального шага интегрирования в 2^N раз. Дальнейший расчет производится с шагом $H = 2^N h$, а при необходимости в любой момент можно произвести увеличение и этого шага.

Для такого укрупнения шага интегрирования может быть использована формула $\boldsymbol{\varphi}_{k+1} = \boldsymbol{\varphi}_k^2$, $\mathbf{\Phi}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_k(\mathbf{1} + \boldsymbol{\varphi}_k)$, $\mathbf{g}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_{k+1}\mathbf{b}$, но уже относительно $\boldsymbol{\varphi}_N$ и $\mathbf{g}_N$, рассматриваемых в качеств аналогов $\boldsymbol{\varphi}_0$ и $\mathbf{g}_0$. Пусть, начиная с некоторого числа шагов k, следует еще более укрупнить шаг H, теперь уже в 2^M раз, тогда $\boldsymbol{\varphi}_M$ и $\mathbf{g}_M$ должны быть определены из соотношений

$$\boldsymbol{\varphi}_0 = \boldsymbol{\varphi}_N, \quad \boldsymbol{\varphi}_1 = \boldsymbol{\varphi}_N^2, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_M = \boldsymbol{\varphi}_{M-1}^2;$$

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{g}_N, \quad \mathbf{g}_{N+1} = (1 + \boldsymbol{\varphi}_i)\mathbf{g}_i, \quad \mathbf{\Phi}_{i+1} = \mathbf{\Phi}_i(2 \cdot \mathbf{1} + \mathbf{A}\mathbf{\Phi}_i) = \mathbf{\Phi}_{i+1}(\mathbf{1} + \boldsymbol{\varphi}_i).$$

Дальнейшее применение рекуррентных формул позволяет произвести 2^{N+M}-кратное укрупнение первоначального шага h. Если $N = 10$, $M = 5$, то новый шаг будет в $2^{15} = 32\,768$ раз больше предыдущего.

Изложенным методом целесообразно производить укрупнение шага интегрирования жестких систем. Например, если имеются три группы сильно различающихся между собой собственных чисел, то после прохождения первого пограничного слоя $\tau_{\text{пс}1}$ можно произвести N-кратное, а после прохождения второго пограничного слоя $2^N 2^M$-кратное увеличение шага.

В рассмотренном в § 9.16 уравнении второго порядка, где $\alpha_1 = -2 \cdot 10^{10}$, $\alpha_1 = -10$, интервал наблюдения принят $T = 5\tau_2 = 5 \cdot 0{,}1 = 0{,}5$ с. При числе наблюдаемых значений, равном 100, первоначальный шаг $h = \tau_1$ должен быть увеличен в $H/h = 5 \cdot 10^{-3}/5 \cdot 10^{-12} = 10^9$ раз. Для этого необходимо по формуле $\boldsymbol{\varphi}_{k+1} = \boldsymbol{\varphi}_k^2$ произвести 30-кратное последовательное удвоение первоначального шага h.

Заметим, что для увеличения шага интегрирования можно применять и неявные методы. Однако при этом шаг не может быть больше значений, ограниченных допустимой погрешностью. Например, при неявном методе Эйлера приемлем, с точки зрения обеспечения численной устойчивости, практически любой шаг. Однако сделать шаг h больше значения, определенного погрешностью и нормой матрицы $\mathbf{A}$, нельзя.

Примерный алгоритм решения линейных с постоянной функцией воздействия уравнений состояния $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, согласно Ю. В. Ракитскому, выглядит следующим образом.

1. Вводят матрицу $\mathbf{A}$, начальные значения переменных состояния (вектор $\mathbf{x}_0$, вектор $\mathbf{b}$), желаемый интервал интегрирования T, константу c ($c \approx 0{,}1$), шаг наблюдения H.
2. Вычисляют норму матрицы $\mathbf{A}$.
3. Находят h и H из выражений $N \approx (\ln H \|\mathbf{A}\|/c)/\ln 2$, $h \le c/\|\mathbf{A}\|$.
4. Определяют
   $\boldsymbol{\varphi}_0 = \mathbf{1} + \mathbf{A}h + \ldots + (\mathbf{A}h)^{\nu}/\nu!$ и $\mathbf{g}_0 = \boldsymbol{\Phi}_0\mathbf{b} = h[\mathbf{1} + \mathbf{A}h/2 + \ldots + (\mathbf{A}h)^{\nu-1}/\nu!]\mathbf{b}$.
5. Рассчитывают $\boldsymbol{\varphi}_{k+1} = \boldsymbol{\varphi}_k^2$ и $\mathbf{g}_{i+1}(\mathbf{1} + \boldsymbol{\varphi}_i)\mathbf{g}_i$.
6. Считают $i = i + 1$; если $i < N$, переходят к п. 5.
7. Вычисляют $\mathbf{x}_{\text{св } n+1} = \boldsymbol{\varphi}_N\mathbf{x}_n$ и $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{\text{св } n+1} + \mathbf{g}_N$.
8. Если $(n + 1)H < T$, переходят к п. 5 и печатают результат. Если $(n + 1)H > T$, то вычисление заканчивают.

Рассмотренный алгоритм можно использовать и при решении линейных уравнений состояния более общего вида: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in R^m$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t) \in R^m$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, а также нелинейных уравнений состояния $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}, \mathbf{f} \in R^m$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, если применяется последовательная подынтегральная аппроксимация этих уравнений линейными уравнениями вида $\dot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{A}_n\mathbf{x}_n + \mathbf{b}_n$, $\mathbf{x}_n(t_n) = \mathbf{x}_{0n}$, $t \in [t_n, t_{n+1}]$

Заметим, такие методы интегрирования по сути являются численно-аналитическими методами решения уравнений состояния. Разностное уравнение системного метода $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \boldsymbol{\Phi}_N\mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n)$ обладает формальным сходством с разностным уравнением явного метода Эйлера $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n)$. При этом роль шага h играет матрица $\boldsymbol{\Phi}_N$. Используя другие методы аппроксимации функции $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, можно получить аналоги и других классических методов интегрирования, например неявный системный метод ($\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \boldsymbol{\Phi}_N\mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{x}_{n+1})$), соответствующий неявному методу Эйлера ($\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{x}_{n+1})$).

Основным достоинством системных методов является их универсальность, так как они позволяют решать системы дифференциальных уравнений произвольной жесткости. Особенно эффективны эти методы при решении достаточно жестких систем уравнений. При решении же нежестких систем уравнений применение системных методов не дает каких-либо существенных преимуществ по сравнению с использованием классических методов интегрирования. Это происходит потому, что решение уравнений последнего типа не налагает больших ограничений на шаг интегрирования по условиям устойчивости метода. Шаг интегрирования нежестких систем выбирают в основном с учетом обеспечения заданной точности и часто принимают равным шагу интерполяции. Поэтому при решении заведомо нежестких систем уравнений предпочтительней использовать такие методы интегрирования, вычислительные процедуры которых наиболее просты, например явный метод Эйлера. Кроме того, представляет интерес такой подход к численному решению уравнений состояния произвольной жесткости, в основу которого положены методы преобразования исходных систем

уравнений, обеспечивающие возможность интегрирования систем явным методом Эйлера с шагом дискретизации, близким к шагу интерполяции решения.

9.18. Расчет переходных процессов в электрических цепях методом синтетических схем

В § 9.13 был рассмотрен один из общих методов расчета переходных процессов в электрических цепях, ориентированный на использование компьютеров, — метод переменных состояния. В этом параграфе рассматривается более современный подход к компьютерному анализу электрических схем — метод синтетических схем.

Расчет переходных процессов в электрических цепях методом переменных состояния предполагает формирование системы уравнений состояния, аппроксимацию уравнений состояния разностными уравнениями, численное решение полученной системы разностных уравнений на каждом шаге расчета по времени.

Такая последовательность расчета эффективна для цепей с небольшим числом реактивных и нелинейных элементов. Уравнения состояния таких цепей могут быть сформированы вручную или с помощью компьютера по сравнительно простым алгоритмам, рассмотренным в § 9.13. При этом на точность получаемого решения будет влиять только выбор метода численного интегрирования. С ростом сложности цепей получение уравнений состояния вручную становится практически невозможным, и вопросы эффективности автоматического формирования уравнений начинают играть не меньшую роль, чем вопросы последующего их решения. Это происходит потому, что для цепей с большим числом реактивных элементов и с многополюсными нелинейными элементами отсутствуют универсальные алгоритмы формирования уравнений состояния. Разработка же для каждой новой цепи специального алгоритма представляет собой довольно сложную задачу. К тому же реализация подобных алгоритмов требует существенных вычислительных затрат. Поэтому при компьютерном расчете сложных электрических цепей предпочтение отдается такому пути, в котором процедура формирования уравнений наиболее проста, универсальна и согласована с последующим численным решением. Такой путь предполагает иную последовательность этапов расчета.

Сначала выполняется аппроксимация дифференциальных уравнений отдельных элементов цепей разностными уравнениями. Полученным разностным уравнениям ставятся в соответствие активные резистивные схемы замещения. В результате строится схема замещения всей цепи, содержащая только источники тока или напряжения и резистивные элементы. Затем для фиксированного момента времени формируется система алгебраических уравнений, описывающая процесс в активной резистивной схеме замещения цепи. После этого решается полученная система алгебраических уравнений. Для определения значений переменных в последующие моменты времени следует заново рассчитать параметры системы алгебраических уравнений и решить ее.

Подобный путь можно интерпретировать как преобразование задачи расчета переходных процессов в электрических цепях к последовательности задач расчета по постоянному току резистивных цепей той же топологической структуры.

При таком подходе для расчета переходных процессов могут быть использованы методы анализа чисто резистивных цепей, отличающиеся простотой алгоритмов формирования системы уравнений.

Замена элементов исходной цепи активными резистивными двухполюсниками позволяет сохранить топологию цепи и применить все известные методы расчета сложных электрических цепей постоянного тока. Поэтому метод, объединяющий методы численного решения дифференциального уравнения цепи с методами расчета резистивных цепей, далее будем называть методом синтетических схем, а активную резистивную модель элемента — его синтетической схемой. Наряду с этими в литературе используют также названия «метод дискретных схем» и «дискретная схема».

Определим параметры двухполюсной синтетической схемы (рис. 9.41, *в*) катушки и конденсатора (рис. 9.41, *а* и *б*).

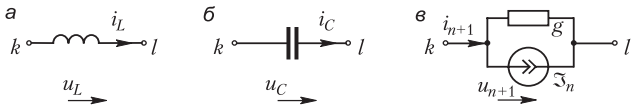


Рис. 9.41

Выполним разностную аппроксимацию дифференциальных уравнений катушки индуктивности и конденсатора на основе неявного метода Эйлера. Для этого применим разностное уравнение неявного метода Эйлера $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{f}_{n+1}$, $\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{x}_{n+1})$ (подробнее см. § 9.14) к уравнениям, связывающим ток и напряжение на катушке индуктивности и конденсаторе:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{u_L(t)}{L}; \quad \frac{du_C}{dt} = \frac{i_C(t)}{C}.$$

В результате получим рекуррентные соотношения, связывающие токи и напряжения в этих элементах в дискретные моменты времени $t = nh$, $n = 0, 1, 2, ...$: для катушки $i_{L,n+1} = \frac{h}{L}u_{L,n+1} + i_{L,n}$; для конденсатора $u_{C,n+1} = u_{C,n} + \frac{h}{C}i_{C,n+1}$ и $i_{C,n+1} = \frac{C}{h}u_{C,n+1} - \frac{C}{h}u_{C,n}$.

Рекуррентные соотношения и для катушки индуктивности и для конденсатора можно записать в общей для обоих элементов форме

$$i_{n+1} = gu_{n+1} + \Im_n, \qquad (*)$$

где $g = h/L$ и $\Im_n = i_{L,n}$ для катушки индуктивности, $g = C/h$ и $_n = (-C/h)u_{C,n}$ для конденсатора.

Уравнение (*) может быть интерпретировано как уравнение первого закона Кирхгофа для узла k цепи, изображенной на рис. 9.41, *в*, а величины g и $\Im_n$ имеют размерности, соответственно, в сименсах и амперах. Таким образом, реактивный элемент заменяется двухполюсником, состоящим из параллельно соединенных проводимости g и источника тока $\Im_n$ с соответствующими значениями парамет-

ров. Схема, изображенная на рис. 9.41, *в*, представляет собой синтетическую, или дискретную, схему реактивного элемента.

При использовании метода трапеций для разностной аппроксимации компонентных дифференциальных уравнений катушки индуктивности и конденсатора получим для катушки индуктивности:

$$i_{n+1} = \frac{h}{2L}u_{n+1} + \left(i_n + \frac{h}{2L}u_n\right), \text{ тогда } g = \frac{h}{2L}, \quad \Im_n = i_n + \frac{h}{2L}u_n,$$

и для конденсатора: $i_{n+1} = \frac{2C}{h}u_{n+1} + \left(i_n + \frac{2C}{h}u_n\right)$, тогда $g = \frac{2C}{h}$, $\Im_n = i_n + \frac{2C}{h}u_n$.

Таким образом, вид синтетической схемы реактивного элемента не изменился при использовании иного метода численного интегрирования. Изменились лишь параметры синтетической схемы. Отметим, что параметр g дискретной модели при использовании любого неявного метода численного интегрирования определяется только параметрами элемента и величиной шага интегрирования h. Параметр $_n$ зависит также от значений тока или (и) напряжения, полученных на n-м шаге интегрирования для методов Эйлера и трапеций, и также от значений переменных в более ранние моменты времени при использовании методов численного интегрирования более высокого порядка.

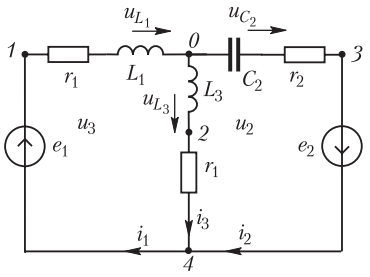


Рис. 9.42

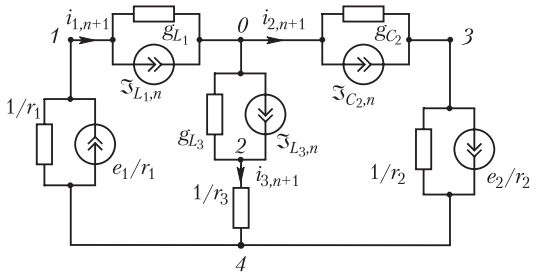


Рис. 9.43

Применим метод синтетических схем для расчета переходного процесса в электрической цепи, показанной на рис. 9.42. Заменим входящие в цепь реактивные двухполюсники их синтетическими схемами и изобразим ее в представленном на рис. 9.43 виде. Параметры синтетических схем при использовании неявного метода Эйлера имеют вид:

$$g_{L_1} = \frac{h}{L_1}; \; g_{L_3} = \frac{h}{L_3}; \; g_{C_2} = \frac{C_2}{h}; \; \Im_{L_1,n} = i_{1,n}; \; \Im_{L_3,n} = i_{3,n}; \; \Im_{C_2,n} = -\frac{C_2 u_{C_2,n}}{h}.$$

Построенная таким образом синтетическая схема представляет собой схему постоянного тока и может быть рассчитана любым из известных методов расчета электрических цепей (методом контурных токов, узловых напряжений и другими). В современных программах, основанных на методе синтетических схем, чаще используется метод узловых напряжений, поскольку именно в рамках этого метода созданы весьма эффективные алгоритмы формирования уравнений цепи.

Система уравнений для определения узловых напряжений

$$\mathbf{U}_{0,\,n+1} = (u_{10,\,n+1};\ u_{20,\,n+1};\ u_{30,\,n+1};\ u_{40,\,n+1})^t$$

в произвольный момент времени $t = (n + 1)h$, $n = 0, 1, 2, ...$) в синтетической схеме, изображенной на рис. 9.43, по значениям источников тока, рассчитанным в момент времени $t = nh$, имеет вид

$$\begin{Vmatrix} g_{L_1} + \dfrac{1}{r_1} & 0 & 0 & -\dfrac{1}{r_1} \\ 0 & g_{L_3} + \dfrac{1}{r_3} & 0 & -\dfrac{1}{r_3} \\ 0 & 0 & g_{C_2} + \dfrac{1}{r_2} & -\dfrac{1}{r_2} \\ -\dfrac{1}{r_1} & -\dfrac{1}{r_3} & -\dfrac{1}{r_2} & \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} u_{10,n+1} \\ u_{20,n+1} \\ u_{30,n+1} \\ u_{40,n+1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\mathfrak{I}_{L_1} + \dfrac{e_1(nh)}{r_1} \\ \mathfrak{I}_{L_3,n} \\ \mathfrak{I}_{C_2,n} + \dfrac{e_2(nh)}{r_2} \\ -\dfrac{e_1(nh)}{r_1} - \dfrac{e_2(nh)}{r_2} \end{Vmatrix}$$

или в матричной форме:

$$\mathbf{GU}_{0,n+1} = \mathfrak{I}_n.$$

Рассмотрим далее алгоритм расчета переходного процесса в цепи, основанный на последовательном решении этой системы уравнений для дискретных моментов времени $t = nh$, $n = 0, 1, 2, ...$

В начальный момент времени ($n = 0$, $t = 0$) токи катушек и напряжение на конденсаторе известны: $i_{1,0} = i_{3,0} = \dfrac{e_1(0)}{r_1 + r_3}$, $u_{C_2,0} = e_2(0)$. Следовательно, могут быть вычислены значения $\mathfrak{I}_{L_1,0} = i_{1,0}$, $\mathfrak{I}_{L_3,0} = i_{3,0}$, $\mathfrak{I}_{C_2,0} = -C_2 u_{C_2,0}/h$ всех источников тока синтетической схемы в момент времени $t = 0$. После решения системы уравнений $\mathbf{GU}_{0,1} = \mathfrak{I}_0$ и определения узловых напряжений $\mathbf{U}_{0,1} = (u_{10,\,1};\ u_{20,\,1};\ u_{30,\,1};\ u_{40,\,1})^t$ можем рассчитать токи и напряжения всех ветвей анализируемой цепи в момент времени $t = h$. В частности, для токов катушек индуктивности и напряжения на конденсаторе имеем:

$$i_{1,1} = g_{L_1} u_{10,1} + \mathfrak{I}_{L_1,0}, \quad i_{3,1} = g_{L_3}(-u_{30,1}) + \mathfrak{I}_{L_3,0}, u_{C_2,1} = u_{30,1},$$

следовательно, для $t = h$ могут быть рассчитаны значения источников тока синтетических схем реактивных элементов:

$$\mathfrak{I}_{L_1,1} = i_{1,1}, \ \mathfrak{I}_{L_3,1} = i_{3,1}, \ \mathfrak{I}_{C_2,1} = -C_2 u_{C_2,1}/h,$$

которые используются для определения вектора источников тока $\boldsymbol{\varphi}_1$:

$$\mathfrak{I}_1 = \left(-\mathfrak{I}_{L_1,1} + \frac{e_1(h)}{r_1};\ \mathfrak{I}_{L_3,1};\ \mathfrak{I}_{C_2,1} + \frac{e_2(h)}{r_2};\ -\frac{e_1(h)}{r_1} - \frac{e_2(h)}{r_2} \right)^t.$$

После решаем уравнение $\mathbf{GU}_{0,2} = \mathfrak{I}_1$, определяем узловые напряжения $\mathbf{U}_{0,2} = (u_{10,2};\ u_{20,2};\ u_{30,2};\ u_{40,2})^t$ для момента времени t $2h$, затем рассчитываем токи и напряжения всех ветвей цепи для этого момента времени и т. д. Действуя

таким образом, мы получим численное решение задачи, то есть напряжения и токи всех ветвей схемы в дискретные моменты времени $t = nh$, $n = 0, 1, 2, ...$

Отметим, что при выполнении расчета можно вычислять по узловым напряжениям не все переменные, а только те, которые определяют значения элементов вектора источников тока $\boldsymbol{\varphi}_1$. Расчет остальных токов и напряжений не является обязательным. В рассмотренном примере на каждом шаге расчета вычислялись токи катушек индуктивности и напряжения на конденсаторе, то есть переменные состояния цепи. Однако в общем случае в качестве переменных, расчет которых обязателен на каждом шаге, могут выступать и иные токи или напряжения, взаимно-однозначно связанные с переменными состояния. Использование этой особенности метода синтетических схем позволяет за счет некоторой свободы в выборе переменных повышать эффективность анализа процессов в электрических цепях.

Важной особенностью метода синтетических схем является неизменность в ходе расчета матрицы $\mathbf{G}$ системы уравнений $\mathbf{GU}_{0,n+1} = \mathfrak{I}_n$ при постоянном шаге интегрирования h. Это обстоятельство позволяет значительно ускорить процесс расчета. Если предварительно выполнить обращение (или триангуляцию) матрицы $\mathbf{G}$, то затем для получения решения достаточно на каждом шаге умножать обратную матрицу на вектор-столбец источников тока $\mathfrak{I}_n$.

Эффективность расчета переходных процессов изложенным методом можно повысить за счет уменьшения порядка системы уравнений, составленной по методу узловых напряжений для синтетической схемы всей цепи. Этого можно достичь построением синтетической схемы участка цепи, содержащего несколько элементов. Алгоритмы определения параметров такой синтетической схемы называют макромоделями.

В рамках макромодели участка цепи, содержащего несколько элементов, можно выделить макромодели высшего и низшего уровней. Макромодель высшего уровня представляет собой алгоритм определения величины проводимости g и источника тока $\mathfrak{I}_n$ синтетической схемы участка цепи. Макромодель низшего уровня реализует процедуру определения токов и напряжений на каждом из элементов участка цепи, для которого строится макромодель.

Применим макромоделирование для расчета переходного процесса в изображенной на рис. 9.42 цепи, используя неявный метод Эйлера. Построим макромодель ветви, содержащей резистор r_3 и катушку индуктивности L_3.

Выражая из уравнения $u_3 = L_3 \dfrac{di_3}{dt} + i_3 r_3$ величину $\dfrac{di_3}{dt} = \dfrac{u_3 - i_3 r_3}{L_3}$ и составляя разностное уравнение

$$i_{3,n+1} = i_{3,n} + \frac{h}{L_3}\left(u_{3,n+1} - i_{3,n+1} \cdot r_3\right),$$

перепишем его в виде

$$i_{3,n+1} = g_3 u_{3,n+1} + \mathfrak{I}_{3,n}, \quad \text{где} \quad g_3 = \frac{h}{hr_3 + L_3}, \ \mathfrak{I}_{3,n} = \frac{L_3 \cdot i_{3,n}}{hr_3 + L_3}.$$

Соотношения для g_3 и $\Im_{3,n}$ представляют собой макромодель высшего уровня *rL*-ветви.

В макромодели низшего уровня определяются значения токов и напряжений на элементах участка цепи, для которого строится макромодель, необходимых для вычисления источника тока в синтетической схеме. Для *rL*-двухполюсника этой переменной является ток катушки индуктивности (переменная состояния), и он может быть определен из соотношения $i_{3,\ n+1} = g_3(-u_{20,\ n+1}) + \Im_{3,n}$, которое и представляет собой макромодель низшего уровня. Отметим, что в даном случае в макромодели низшего уровня возможно использование и другой переменной, однозначно связанной с переменной состояния, например напряжения на резисторе.

Построим макромодель участка цепи, состоящего из последовательно соединенных r_2, C_2 и источника ЭДС $e_2(t)$ (рис. 9.42). Алгебраизуя с помощью разностного уравнения неявного метода Эйлера компонентное уравнение конденсатора C_2, можем записать: $u_{C_2,n+1} = u_{C_2,n} + (h/C_2)\, i_{2,n+1}$. Уравнение второго закона Кирхгофа $u_{C_2} - u_2 + i_2 r_2 = e_2$ для контура «узел *0*, C_2, r_2, узел *4*, узел *0*», запишем для дискретных значений соответствующих величин на момент времени $t_{n+1} = (n+1)h$, и в результате после простых преобразований получим макромодель высшего уровня:

$$g_2 = \frac{C_2}{h + C_2 r_2},\ \ \Im_{2,n} = g_2(e_{2,n+1} - e_{2,n} - u_{2,n} + r_2 i_{2,n}).$$

В макромодели низшего уровня определяются переменные, необходимые для вычисления источника тока $\Im_{2,n}$ на каждом шаге расчета. В данном случае это ток $i_{2,n}$ и напряжение $u_{2,n}$ участка цепи, для которого строится макромодель

$$u_{2,n+1} \quad - u_{20,n+1},\ \ i_{2,n+1} = g_2 u_{2,n+1} + \Im_{2,n}.$$

Вместо тока $i_{2,n+1}$ и напряжения $u_{2,n+1}$ может использоваться и переменная состояния $u_{C_2,n+1} = u_{2,n+1} - r_2 i_{2,n+1}$. В этом случае выражение для источника тока $_{2n}$ примет вид

$$\Im_{2,n} = g_2(e_{2,n+1} - e_{2,n} - u_{C_2,n}).$$

В данном случае, использование вместо переменной состояния тока и напряжения *rCe*-ветви может быть оправдано тем, что эти величины так или иначе присутствуют в расчете и напряжение на конденсаторе может не определяться дополнительно. С другой стороны, использование переменной состояния позволяет упростить выражение для $_{2n}$, исключив операцию вычитания, что при определенных сочетаниях параметров *rCe*-ветви может повысить точность вычислений. При построении макромоделей сложных многополюсных цепей отмеченная свобода в выборе переменных может оказать решающее влияние на эффективность и точность модели.

Макромоделирование позволяет значительно упростить синтетическую схему анализируемой цепи. Так, в рассматриваемом примере при использовании полученных выше макромоделей синтетическая схема цепи принимает вид, по-

казанный на рис. 9.44. В результате число узлов сократилось, и порядок системы уравнений метода узловых напряжений стал равен двум. Нетрудно заметить, что узел *1* также можно исключить, если построить макромодель участка цепи с элементами e_1, r_1, L_1 (см. рис. 9.42).

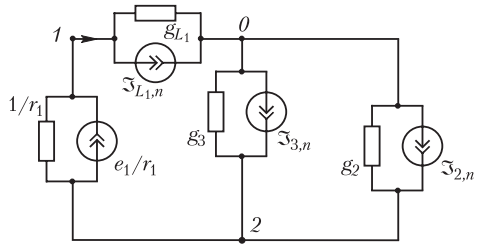


Рис. 9.44

Современные программы анализа переходных процессов в электрических цепях, использующие метод синтетических схем, имеют обширные библиотеки макромоделей различных характерных групп элементов электрических цепей. Входящие в библиотеки макромодели охватывают не только двухполюсные, но и многополюсные элементы.

Глава десятая

Расчет переходных процессов в цепях с сосредоточенными параметрами операторным методом

10.1. Операторное изображение функций, их производных и интегралов

В предыдущей главе был изложен классический метод расчета переходных процессов в линейных электрических цепях с постоянными параметрами. Такие процессы описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Эти уравнения могут быть проинтегрированы также операторным методом.

Хевисайд применил этот метод в конце 19-го столетия к расчету переходных процессов в электрических цепях. При этом Хевисайд, не ссылаясь на предыдущие математические работы в этой области, не приводит и математического обоснования метода.

При использовании операторного метода действительные функции времени, называемые оригиналами, заменяют их операторными изображениями. Соответствие между оригиналом и изображением устанавливается с помощью некоторого функционального преобразования. Это преобразование выбирается так, чтобы операции дифференцирования и интегрирования оригиналов заменялись алгебраическими операциями над их изображениями. В таком случае дифференциальные уравнения для оригиналов переходят в алгебраические уравнения для их изображений.

Связь между оригиналом $f(t)$ и его изображением устанавливается с помощью *интеграла Лапласа:*

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt,$$

где $p = \sigma + j\eta$ — комплексное число. Таким образом, операторное изображение действительной функции времени является функцией комплексного числа p.

Для того чтобы интеграл Лапласа имел конечное значение, функция $f(t)$ должна удовлетворять определенным условиям. Она должна удовлетворять условиям Дирихле, т. е. за любой конечный промежуток времени иметь конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов. Кроме того, будем считать, что при $t > 0$ удовлетворяется условие $|f(t)| < Ae^{\alpha t}$, где A и α — некоторые положительные числа. Иными словами, можно выбрать A и α так, чтобы модуль функции $f(t)$ возрастал медленнее, чем $Ae^{\alpha t}$. Все реальные токи и напряжения удовлетворяют этим условиям. Для того чтобы интеграл Лапласа имел конечное значение, необходимо полагать $\sigma > \alpha$.

Комплексное число p называют оператором.

Условимся записывать *преобразование Лапласа* также в виде

$$F(p) = \mathscr{L}[f(t)].$$

Соответствие между оригиналом и изображением записывается условно в виде

$$F(p) \Rightarrow f(t).$$

Заметим, что по определению преобразование Лапласа применимо начиная с момента $t = +0$. Далее, обозначая начальное значение функции и ее производных через $f(0), f'(0), f''(0), ..., f^{(n)}(0)$, будем понимать под ними их значения при $t = +0$.

Существует обратное функциональное преобразование, дающее возможность определить оригинал по его изображению. Такое преобразование, носящее название *обратного преобразования Лапласа,* имеет вид

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp = f(t), \text{ где } p = \sigma_0 + j\eta.$$

Обратное преобразование Лапласа кратко записывается в виде

$$\mathscr{L}^{-1}[F(p)] = f(t).$$

В электротехнической практике распространено также функциональное преобразование, называемое *преобразованием по Карсону,* имеющее вид

$$p\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt = pF(p) = \Phi(p).$$

Достоинством преобразования по Карсону является одинаковость размерностей оригинала и изображения. Это видно из того, что произведение pt должно быть безразмерным. В случае же преобразования по Лапласу размерность изображения равна размерности оригинала, умноженной на размерность времени.

Достоинством преобразования по Лапласу является его соответствие преобразованию Фурье, на котором основывается широко используемый в настоящее время частотный метод анализа цепей и который будет изложен в гл. 11. Исходя из последнего соображения, а также из того, что в значительной части современной литературы применяется преобразование по Лапласу, в дальнейшем будем также пользоваться этим преобразованием.

Получим изображение производной $\frac{d}{dt}[f(t)] = f\ \ (t)$. Имеем

$$f'(t) \Rightarrow \int_0^\infty f'(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что, согласно наложенным на $f(t)$ условиям, $[e^{-pt}f(t)]_{t=\infty} = 0$, получаем

$$f'(t) \Rightarrow \left| e^{-pt} f(t) \right|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt = pF(p) - f(0).$$

В частном случае, при нулевом начальном условии, когда $f(0) = 0$, для изображения производной имеем

$$f'(t) \Rightarrow pF(p).$$

Изображение второй производной

$$f''(t) \Rightarrow p[pF(p) - f(0)] - f'(0) = p^2\left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2}\right].$$

Соответственно, для производной порядка n получаем

$$f^{(n)}(t) \Rightarrow p^n\left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \frac{f''(0)}{p^3} - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n}\right].$$

В частности, при нулевых начальных условиях, если при $t \quad 0$ сама функция $f(t)$ и все ее производные до $(n - 1)$-й включительно равны нулю, имеем

$$f^{(n)}(t) \Rightarrow p^n F(p).$$

Найдем теперь изображение интеграла $\psi(t) = \int\limits_0^t f(t)\,dt.$

Используя определение изображения функции $\psi(t)$ с помощью интеграла Лапласа и интегрируя по частям, получаем

$$\Psi(p) = \int\limits_0^\infty \psi(t)e^{-pt}\,dt = \left|-\psi(t)\frac{1}{p}e^{-pt}\right|_0^\infty + \frac{1}{p}\int\limits_0^\infty \psi'(t)e^{-pt}\,dt.$$

Первое слагаемое равно нулю, так как функция $\psi(t)$ должна удовлетворять условию $|\,e^{-pt}\psi(t)|_{t=\infty} = 0$, а при $t \quad 0$ будет $\psi(t) = \int\limits_0^t f(t)\,dt = 0$. Второе слагаемое равно $\frac{1}{p}F(p)$, так как $\psi'(t) = f(t)$ и $f(t) \Rightarrow F(p)$. Таким образом, изображение интеграла, взятого в пределах от 0 до t, будет

$$\int\limits_0^t f(t)\,dt \Rightarrow \frac{F(p)}{p}.$$

Итак, мы убедились, что, изображая функции времени $f(t)$ с помощью интеграла Лапласа, операции дифференцирования и интегрирования этих функций заменяем алгебраическими операциями над изображениями этих функций.

В дифференциальных уравнениях электрической цепи с производной по времени чаще всего встречаемся в выражении для напряжения u_L на катушке: $u_L = L\frac{di}{dt}$. Обозначая операторное изображение тока $i(t)$ в виде $I(p)$, получаем согласно вышеизложенному операторное изображение для $u_L(t)$:

$$U_L(p) = pLI(p) - Li(0).$$

С интегралом чаще всего встречаемся в выражении напряжения u_C на конденсаторе: $u_C = \frac{1}{C}\int\limits_0^t i\,dt + u_C(0).$

Изображение первого слагаемого согласно изложенному будет $I(p)/(pC)$. Второе слагаемое $u_C(0)$ является постоянной величиной и имеет изображение

$$\int_0^\infty u_C(0)\, e^{-pt}\, dt = \left| -\frac{u_C(0)}{p} e^{-pt} \right|_0^\infty = \frac{u_C(0)}{p}.$$

Следовательно, в общем случае при ненулевом начальном условии изображение напряжения на конденсаторе $u_C(t)$ имеет вид

$$U_C(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p}.$$

Таким образом, при составлении уравнений цепи в операторной форме автоматически будут учитываться все физические начальные условия — значения токов в катушках и напряжения на конденсаторах при $t = 0$.

10.2. Примеры изображений функций

Изображение постоянной величины A имеет вид

$$\int_0^\infty A e^{-pt}\, dt = \left| -\frac{A}{p} e^{-pt} \right|_0^\infty = \frac{A}{p},$$

т. е. $\mathscr{L}[A] = A/p$ или $A \quad A/p$.

Пусть $f(t) = e^{\alpha t}$, тогда

$$F(p) = \int_0^\infty e^{\alpha t} e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty e^{-(p-\alpha)t}\, dt = \left| -\frac{1}{p-\alpha} e^{-(p-\alpha)t} \right|_0^\infty = \frac{1}{p-\alpha}$$

и, следовательно,

$$e^{\alpha t} \Rightarrow \frac{1}{p-\alpha}.$$

Если $\alpha t = j(\omega t + \psi)$, то

$$e^{\alpha t} = e^{j\psi} e^{j\omega t} \Rightarrow \frac{e^{j\psi}}{p - j\omega}.$$

Следовательно,

$$\sin\omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \Rightarrow \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

На основе этих результатов можно составить следующую таблицу соответствия некоторых функций (оригиналов) и их изображений.

Оригинал	**Изображение**
A	$\frac{A}{p}$
$Ae^{\alpha t}$	$\frac{A}{p-\alpha}$

Оригинал	Изображение
$1-e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\alpha}=\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$
$\mathrm{sh}\,\alpha t=\frac{1}{2}(e^{\alpha t}-e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha}-\frac{1}{p+\alpha}\right)=\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
$\mathrm{ch}\,\alpha t=\frac{1}{2}(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha}+\frac{1}{p+\alpha}\right)=\frac{p}{p^2-\alpha^2}$
$\sin\omega t=\frac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})$	$\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{p-j\omega}-\frac{1}{p+j\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t=\frac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t})$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-j\omega}+\frac{1}{p+j\omega}\right)=\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t+\psi)$	$\frac{p\sin\psi+\omega\cos\psi}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t+\psi)$	$\frac{p\cos\psi-\omega\sin\psi}{p^2+\omega^2}$
$e^{-\delta t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+\delta)^2+\omega^2}$
$e^{-\delta t}\cos\omega t$	$\frac{p+\delta}{(p+\delta)^2+\omega^2}$
$te^{-\delta t}$	$\frac{1}{(p+\delta)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$

В приведенной таблице даны соотношения между оригиналами и их изображениями при преобразовании Лапласа. При использовании преобразования Карсона следует умножить все изображения на p. В этом случае изображением постоянной величины будет сама постоянная величина. Обратим внимание на то, что кратные полюсы в выражении для $F(p)$ изображают функции, в которых время t входит множителем (последние два выражения в таблице).

Найдем изображение функции, смещенной во времени на величину x, при условии, что при $t < 0$ имеем $f(t) = 0$. Если $f(t) \Rightarrow F(p)$, то для изображения той же функции при $t' = t - x$ получим

$$f(t-x) \Rightarrow \int_0^\infty f(t-x)e^{-pt}\,dt = e^{-px}\int_0^\infty f(t-x)e^{-pt}e^{px}\,dt =$$

$$= e^{-px}\int_0^\infty f(t')e^{-pt'}\,dt' = e^{-px}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt = e^{-px}F(p),$$

то есть

$$f(t-x) \Rightarrow e^{-px}F(p).$$

Найдем оригинал, соответствующий смещению изображения в комплексной плоскости на комплексное число a.

Пусть

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt \Rightarrow f(t).$$

Тогда

$$F(p+a) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-(p+a)t}\,dt = \int_0^\infty [f(t)\,e^{-at}]e^{-pt}\,dt \Rightarrow f(t)\,e^{-at},$$

то есть

$$f(t)\,e^{-at} \Rightarrow F(p+a).$$

Подробные таблицы соответствия оригиналов и изображений приведены в специальных справочниках.

10.3. Законы Кирхгофа и Ома в операторной форме

Первый закон Кирхгофа в применении к узлу цепи для действительных токов имеет вид

$$\sum i_k = 0.$$

Так как ток i_k изображается с помощью интеграла Лапласа, а интеграл суммы равен сумме интегралов от слагаемых этой суммы, то первый закон Кирхгофа в операторной форме записывается в виде

$$\sum I_k(p) = 0.$$

Соответственно, второй закон Кирхгофа в применении к контуру цепи

$$\sum e_k = \sum u_k,$$

где e_k — сумма ЭДС источников энергии в k-й ветви и u_k — напряжение на k-й ветви, записывается в операторной форме:

$$\sum E_k(p) = \sum U_k(p).$$

Естественно, что при составлении уравнений Кирхгофа в операторной форме необходимо задаться положительными направлениями всех токов и соблюдать все правила знаков, установленные ранее при составлении уравнений на основе законов Кирхгофа для действительных функций времени. В общем случае для ветви, содержащей все три элемента (r, L, C), имеем

$$u_k = r_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k}\int_0^t i_k dt + u_{Ck}(0);$$

поэтому согласно § 10.1 с учетом ненулевых начальных условий получим

$$U_k(p) = r_k I_k(p) + pL_k I_k(p) - L_k i_k(0) + \frac{I_k(p)}{pC_k} + \frac{u_{Ck}(0)}{p}$$

или

$$U_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{Ck}(0)}{p} = I_k(p)\left(r_k + pL_k + \frac{1}{pC_k}\right).$$

Величину

$$r_k + pL_k + \frac{1}{pC_k} = Z_k(p)$$

называют обобщенным сопротивлением ветви, или, иначе, операторным сопротивлением ветви.

Окончательно при этом операторная запись законов Кирхгофа примет вид

$$\sum I_k(p) = 0;$$

$$\sum E_k(p) = \sum\left[I_k(p)Z_k(p) - L_k i_k(0) + \frac{u_{Ck}(0)}{p}\right].$$

Ток в k-й ветви и падение напряжения в этой ветви в операторной форме связаны соотношением

$$I_k(p) = \frac{U_k(p) + L_k i_k(0) - u_{Ck}(0)/p}{Z_k(p)},$$

которое представляет собой закон Ома, обобщенный на случай переходного процесса. В частном случае при нулевых начальных условиях, т. е. при $i_{Lk}(0) = 0$ и $u_{Ck}(0) = 0$, имеем

$$I_k(p) = \frac{U_k(p)}{Z_k(p)} = \frac{U_k(p)}{r_k + pL_k + 1/(pC_k)}.$$

Заметим, что структуры записи операторного сопротивления ветви и комплексного сопротивления этой же ветви

$$Z_k = r_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k}$$

тождественны и выражение для комплексного сопротивления Z_k можно получить через операторное сопротивление $Z_k(p)$ путем замены p на $j\omega$, т. е. $Z_k = Z_k(j\omega)$. В частности, полагая $p = 0$, получим сопротивление ветви постоянному току.

Сопоставляя выражения законов Кирхгофа в операторной форме с их выражениями в комплексной форме

$$\sum \dot{I}_k = 0 \quad \text{и} \quad \sum \dot{E}_k = \sum \dot{I}_k Z_k,$$

где комплексные величины $\dot{I}_k$, Z_k содержат частоту ω только с множителем *j*, видим, что при нулевых начальных условиях законы Кирхгофа в операторной форме одинаковы по виду с этими законами в комплексной форме. Поэтому при нулевых начальных условиях способы расчета любых сложных цепей при переходных процессах операторным методом аналогичны способам расчета установившихся режимов комплексным методом. В частности, при нулевых начальных условиях входное операторное сопротивление сколь угодно сложного пассивного двухполюсника можно получить из комплексного сопротивления этого двухполюсника заменой *j*ω на *p*.

При ненулевых начальных условиях можем второй закон Кирхгофа для всех контуров записать в виде

$$\sum E_k(p) + \sum L_k i_k(0) - \sum \frac{u_{Ck}(0)}{p} = \sum I_k(p) Z_k(p).$$

Рассматривая члены $\Sigma\, L_k i_k(0)$ и $-\Sigma\, u_{Ck}(0)/p$ как ЭДС добавочных источников энергии в контурах (рис. 10.1), можем с их учетом сохранить все те же общие методы расчета сложных цепей. В частности, можно воспользоваться методом наложения и рассчитать процесс в цепи сначала при нулевых начальных условиях, а затем наложить на него процесс, возникающий только под действием одних добавочных ЭДС, определяемых начальными токами в катушках и начальными напряжениями на конденсаторах.

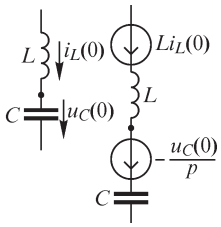


Рис. 10.1

Рассмотрим последовательное соединение нескольких участков цепи. Пусть цепь состоит из одного контура. В таком случае ток для всех участков этой цепи один и тот же. Применяя второй закон Кирхгофа в операторной форме, имеем

$$\sum E_k(p) = I_k(p) \sum Z_k(p) - \sum L_k i_k(0) + \sum \frac{u_{Ck}(0)}{p}.$$

Величина $Z(p)$ $\Sigma\, Z_k(p)$ является операторным сопротивлением всей цепи. Таким образом, *при последовательном соединении участков цепи их операторные сопротивления складываются*.

Рассмотрим параллельное соединение двух ветвей. В этом случае напряжение на них общее. Пусть в каждой ветви последовательно соединены *r, L* и *C*. Имеем для каждой ветви

$$U(p) = I_1(p) Z_1(p) - L_1 i_1(0) + \frac{u_{C1}(0)}{p}$$

и

$$U(p) = I_2(p) Z_2(p) - L_2 i_2(0) + \frac{u_{C2}(0)}{p},$$

где

$$Z_1(p) = r_1 + pL_1 + \frac{1}{pC_1} \quad \text{и} \quad Z_2(p) = r_2 + pL_2 + \frac{1}{pC_2}.$$

Суммарный ток в неразветвленной части цепи изображается как

$$I(p) = I_1(p) + I_2(p) = \frac{U(p) + L_1 i_1(0) - u_{C1}(0)/p}{Z_1(p)} + \frac{U(p) + L_2 i_2(0) - u_{C2}(0)/p}{Z_2(p)}.$$

Отсюда видим, что *при ненулевых* начальных условиях *нельзя* представить $I(p)$ как произведение $U(p)$ на некоторый множитель $Y(p)$, имеющий смысл операторной проводимости. Однако *при нулевых* начальных условиях это *возможно*, так как при этом

$$I(p) = U(p)\left[\frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)}\right] = U(p)[Y_1(p) + Y_2(p)] = U(p)Y(p).$$

Величины $Y_1(p) = \dfrac{1}{Z_1(p)}$, $Y_2(p) = \dfrac{1}{Z_2(p)}$ и $Y(p) = \dfrac{1}{Z(p)}$ называют операторными проводимостями.

Таким образом, *при нулевых начальных условиях в случае параллельного соединения участков цепи их операторные проводимости складываются.*

10.4. Расчет переходных процессов в электрических цепях операторным методом

Рассмотрим сначала несколько простых примеров, исследованных ранее классическим методом.

При включении цепи (r, L) под постоянное напряжение $u = U = \text{const}$ имеем $U(p) = U/p$ и $Z(p) = pL + r$, а следовательно, при нулевом начальном условии $i(0) = 0$ операторное изображение тока, согласно закону Ома в операторной форме, получает выражение

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U/p}{r + pL} = \frac{U}{r}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + r/L}\right).$$

Пользуясь изображением функции $e^{\alpha t}$ (см. § 10.2), для искомого тока можем написать

$$i(t) = \frac{U}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right).$$

В случае включения цепи (r, C) под действие постоянного напряжения при $u_C(0) = 0$ имеем

$$I(p) = \frac{U/p}{r + 1/(pC)} = \frac{U}{r}\frac{1}{p + 1/(rC)}$$

и, соответственно,

$$i(t) = \frac{U}{r}e^{-\frac{t}{rC}}.$$

При включении цепи (r, L, C) под действие постоянного напряжения при нулевых начальных условиях получаем

$$I(p) = \frac{U/p}{r + pL + 1/(pC)} = \frac{U}{L}\frac{1}{p^2 + \frac{r}{L}p + 1/(LC)} =$$

$$= \frac{U}{L}\frac{1}{\left(p + \frac{r}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{2L}\right)^2} = \frac{U}{\omega' L}\frac{\omega'}{(p+\delta)^2 + \omega'^2},$$

где

$$\delta = \frac{r}{2L};\ \omega'^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \text{ и } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Используя таблицу из § 10.2, находим оригинал искомого тока:

$$i(t) = \frac{U}{\omega' L} e^{-\delta t} \sin \omega' t.$$

Достоинство операторного метода для расчета переходных процессов, заключающееся в алгебраизации дифференциальных уравнений цепи, особенно проявляется при расчете сложных цепей.

В предыдущем параграфе было отмечено, что, учитывая члены вида $L_k i_k(0)$ и $-u_{Ck}(0)/p$ как добавочные ЭДС, можем для расчета переходных процессов воспользоваться всеми методами расчета сложных цепей, рассмотренными в гл. 5 применительно к установившимся режимам. Если в цепи имеются индуктивно-связанные ветви, то члены вида $M_{ks} i_s(0)$ также следует рассматривать как некоторые добавочные источники ЭДС, и уравнение второго закона Кирхгофа для контура, в котором действуют ЭДС взаимной индукции, следует писать в виде

$$\sum E_k(p) + \sum L_k i_k(0) + \sum M_{ks} i_s(0) - \sum \frac{1}{p} u_{Ck}(0) = \sum Z_k(p) I_k(p) + \sum p M_{ks} I_s(p).$$

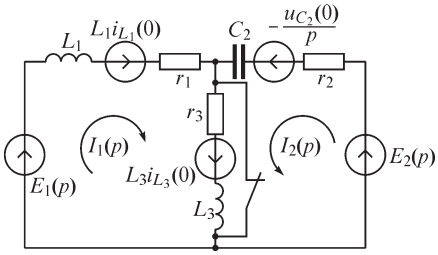


Рис. 10.2

В качестве примера расчета сложной цепи рассмотрим расчет переходного процесса в цепи, приведенной на рис. 10.2, при размыкании ключа. Составим уравнения по методу контурных токов:

$$Z_{11}(p) I_1(p) + Z_{12}(p) I_2(p) = E_{11}(p);$$
$$Z_{21}(p) I_1(p) + Z_{22}(p) I_2(p) = E_{22}(p),$$

где

$$Z_{11}(p) = r_1 + r_3 + p(L_1 + L_3);\quad Z_{22}(p) = r_2 + r_3 + \frac{1}{pC_2} + pL_3;$$

$$Z_{12}(p) = Z_{21}(p) = r_3 + pL_3;\quad E_{11}(p) = E_1(p) + L_1 i_{1L}(0) + L_3 i_{3L}(0);$$

$$E_{22}(p) = E_2(p) - \frac{u_{C2}(0)}{p} + L_3 i_{3L}(0).$$

Решив систему уравнений, получим

$$I_1(p) = \frac{Z_{22}(p)}{D(p)} E_{11}(p) + \frac{-Z_{12}(p)}{D(p)} E_{22}(p);$$

$$I_2(p) = \frac{-Z_{21}(p)}{D(p)} E_{11}(p) + \frac{Z_{11}(p)}{D(p)} E_{22}(p);$$

$$D(p) = Z_{11}(p)Z_{22}(p) - [Z_{12}(p)]^2.$$

Рассмотрим вид этих функций, когда $e_1 \quad E_0 = \text{const}$ и $e_2 \quad E_m \sin \omega t$. Соответственно,

$$E_1(p) = \frac{E_0}{p} \quad \text{и} \quad E_2(p) = \frac{E_m \omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Подставляя значения $Z_{11}(p)$, $Z_{22}(p)$, $Z_{12}(p)$, а также $E_{11}(p)$ и $E_{22}(p)$ для тока $I_1(p)$, например, получим

$$I_1(p) = \frac{E_0 G_1(p)}{pH_1(p)} - \frac{E_m \omega G_2(p)}{(p^2 + \omega^2)H_1(p)} + \frac{u_{C2}(0)G_3(p)}{pH_1(p)} +$$

$$+ \frac{L_1 i_{1L}(0)G_4(p)}{H_1(p)} + \frac{L_3 i_{3L}(0)G_5(p)}{H_1(p)} = \frac{G(p)}{p(p^2 + \omega^2)H_1(p)},$$

где

$$H_1(p) = a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = L_1 L_3 p^3 + [L_3(r_1 + r_2) + L_1(r_2 + r_3)]p^2 +$$

$$+ \left[r_1(r_2 + r_3) + r_2 r_3 + \frac{L_1 + L_3}{C_2} \right] p + \frac{r_1 + r_3}{C_2};$$

$$G_1(p) = G_4(p) = pZ_{22}(p) = (r_2 + r_3)p + 1/C_2 + L_3 p^2;$$

$$G_2(p) = G_3(p) = pZ_{12}(p) = p(r_3 + pL_3);$$

$$G_5(p) = pZ_2(p) = r_2 p + 1/C_2.$$

В полученном выражении $I_1(p)$ первые два члена определяют ток в переходном процессе при включении цепи под действие ЭДС e_1 и e_2. Последние три члена определяют ток переходного процесса, возникающего в цепи за счет ненулевых начальных значений токов в катушках L_1 и L_3 и напряжения на конденсаторе C_2. Если до размыкания ключа ток в катушке L_3 отсутствовал, то $i_{3L}(0) = 0$ и член, содержащий этот ток, отсутствует. Из полученных выражений вытекает также возможность расчета переходного процесса наложением переходных процессов, рассчитанных отдельно от каждой ЭДС, начальных токов и напряжений.

Как видно из данного примера, операторное изображение тока представляет собой рациональную дробь, где и числитель, и знаменатель являются полиномами оператора p. В следующем параграфе будет рассмотрен способ перехода от изображения к оригиналу, в котором используются некоторые свойства рациональных дробей. В некоторых случаях эти дроби можно привести к виду, представленному в таблицах, в которых даны соответствующие им оригиналы. Однако в этих таблицах (например, *Диткин В. А., Кузнецов П. И.* Справочник по операционному исчислению) такие формулы приведены для полиномов $H_1(p)$ относительно низкого порядка.

10.5. Переход от изображений к оригиналу. Теорема разложения

Для нахождения оригинала представим изображение, полученное в виде рациональной дроби, простейшими слагаемыми, для которых известны оригиналы. С этой целью воспользуемся теоремой разложения. Пусть имеется изображение в виде

$$X(p) = \frac{G(p)}{H(p)},$$

где $G(p)$ и $H(p)$ — полиномы от p. Здесь будем предполагать, что степень m полинома в числителе меньше степени n полинома в знаменателе ($m < n$). В дальнейшем, в гл. 12, снимем это ограничение и увидим, что при $m \geq n$ появляются ЭДС, токи и напряжения, имеющие импульсный характер, т. е. принимающие бесконечно большие значения в течение бесконечно малых интервалов времени. Не рассматривая здесь таких импульсных функций, являющихся, по сути дела, результатом идеализации реальных ЭДС, токов и напряжений, будем полагать $m < n$.

Предположим, кроме того, что уравнение $H(p) = 0$ не имеет кратных корней, а также не имеет корней, равных корням уравнения $G(p) = 0$. При указанных условиях рациональную дробь можно разложить на простейшие дроби:

$$\frac{G(p)}{H(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \ldots + \frac{A_n}{p - p_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{p - p_k},$$

где $p_1, p_2, ..., p_n$ — корни $H(p)$. Для определения коэффициентов A_k можно воспользоваться одним из многих приемов, известных из алгебры. Умножив обе части равенства на $(p - p_k)$ и приняв $p \quad p_k$, получим справа A_k, а слева — неопределенность. Раскрывая эту неопределенность, находим

$$A_k = \left| \frac{G(p)(p - p_k)}{H(p)} \right|_{p=p_k} = G(p_k) \lim_{p \to p_k} \frac{p - p_k}{H(p)} = \frac{G(p_k)}{H'(p_k)}.$$

Таким образом,

$$X(p) = \frac{G(p)}{H(p)} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{A_k}{p - p_k} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} \frac{1}{p - p_k}.$$

Так как $\dfrac{A_k}{p - p_k} \Rightarrow A_k e^{p_k t}$, то для искомой величины $x(t)$ имеем

$$x(t) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Это равенство и называют т е о р е м о й р а з л о ж е н и я.

В частном случае, когда один из корней полинома $H(p)$, допустим p_1, равен нулю, то $e^{p_k t} = 1$ и соответствующий член в разложении обращается в постоянную величину. Выделяя этот член, напишем

$$X(p) \Rightarrow x(t) = \frac{G(0)}{H'(0)} + \sum_{k=2}^{k=n} \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Полином $H(p)$ может иметь корень, лежащий в начале координат ($p_1 = 0$), когда в данной цепи имеются источники постоянной ЭДС (или источники посто-

янного тока). Выделенный постоянный член представляет собой установившиеся ток или напряжение в цепи.

Если $H(p)$ имеет пару сопряженных чисто мнимых корней, лежащих на оси мнимых $p_1 \quad j\omega$, $p_2 = -j\omega$, то можно записать

$$X(p) \Rightarrow x(t) = \frac{G(j\omega)}{H'(j\omega)} e^{j\omega t} + \frac{G(-j\omega)}{H'(-j\omega)} e^{-j\omega t} + \sum_{k=3}^{k=n} \frac{G(p_k)}{H'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Полином $H(p)$ может иметь пару чисто мнимых сопряженных корней в случае, если рассматривается переходный процесс при наличии в цепи источников синусоидальных ЭДС или источников синусоидальных токов. Два первых выделенных члена определяют синусоидальный ток или напряжение установившегося режима.

Для иллюстрации применения теоремы разложения рассмотрим некоторые примеры.

В качестве первого примера решим задачу о разряде конденсатора на цепь (r, L), рассмотренную ранее классическим методом (см. § 9.8). Пусть начальное напряжение конденсатора $u_C(0) = U_0$, а начальное значение тока в катушке $i(0) = 0$. Операторное выражение тока имеет вид

$$I(p) = \frac{U(p) + Li(0) - \frac{1}{p} u_C(0)}{Z(p)} = \frac{-U_0/p}{r + pL + 1/(pC)} =$$

$$= \frac{-U_0/L}{p^2 + \frac{r}{L} p + 1/(LC)} = \frac{-U_0/L}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2},$$

так как $U(p) = 0$. Следовательно, в данном случае $G(p) = -U_0/L$ и $H(p) = p^2 + 2\delta p + \omega_0^2$. Корни уравнения $H(p) = 0$ будут $p_{1,2} \quad -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$. Так как

$$H'(p) = 2p + 2\delta, \text{ то } \frac{G(p)}{H'(p)} = \frac{-U_0/L}{2(p+\delta)}.$$

Пользуясь теоремой разложения, получаем

$$i(t) = \frac{-U_0}{2L(p_1 + \delta)} e^{p_1 t} + \frac{-U_0}{2L(p_2 + \delta)} e^{p_2 t} = \frac{-U_0}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Пусть корни p_1 и p_2 равны друг другу: $p_1 \quad p_2 \quad -\delta$ и $\delta = \omega_0$, т. е. полином $H(p)$ имеет кратные корни. Предположив сначала, что $p_1 \quad p_2$, получим только что найденное решение, обращающееся при $p_1 \quad p_2$ в неопределенность. Раскрывая эту неопределенность при $p_1 \to p_2$, получим, как это было сделано в § 9.8, искомое решение в виде

$$i = -\frac{U_0}{L} t e^{-\delta t}.$$

В более общем случае, когда один из корней, допустим p_1, полинома $H(p)$ степени n имеет кратность q, рациональную дробь можно разложить на простейшие в виде

$$\frac{G(p)}{H(p)} = \frac{G(p)}{(p-p_1)^q H_1(p)} = \left[\frac{A_{11}}{(p-p_1)^q} + \frac{A_{12}}{(p-p_1)^{q-1}} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{A_{1s}}{(p-p_1)^{q-s+1}} + \ldots + \frac{A_{1q}}{p-p_1}\right] + \frac{A_2}{p-p_2} + \ldots + \frac{A_k}{p-p_k} + \ldots + \frac{A_n}{p-p_n},$$

где

$$A_{1s} = \frac{1}{(s-1)!}\left[\frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}}\frac{(p-p_1)^q G(p)}{H(p)}\right]_{p=p_1};$$

$$A_k = \frac{G(p_k)}{H(p_k)} = \frac{G(p_k)}{(p_k-p_1)^q H_1'(p_k)}.$$

Оригинал функции $\dfrac{A_{1s}}{(p-p_1)^{q-s+1}}$ имеет вид

$$\frac{A_{1s}}{(p-p_1)^{q-s+1}} \Rightarrow \frac{A_{1s}}{(q-s)!} t^{(q-s)} e^{p_1 t}.$$

Оригинал же функции $\dfrac{A_k}{p-p_k}$ равен $A_k\, e^{p_k t}$.

Решим с помощью теоремы разложения задачу о включении цепи (r, L) под синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ при условии $i(0) = 0$, рассмотренную ранее классическим методом (см. § 9.5). Изображение тока в цепи получим, принимая во внимание, что $Z(p) = r + pL$, а изображение синусоидальной функции имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{2j}(U_m e^{j\psi_u} e^{j\omega t} - U_m e^{-j\psi_u} e^{-j\omega t}) \Rightarrow \frac{1}{2j}\left(\frac{\dot{U}_m}{p-j\omega} - \frac{\overset{*}{U}_m}{p+j\omega}\right) = U(p).$$

Операторное изображение тока в цепи определится из выражения

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{1}{2jL}\left[\frac{\dot{U}_m}{(p-j\omega)(p+r/L)} - \frac{\overset{*}{U}_m}{(p+j\omega)(p+r/L)}\right].$$

Применив теорему разложения, получим

$$I(p) = \frac{1}{2jL}\left[\frac{\dot{U}_m}{j\omega + r/L}\,\frac{1}{p-j\omega} + \frac{\dot{U}_m}{-j\omega - r/L}\,\frac{1}{p+r/L} - \frac{\overset{*}{U}_m}{-j\omega + r/L}\,\frac{1}{p+j\omega} -\right.$$

$$\left.-\frac{\overset{*}{U}_m}{j\omega - r/L}\,\frac{1}{p+r/L}\right] \Rightarrow \frac{1}{2j}\left[\frac{\dot{U}_m}{r+j\omega L} e^{j\omega t} - \frac{\dot{U}_m}{r+j\omega L} e^{-\frac{r}{L}t} - \frac{\overset{*}{U}_m}{r-j\omega L} e^{-j\omega t} + \frac{\overset{*}{U}_m}{r-j\omega L} e^{-\frac{r}{L}t}\right].$$

Группируя первый член с третьим и второй с четвертым и имея в виду, что $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\omega L}{r}$, находим

$$i(t) = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \omega^2 L^2}}\left[\sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - \sin(\psi_u - \varphi)e^{-\frac{r}{L}t}\right].$$

В качестве примера определения переходного тока в разветвленной цепи рассмотрим таковое при включении под постоянное напряжение U_0 цепи, приведенной на рис. 10.3, при нулевых начальных условиях. Операторное сопротивление такой цепи

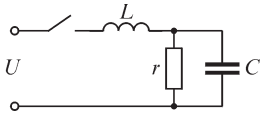


Рис. 10.3

$$Z(p) = pL + \frac{r\dfrac{1}{pC}}{r + 1/(pC)} = \frac{p^2 rLC + pL + r}{1 + prC}.$$

Изображение приложенного напряжения $U_0 \Rightarrow U_0/p$.

Изображение тока представится в виде

$$I(p) = \frac{U_0/p}{Z(p)} = \frac{U_0(1 + prC)}{p(p^2 rLC + pL + r)} = \frac{\dfrac{U_0}{rLC}(1 + prC)}{p\left(p^2 + \dfrac{1}{rC}p + \dfrac{1}{LC}\right)} = \frac{\dfrac{U_0}{rLC}(1 + prC)}{p(p^2 + 2\delta p + \omega_0^2)}.$$

Таким образом,

$$G(p) = \frac{U_0}{rLC}(1 + prC);$$

$$H(p) = p^3 + 2\delta p^2 + \omega_0^2 p; \quad H'(p) = 3p^2 + 4\delta p + \omega_0^2;$$

$$I(p) = \frac{G(p)}{H(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \frac{A_3}{p - p_3};$$

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}; \quad p_3 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2};$$

$$A_1 = \frac{G(0)}{H'(0)} = \frac{U_0}{r}; \quad A_2 = \frac{G(p_2)}{H'(p_2)} = \frac{\dfrac{U_0}{rLC}(1 + p_2 rC)}{p_2 \cdot 2(p_2 + \delta)};$$

$$A_3 = \frac{G(p_3)}{H'(p_3)} = \frac{\dfrac{U_0}{rLC}(1 + p_3 rC)}{p_3 \cdot 2(p_3 + \delta)}.$$

Тогда

$$i(t) = \frac{U_0}{r} + \frac{\dfrac{U_0}{rLC}(1 + p_2 rC)}{p_2 \cdot 2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}e^{p_2 t} - \frac{\dfrac{U_0}{rLC}(1 + p_3 rC)}{p_3 \cdot 2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}e^{p_3 t}.$$

Аналогично можно определить токи в остальных ветвях.

В заключение найдем оригинал изображения тока, полученного в предыдущем параграфе для цепи, приведенной на рис. 10.2, в виде

$$I(p) = \frac{G(p)}{p(p^2 + \omega_0^2)H_1(p)} = \frac{G(p)}{H(p)},$$

где $H_1(p) = Ap^3 + Bp^2 + Cp + D = A(p - p_4)(p - p_5)(p - p_6)$.

Для определения оригинала данной функции при помощи теоремы разложения необходимо прежде всего найти корни знаменателя рациональной дроби. В данном случае знаменатель $H(p)$ имеет шесть корней: $p_1 \quad 0, p_2 \quad j\omega, p_3 \quad -j\omega$, p_4, p_5, p_6. Корни p_4, p_5 и p_6 можно найти из уравнения третьей степени методами, известными из курса математики. Оригинал искомого тока запишется в виде

$$i(t) = \frac{G(0)}{H'(0)} + \frac{G(j\omega)}{H'(j\omega)}e^{j\omega t} + \frac{G(-j\omega)}{H'(-j\omega)}e^{-j\omega t} + \frac{G(p_4)}{H'(p_4)}e^{p_4 t} + \frac{G(p_5)}{H'(p_5)}e^{p_5 t} + \frac{G(p_6)}{H'(p_6)}e^{p_6 t}.$$

В этом выражении первый член определяет составляющую тока, постоянную во времени; второй и третий сопряженные члены — составляющую тока, изменяющуюся по синусоидальному закону. Эти три члена определяют установившийся режим в цепи. Последние три члена характеризуют затухающие составляющие тока. Они могут быть апериодическими, если корни p_4, p_5 и p_6 вещественны, или колебательными, если два корня — комплексные сопряженные. Эти три последние члена определяют свободный ток в цепи. Как видно из приведенных примеров, пользуясь операторным методом, получаем полное решение, содержащее как установившуюся, так и свободную составляющие переходного процесса с учетом всех начальных условий.

10.6. Свойства корней характеристического уравнения

Рассмотрим любую сколь угодно сложную пассивную цепь, т. е. цепь, в которой отсутствуют источники энергии. В такой цепи может происходить только затухающий во времени свободный процесс, определяемый запасами энергии в магнитных и электрических полях в начальный момент времени. При использовании классического метода ток в любой k-й ветви в этом случае находится в результате решения однородного дифференциального уравнения.

Свойства корней α_i характеристического уравнения, соответствующего этому однородному дифференциальному уравнению, и рассмотрим в настоящем параграфе.

При использовании операторного метода сказанное относится к тем корням p_i полинома $H(p)$, которые определяют свободный процесс. Полином $H(p)$ можно записать в виде произведения $H(p) = N(p)\ H_1(p)$, где корни уравнения $N(p) = 0$ определяются видом действующей в цепи ЭДС и характеризуют установившийся режим. Корни же уравнения $H_1(p) \quad 0$ определяют свободный процесс. Все это хорошо видно из примеров, приведенных в предыдущем параграфе.

Корни p_i уравнения $H_1(p) \quad 0$ совпадают с корнями α_i характеристического уравнения, которое используется в классическом методе ($p_i = \alpha_i$).

Первое свойство этих корней для пассивной электрической цепи заключается в том, что вещественные части всех корней должны быть отрицательными:

$$\mathrm{Re}(\alpha_j) < 0.$$

Это свойство является прямым следствием того, что процесс должен быть затухающим.

Вторым свойством является то обстоятельство, что все комплексные корни должны быть попарно сопряженными, так как решения уравнения, определяющие действительные функции времени [ток $i(t)$, напряжение $u(t)$], должны быть вещественными.

Третье свойство заключается в том, что чисто мнимые корни $\alpha_i = j\omega_i$ и $\overset{*}{a}_i = -j\omega_i$ должны быть простыми. Действительно, если бы такие корни имели каждый кратность $m > 1$, то соответствующее им решение имело бы вид

$$(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots + A_{m-1} t^{m-1}) \sin \omega_i t.$$

При $m > 1$ мы получили бы колебания с нарастающей до бесконечности амплитудой, чего не может быть, так как на рассматриваемую цепь не воздействуют источники энергии и первоначальный запас энергии в магнитных и электрических полях цепи не может возрастать.

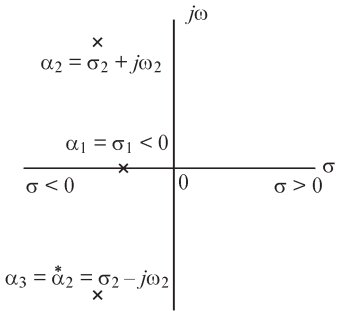


Рис. 10.4

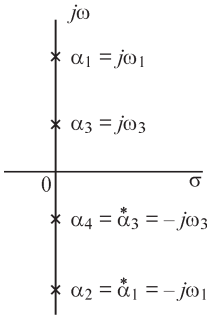


Рис. 10.5

На рис. 10.4 показано расположение вещественных и сопряженных комплексных корней для реальной цепи, содержащей катушки, конденсаторы и резисторы.

Чисто мнимые корни могут быть только для цепей без потерь. На рис. 10.5 показано расположение сопряженных корней на мнимой оси для этого идеализированного случая.

Глава одиннадцатая

Спектральное представление непериодических функций — интегральное преобразование Фурье. Расчет переходных процессов методом частотных характеристик

11.1. Представление непериодических функций времени с помощью интеграла Фурье

Наряду с рассмотренными ранее классическим и операторным методами анализа переходных процессов может быть применен метод, в котором используются выражения токов и напряжений, являющихся функциями времени, с помощью интеграла Фурье. Сущность этого метода заключается в представлении непериодических функций в виде суммы бесконечного множества синусоидальных функций с бесконечно малыми амплитудами и с частотами, имеющими все возможные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Соответственно, этот метод может быть назван методом частотных характеристик или, короче, частотным методом. Как будет видно из дальнейшего, такое разложение непериодических функций имеет много общего с разложением периодических несинусоидальных функций в ряд Фурье. Смысл такого разложения, по сути дела, тот же, что и при анализе процессов в линейных цепях, находящихся под действием периодического несинусоидального напряжения. Осуществляя такое разложение непериодического напряжения на синусоидальные составляющие, получаем возможность, пользуясь хорошо известными приемами расчета токов в цепи при синусоидальных напряжениях, найти токи в цепи от действия отдельных составляющих напряжения, а затем получить результирующий ток, пользуясь методом наложения.

Представление непериодических функций времени в виде интеграла Фурье можно получить, исходя из уже известного нам разложения периодических функций в ряд Фурье, представленного в комплексной форме (см. § 8.7):

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{T}\sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} e^{jq\omega_1 t} F(jq\omega_1), \text{ где} \\ F(jq\omega_1) &= \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-jq\omega_1 t}\, dt. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

В отличие от § 8.7 здесь угловая частота первой гармоники обозначена ω_1, т. е. снабжена индексом 1. Это необходимо, чтобы отличить ее от непрерывно изменяющейся частоты ω, о которой дальше будет идти речь.

Два последних выражения можно рассматривать как взаимно обратные преобразования, устанавливающие соответствие между $f(t)$ и $F(jq\omega_1)$. Функция $F(jq\omega_1)$ представляет собой дискретный спектр функции $f(t)$.

Предположим теперь, что $f(t)$ — непериодическая функция. Чтобы получить ее выражение, пригодное для любого значения t, на основании выражений (*) будем рассматривать данную непериодическую функцию $f(t)$ как периодическую с бесконечно большим периодом.

При беспредельном возрастании T разность $\Delta\omega = 2\pi/T = \omega_1$ между угловыми частотами любых двух смежных гармоник, равная угловой частоте ω_1 первой гармоники, будет стремиться к нулю. Соответственно, дискретное множество значений частот перейдет в непрерывно изменяющуюся частоту ω.

Переписав первое выражение (*) в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} e^{jq\omega_1 t} F(jq\omega_1)\Delta\omega$$

и устремляя $\Delta\omega$ к нулю, получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} F(j\omega)d\omega, \qquad (**)$$

т. е. ряд Фурье переходит при этом в интеграл Фурье. При этом функция $F(j\omega)$ определится на основании второго выражения (*) в виде

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt. \qquad (***)$$

Соотношение (***) называют прямым преобразованием Фурье, позволяющим найти по заданной функции $f(t)$ соответствующую ей $F(j\omega)$.

Соотношение (**) называют обратным преобразованием Фурье, дающим возможность по известной функции $F(j\omega)$ найти $f(t)$.

Если рассматривать включение электрической цепи в момент t 0 под действие ЭДС $e(t)$ $f(t)$, то имеем условие $f(t)$ 0 при $t < 0$, следовательно, в этом случае соотношение (***) принимает вид

$$F(j\omega) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

и называется при этом односторонним прямым преобразованием Фурье.

Следует сделать существенную оговорку, что прямое преобразование Фурье имеет смысл, если интеграл в его левой части имеет определенное конечное значение. Для этого недостаточно, чтобы функция $f(t)$ удовлетворяла условиям Дирихле. В дополнение к ним является достаточным, чтобы $f(t)$ была абсолютно интегрируема в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. чтобы существовал интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt.$$

Это, как правило, означает, что $f(t)$ должна стремиться к нулю при $t \to \infty$ и при $t \to -\infty$.

11.2. Частотные характеристики

Функция $F(j\omega) = F(\omega)\, e^{j\alpha(\omega)}$ называется спектральной или частотной характеристикой функции $f(t)$, так как она представляет собой непрерывный спектр функции $f(t)$.

Обозначения $F(\omega)$ и $\alpha(\omega)$ показывают, что модуль F и аргумент α величины $F(j\omega)$ являются функциями угловой частоты ω.

Соотношение (**) показывает, что непериодическая функция, удовлетворяющая вышеуказанным условиям, может быть представлена как сумма бесконечно большого числа гармонических составляющих с бесконечно малыми амплитудами $\frac{1}{2\pi} F(\omega)\, d\omega$ и с частотами, занимающими весь диапазон от $-\infty$ до $+\infty$.

Величина $F(\omega)$, характеризующая зависимость амплитуды от частоты, называется амплитудно-частотной характеристикой. Величина $\alpha(\omega)$, характеризующая зависимость начальной фазы $\psi = \pi/2 + \alpha$ от частоты, называется фазочастотной характеристикой.

Так как спектральная характеристика

$$F(j\omega) = \frac{\frac{1}{2\pi} F(\omega) e^{j\alpha(\omega)} d\omega}{d\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)}$$

представляет собой деленную на j комплексную амплитуду гармонической составляющей, отнесенную к единице изменения частоты $f = \omega/(2\pi)$, то ее называют также спектральной плотностью функции $f(t)$.

Представим частотную характеристику в виде

$$F(j\omega) = F(\omega) e^{j\alpha(\omega)} = F_1(\omega) + jF_2(\omega).$$

При этом величина $F_1(\omega)$ называется вещественной частотной характеристикой, а величина $F_2(\omega)$ — мнимой частотной характеристикой.

Замечая, что $F(j\omega)$ и $F(-j\omega)$ являются сопряженными комплексными величинами, можем написать для их модулей и фаз

$$F(\omega) = F(-\omega); \quad \alpha(\omega) = -\alpha(-\omega).$$

Следовательно, $F(\omega)$ является четной функцией ω, а $\alpha(\omega)$ — нечетной функцией. Поэтому, представив подынтегральную величину в выражении (**) в виде

$$e^{j\omega t} F(j\omega) = F(\omega)\cos[\omega t + \alpha(\omega)] + jF(\omega)\sin[\omega t + \alpha(\omega)],$$

будем иметь

$$e^{j\omega t} F(j\omega) + e^{-j\omega t} F(-j\omega) = 2F(\omega)\cos[\omega t + \alpha(\omega)],$$

и, следовательно, выражение (**) можно переписать в форме

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty F(\omega)\cos[\omega t + \alpha(\omega)]\, d\omega,$$

представляющей собой *интеграл Фурье* (обратное преобразование Фурье) *в тригонометрической форме*. Последнее выражение со всей ясностью показывает, что непериодическую функцию, удовлетворяющую отмеченным ранее условиям, можно рассматривать как сумму бесконечного множества гармонических составляющих с бесконечно малыми амплитудами $\frac{1}{\pi} F(\omega)\, d\omega$ и начальными фазами $\psi(\omega) = \pi/2 + \alpha(\omega)$. То, что амплитуды в этом случае оказались в два раза больше, чем при рассмотрении выражения (**), есть результат того, что в последнем выражении ω изменяется от 0 до $+\infty$, а не от $-\infty$ до $+\infty$ и, соответственно, гармоники с частотами ω и $-\omega$, содержащиеся в выражении (**), просуммированы в последнем выражении.

Нетрудно заметить, что

$$[F(\omega)]^2 = F(j\omega)F(-j\omega)$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [F(\omega)]^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)F(-j\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[F(j\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{j\omega t}\, dt \right] d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \right] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi [f(t)]^2\, dt$$

или

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(\omega)]^2 d\omega.$$

Последнее равенство выражает собой т е о р е м у Р е л е я, а также называется р а в е н с т в о м П а р с е в а л я.

В частном случае, когда $f(t) = e$ представляет собой ЭДС, воздействующую на цепь только с активными сопротивлениями, $g\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2\, dt$ равно энергии, выделяемой в цепи, причем g есть эквивалентная проводимость всей цепи. Равенство Парсеваля показывает, что в данном случае эта энергия может быть вычислена по известной амплитудно-частотной характеристике ЭДС.

11.3. Получение частотных характеристик заданной функции времени

Сопоставляя прямое одностороннее преобразование Фурье

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

с преобразованием по Лапласу

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt,$$

видим, что первое есть частный случай второго при $p \quad j\omega$. Иными словами, одностороннее преобразование Фурье получается из преобразования по Лапласу предельным переходом, когда в последнем вещественная часть комплексной переменной p стремится к нулю.

Благодаря этому можно не производить интегрирования для вычисления $F(j\omega)$, а, воспользовавшись готовыми таблицами для $F(p)$ [или для $\Phi(p) = pF(p)$], имеющимися в справочниках, заменить в выражениях $F(p)$ величину p на $j\omega$.

Рассмотрим сначала примеры для функций $f(t)$, для которых возможно прямое преобразование Фурье.

Пусть напряжение изменяется во времени по закону $u(t) = U_0 e^{-\delta t}$. Согласно таблице из § 10.2,

$$U_0 e^{-\delta t} \Rightarrow \frac{U_0}{\delta + p} = F(p),$$

и, следовательно, частотная характеристика функции $U_0 e^{-\delta t}$ имеет вид

$$F(j\omega) = U(j\omega) = \frac{U_0}{\delta + j\omega} = \frac{U_0}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} e^{-j \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\delta}},$$

т. е.

$$F(\omega) = U(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} \quad \text{и} \quad \alpha(\omega) = \alpha_u(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega}{\delta}.$$

Обозначение $U(\omega)$ и индекс u у α означают, что эти величины относятся к напряжению. Величины, относящиеся к току, будем обозначать, соответственно, $I(\omega)$ и $\alpha_i(\omega)$.

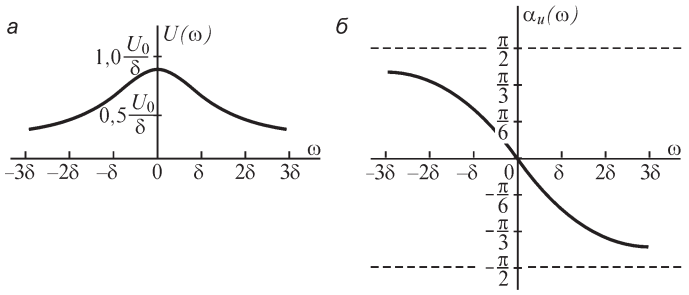


Рис. 11.1

На рис. 11.1, *а* и *б* соответственно, показаны амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики функции $u(t) = U_0 e^{-\delta t}$, на рис. 11.2 — соответственно, вещественная частотная и мнимая частотная характеристики, которые определяются формулами

$$U(j\omega) = \frac{U_0}{\delta + j\omega} = \frac{U_0(\delta - j\omega)}{\delta^2 + \omega^2} = \frac{U_0 \delta}{\delta^2 + \omega^2} - j\frac{U_0 \omega}{\delta^2 + \omega^2} = U_1(\omega) + jU_2(\omega).$$

В качестве другого примера возьмем функцию

$$u(t) = U_0 e^{-\delta t} \sin\omega_0 t \Rightarrow \frac{U_0\omega_0}{(p+\delta)^2 + \omega_0^2}.$$

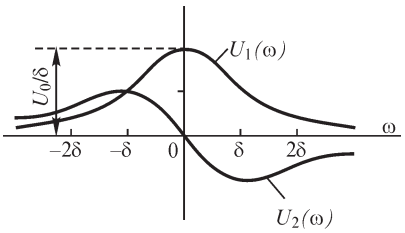


Рис. 11.2

Следовательно, частотная характеристика для этой функции имеет вид

$$F(j\omega) = U(j\omega) = \frac{U_0\omega_0}{(\delta + j\omega)^2 + \omega_0^2};$$

$$U(\omega) = \frac{U_0\omega_0}{\sqrt{(\delta^2 + \omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}};$$

$$\alpha_u(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{2\delta\omega}{\delta^2 + \omega_0^2 - \omega^2}.$$

На рис. 11.3, *а*, *б* показаны частотные характеристики этой функции при $\delta = 0{,}5\omega_0$.

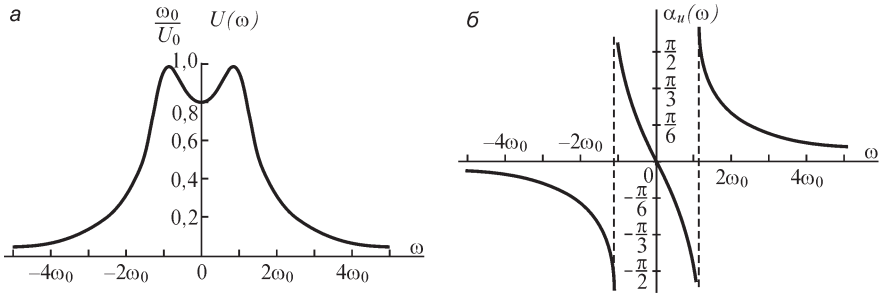


Рис. 11.3

Получим в виде третьего примера частотную характеристику прямоугольного импульса напряжения (рис. 11.4) прямым интегрированием согласно выражению (***) из § 11.1. Имеем $f(t) = u(t) = U_0$ при $-a \le t \le a$ и $f(t) = u(t) = 0$ при $|t| > a$. Получаем

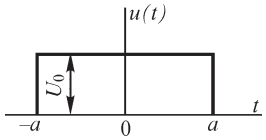


Рис. 11.4

$$U(j\omega) = \int_{-a}^{+a} U_0 e^{-j\omega t}\,dt = \frac{U_0}{-j\omega}(e^{-j\omega a} - e^{j\omega a}) = 2U_0\frac{\sin a\omega}{\omega}$$

то есть

$$U(\omega) = 2U_0\left|\frac{\sin a\omega}{\omega}\right|.$$

На рис. 11.5 приведена амплитудно-частотная характеристика этой функции. Величина $\alpha_u(\omega)$ изменяется скачком на π при каждом изменении знака величины $(\sin a\omega)/\omega$.

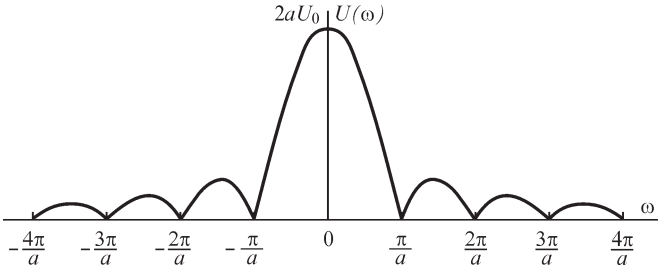


Рис. 11.5

Рассмотрим еще получение частотных характеристик для имеющих важное значение в теории электрических цепей функций $f(t) = U_0$ const и $f(t) = U_0 \sin \omega_0 t$, для которых непосредственное применение прямого преобразования Фурье невозможно, так как интеграл в этом преобразовании для них не имеет определенного конечного значения. В этом случае может быть использован следующий прием: умножение этих функций на $e^{-\delta t}$, где $\delta > 0$. Частотные характеристики функции $U_0 e^{-\delta t}$ и $U_0 e^{-\delta t} \sin \omega_0 t$ найдены в приведенных выше примерах. Переходя к пределу, когда $\delta \to 0$, получим искомые частотные характеристики:

$$u(t) = U_0 \Rightarrow \frac{U_0}{j\omega};$$

$$u(t) = U_0 \sin \omega_0 t \Rightarrow \frac{U_0 \omega_0}{(j\omega)^2 + \omega_0^2} = \frac{U_0 \omega_0}{-\omega^2 + \omega_0^2}.$$

Разложение непериодических ЭДС в непрерывный спектр синусоидальных составляющих находит широкое применение в импульсной технике, в радиотехнике, в технике автоматического регулирования, так как, располагая таким спектром и зная зависимость параметров цепи от частоты, можно определить характер воздействия такой ЭДС на рассматриваемую цепь.

11.4. Расчет переходных процессов при помощи частотных характеристик

Метод частотных характеристик для расчета переходных процессов в линейных электрических цепях заключается в следующем.

Пусть цепь включается в момент t 0 под действие напряжения $u(t)$ при нулевых начальных условиях, причем функция $u(t)$ удовлетворяет условиям, при которых интеграл Фурье существует. Используя прямое одностороннее преобразование Фурье

$$U(j\omega) = \int_0^\infty u(t)\, e^{-j\omega t}\, dt,$$

находим частотную характеристику $U(j\omega)$.

Зная комплексное сопротивление цепи $Z(j\omega)$ как функцию частоты, можем получить частотную характеристику тока в цепи:

$$I(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{Z(j\omega)} = I(\omega)e^{j\alpha_i(\omega)},$$

причем

$$Z(j\omega) = z(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = r(\omega) + jx(\omega).$$

Искомый переходный ток находится с помощью обратного преобразования Фурье:

$$i(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} I(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

или с помощью того же преобразования в тригонометрической форме:

$$i(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} I(\omega)\cos[\omega t + \alpha_i(\omega)]\, d\omega.$$

Сам по себе этот путь расчета не дает каких-либо существенных преимуществ по сравнению с изложенным в предыдущих параграфах операторным методом. Существенное преимущество метода интеграла Фурье обнаруживается при нахождении тока $i(t)$ по заданному напряжению $u(t)$, когда имеем практически осуществленную сложную линейную электрическую цепь или вообще какое-либо сложное устройство с линейными электрическими элементами и располагаем возможностью снять экспериментально зависимость входного комплексного сопротивления цепи от частоты, т. е. получить экспериментально зависимости $z(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ или, соответственно, $r(\omega)$ и $x(\omega)$.

Вычислив с помощью прямого преобразования Фурье спектральную характеристику $U(j\omega) = U(\omega)\, e^{j\alpha_u(\omega)}$ заданной функции $u(t)$ и пользуясь опытными данными для $z(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, можно определить спектральную характеристику тока:

$$I(\omega) = \frac{U(\omega)}{z(\omega)}; \quad \alpha_i(\omega) = \alpha_u(\omega) - \varphi(\omega).$$

Искомый ток $i(t)$ можно тогда определить из последнего интегрального выражения, выполняя интегрирование хотя бы тем или иным приближенным методом.

Из этого же выражения можно установить связь между вещественной частотной $I_1(\omega)$ и мнимой частотной $I_2(\omega)$ характеристиками. Так как

$$I(j\omega) = I(\omega)e^{j\alpha_i(\omega)} = I(\omega)\cos\alpha_i(\omega) + jI(\omega)\sin\alpha_i(\omega) = I_1(\omega) + jI_2(\omega),$$

то

$$i(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} I(\omega)\cos[\omega t + \alpha_i(\omega)]\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} [I_1(\omega)\cos\omega t - I_2(\omega)\sin\omega t]\, d\omega.$$

Принимая во внимание, что при $t < 0$ имеем $i(t) = 0$, подставим в только что написанное выражение $i(t)$ значение $t = -t$:

$$0 = \int_0^\infty [I_1(\omega)\cos\omega t + I_2(\omega)\sin\omega t]\, d\omega$$

или

$$\int_0^\infty I_1(\omega)\cos\omega t\, d\omega = -\int_0^\infty I_2(\omega)\sin\omega t\, d\omega,$$

что и выражает связь между вещественной $I_1(\omega)$ и мнимой $I_2(\omega)$ частотными характеристиками.

Заметим, что эта связь существует для частотных характеристик тех функций $i(t)$, для которых справедливо прямое преобразование Фурье.

Используя полученное соотношение для тока $i(t)$, имеем

$$i(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty I_1(\omega)\cos\omega t\, d\omega = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty I_2(\omega)\sin\omega t\, d\omega,$$

т. е. можем определить функцию $i(t)$ либо по вещественной частотной, либо по мнимой частотной характеристике.

Так как между вещественной и мнимой составляющими частотной характеристики $I(j\omega)$ существует связь, то, соответственно, в тех же случаях есть связь и между амплитудно-частотными и фазочастотными характеристиками.

Если в соответствии со сказанным имеется связь между $U(\omega)$ и $\alpha_u(\omega)$, а также между $I(\omega)$ и $\alpha_i(\omega)$, то должна быть связь и между $Z(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ или соответственно между $r(\omega)$ и $x(\omega)$. Для ряда систем оказывается возможной и разработана методика определения $\varphi(\omega)$ по $z(\omega)$. В таком случае достаточно снять экспериментально только характеристику $z(\omega)$, что значительно проще экспериментального получения характеристики $\varphi(\omega)$.

Так как экспериментальная зависимость $z(\omega)$ может быть получена только при изменении частоты от нуля до определенного значения ω', то необходимо быть уверенным, что мы не допускаем заметной ошибки, вычисляя $i(t)$ по формуле обратного преобразования Фурье в этом ограниченном диапазоне вместо всего диапазона $0 < \omega < \infty$. Некоторой оценкой достаточности верхнего предела частоты ω' в случае экспериментального получения частотных характеристик может служить условие, чтобы модули $y(\omega) = 1/z(\omega)$ при этой частоте ω' приближались к нулю, при дополнительном условии, что на основе каких-либо соображений можно быть уверенным, что с дальнейшим увеличением ω они не будут вновь возрастать.

Наконец, заметим, что указанные приемы расчета переходных процессов пригодны для нулевых начальных условий. Это видно хотя бы из того, что соотношение $I(j\omega) = U(j\omega)/Z(j\omega)$ соответствует соотношению $I(p) = U(p)/Z(p)$, справедливому только при нулевых начальных условиях (см. § 10.3). При ненулевых начальных условиях можно воспользоваться, так же, как и в операторном методе, методом наложения, рассчитав процесс при нулевых начальных условиях и наложив на него процессы, которые получаются только от действия одних начальных напряжений на конденсаторах и токов в катушках.

11.5. Связь преобразования Фурье с преобразованием Лапласа. Понятие о комплексной частоте

В § 11.3 были сопоставлены преобразование Лапласа $F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt$ с прямым односторонним преобразованием Фурье $F(j\omega) = \int_0^\infty f(t) e^{-j\omega t}\, dt$, откуда видно, что второе есть частный случай первого при $p = j\omega$. В конце § 11.1 было отмечено, что преобразование Фурье возможно для ограниченного класса функций $f(t)$. Было указано, что достаточным условием для этого является абсолютная интегрируемость функции $f(t)$.

Преобразование Лапласа является более общим, так как p рассматривается как комплексная величина, имеющая положительную вещественную часть, достаточно большую, чтобы интеграл Лапласа имел конечное значение для весьма широкого класса функций $f(t)$, практически охватывающих все функции, с которыми встречаемся в теории электрических цепей. Соответствующие условия, накладываемые на вещественную часть величины p, были сформулированы в начале § 10.1.

Можно обобщить преобразование Фурье так, что оно станет эквивалентно преобразованию Лапласа по широте охвата класса функций $f(t)$, если ввести понятие комплексной частоты $\dot{\omega} = c + j\omega$, содержащей положительную вещественную часть c, на которую налагаются те же самые требования, что и на вещественную часть σ оператора p. Такое *обобщенное преобразование Фурье* имеет вид

$$F(c + j\omega) = \int_0^\infty f(t) e^{-(c+j\omega)t}\, dt.$$

Соответственно, *обратное преобразование Фурье в обобщенной форме,* если заменить в формуле (**) из § 11.1 всюду в выражении под знаком интеграла величину $j\omega$ на величину $\dot{\omega} = c + j\omega$, принимает вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(c + j\omega) e^{(c+j\omega)t}\, d(c + j\omega).$$

Путь интегрирования в комплексной плоскости должен быть избран так, чтобы вещественная часть комплексной частоты была не меньше той, которая обеспечивает сходимость прямого обобщенного преобразования Фурье. В частности, можно интегрировать по прямой, отстоящей справа от оси мнимых на необходимую величину $c > 0$. С этим и связан выбор пределов интегрирования от $c - j\infty$ до $c + j\infty$.

Прямое преобразование Лапласа совпадает с обобщенным прямым преобразованием Фурье при замене p на $\dot{\omega}$. Поэтому, пользуясь обратным преобразованием Фурье в обобщенной форме, можем записать обратное преобразование

Лапласа, дающее возможность вычислить оригинал $f(t)$ по его операторному изображению $F(p)$ в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)e^{pt}\,dp = \mathscr{L}^{-1}[F(p)].$$

Обозначение $\mathscr{L}^{-1}[F(p)]$ часто применяют для краткой записи этого преобразования. Формула носит название формулы Римана — Меллина.

Глава двенадцатая

Расчет электрических цепей при воздействии импульсных ЭДС и ЭДС произвольной формы

12.1. Понятие об импульсных ЭДС и импульсных системах

Большой класс радиотехнических и вообще электротехнических задач связан с исследованием процессов в электрических цепях, протекающих под воздействием кратковременных внешних возмущений, длительность которых сравнима с длительностью переходных процессов. Такие возмущения и процессы называют импульсными. Импульсными системами называют устройства, в которых формируются и действуют импульсные ЭДС и токи.

Передача и преобразование сигналов при помощи импульсов находит широкое применение для передачи информации, так как при этом влияние помех оказывается наименьшим. Благодаря кратковременности импульсного процесса появляется возможность получить импульсы очень большой мощности, во многие сотни раз превышающей возможную мощность соответствующего устройства при непрерывной его работе. Весьма широко используется импульсный метод в автоматике и телемеханике, в радиоэлектронике и т. д. Для исследования импульсных процессов применимы все изложенные в предыдущих главах методы анализа переходных процессов. При определенных формах импульсов и характере изменения интервалов между ними, зависящих от целей, для которых применяются импульсные системы, возможны те или иные специализированные методы анализа процессов в импульсных системах. Применяются импульсы разнообразной формы, например прямоугольные (рис. 12.1, *а*), трапецеидальные (рис. 12.1, *б*), треугольные (рис. 12.1, *в*), экспоненциальные (рис. 12.1, *г*), радиоимпульсы, т. е. импульсы с высокочастотными колебаниями (рис. 12.1, *д*) и др. Последовательность импульсов характеризуется временем $T_п$ их повторения, длительностью $T_{инт}$ интервала (паузы) между ними и длительностью $t_{имп}$ самого импульса (рис. 12.2).

Рис. 12.1

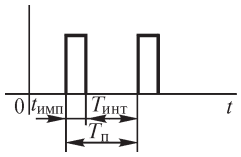


Рис. 12.2

В зависимости от значений $t_{имп}$, $T_{инт}$, $T_п$, закона изменения этих величин и длительности переходного процесса могут быть применены различные методы анализа. При каждом воздействии импульса ЭДС в цепи происходит переходный процесс. По истечении времени $t_{имп}$ воздействие импульса заканчивается и в цепи начинается другой переходный процесс, связанный с рассеиванием

энергии, накопленной за время $t_{имп}$ в электрических и магнитных полях конденсаторов и катушек. Если длительность этого переходного процесса намного меньше длительности паузы $T_{инт}$, то к моменту воздействия следующего импульса токи и напряжения в цепи будут равны нулю, и поэтому для каждого импульса начальные условия являются нулевыми. Поэтому переходный процесс можно рассчитать для каждого импульса в отдельности. Если формы импульсов повторяются, то при этом расчет достаточно произвести для одного импульса. Когда длительность переходного процесса оказывается больше $T_{инт}$, переходный процесс в следующем импульсе будет зависеть от переходного процесса в предыдущие моменты времени. Для анализа процессов в таких системах должны быть применены специальные методы. Одним из них в случае следования импульсов друг за другом через равные промежутки времени является метод, основанный на дискретном преобразовании Лапласа.

12.2. Переходные и импульсные характеристики электрической цепи и расчет цепи при воздействии импульсной ЭДС

Включение цепи под действие источника постоянной ЭДС E с помощью ключа при нулевых начальных условиях (рис. 12.3, *а*) можно рассмотреть, как действие в этой цепи ЭДС $E(t) \quad E{\cdot}1(t)$, имеющей временную зависимость, показанную на рис. 12.3, *б*, при отсутствии ключа. Условимся функции такого вида называть скачкообразными функциями. Функция $1(t)$ является так называемой единичной функцией, имеющей значения

$$1(t) = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{при} \quad t < 0; \\ 1 & \text{при} \quad t \geq 0. \end{array} \right.$$

Смещенную вправо на промежуток времени τ функцию (рис. 12.4) можно записать в виде $1(t - \tau)$. Эта функция равна нулю при $t < \tau$ и равна единице при $t \geq \tau$.

Возникающие в линейной цепи токи и напряжения прямо пропорциональны приложенной к цепи скачкообразной ЭДС. Поэтому имеет место равенство

$$x(t) = E(t)\,h(t),$$

где $x(t)$ — искомая величина, т. е. ток или напряжение на некотором участке цепи в переходном процессе. В дальнейшем для определенности будем под $x(t)$ понимать ток $i(t)$ на входе цепи (рис. 12.3, *б*); $h(t)$ — функция времени, называемая переходной характеристикой цепи.

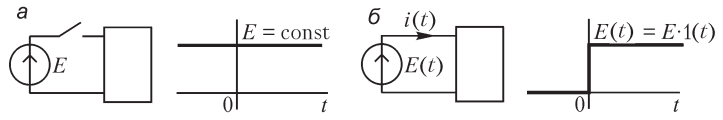


Рис. 12.3

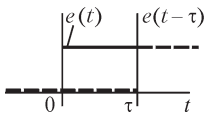


Рис. 12.4

Если искомой величиной $x(t)$ является ток $i(t)$ на входе цепи, то переходную характеристику $h(t)$, имеющую при этом размерность проводимости, называют переходной проводимостью цепи и обозначают $Y(t)$. Функцию $Y(t)$

можно определить, рассчитав классическим или операторным методом ток $i(t)$ при включении данной цепи под действие постоянного напряжения $U = \text{const}$, и тогда $Y(t) = i(t)/U$. Например, для цепи с последовательно включенными r и L имеем $Y(t) = \frac{1}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right)$ (см. § 9.5), а для цепи с последовательно соединенными r и C имеем $Y(t) = \frac{1}{r}e^{-\frac{t}{rC}}$ (см. § 9.6).

Если к цепи приложена скачкообразная ЭДС, то

$$i(t) = E \cdot 1(t)Y(t) = \left| \begin{array}{lll} 0 & \text{при} & t < 0; \\ EY(t) & \text{при} & t \geq 0. \end{array} \right.$$

Перейдем к рассмотрению другой функции, называемой и м п у л ь с н о й.

При рассмотрении в § 9.11 переходных процессов в цепи, в которой происходит скачкообразное изменение индуктивности или емкости, было указано, что в определенных условиях возникают напряжения и токи бесконечно большого значения и бесконечно малой длительности ($\Delta t \to 0$). Такие токи и напряжения, имеющие импульсный характер, могут быть описаны с помощью импульсной функции $K\delta(t)$, где K — вещественное число, а $\delta(t)$ является е д и н и ч н о й и м п у л ь с н о й ф у н к ц и е й, определяемой следующим образом: $\delta(t) = \infty$ при $t = 0$ и $\delta(t) = 0$ при $t \quad 0$ (т. е. $\delta(t) = 0$ при $t < 0$ и при $t > 0$), причем $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$.

Из этого определения видно, что можно написать $\int\limits_{-\infty}^{t} \delta(t)\,dt = 1(t)$ и, следовательно, единичную импульсную функцию можно рассматривать как производную единичной скачкообразной функции $\delta(t) = \lim\limits_{t=\Delta t \to 0} \frac{1(t)}{\Delta t}$. Если единичная импульсная функция имеет значение $\delta(t) = \infty$ в момент $t = \tau$, то ее можно записать в виде $\delta(t - \tau)$.

Как видно из определения, площадь единичной импульсной функции равна единице.

При воздействии на электрическую цепь импульсной ЭДС следует различать два этапа возникающего в цепи переходного процесса. На первом этапе за время действия импульсной ЭДС ($\Delta t \to 0$) в электрические поля конденсаторов и магнитные поля катушек поступает некоторая конечная энергия, которая затем, на втором этапе, после завершения действия импульсной ЭДС рассеивается в цепи.

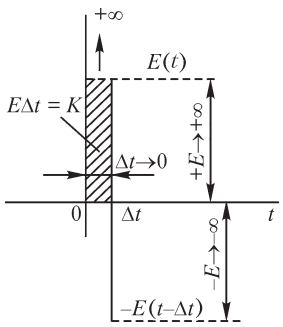


Рис. 12.5

Импульсную ЭДС можно представить как сумму двух скачкообразных ЭДС, имеющих бесконечно большие значения, противоположных по знаку и смещенных во времени на $\Delta t \to 0$ так, что $E\,\Delta t \quad K \quad \text{const}$ (рис. 12.5).

На первом этапе (от $t = 0$ до $t = \Delta t \to 0$) ток возникает под действием одной положительной скачкообразной ЭДС. Получим для него выражение, учитывая, что $E\,\Delta t = K$ и $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{1(t)}{\Delta t} = \delta(t)$. Имеем

$$i(t) = E(t)Y(t) = \lim_{t=\Delta t \to 0} E \cdot 1(t) Y(t) \frac{\Delta t}{\Delta t} = E\,\Delta t \lim_{t=\Delta t \to 0} \frac{1(t)}{\Delta t} Y(t) =$$

$$= KY(0) \lim_{t=\Delta t \to 0} \frac{1(t)}{\Delta t} = KY(0)\delta(t).$$

Для уяснения смысла полученного выражения применим его к случаю, когда импульсная ЭДС действует в цепи (r, L), — рис. 12.6. Для этой цепи, как только что было сказано, $Y(t) = \dfrac{1}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right)$ и, следовательно, $Y(0) = 0$. Так как функция $\delta(t)$ при $t = 0$ равна бесконечности, то получаем неопределенность. Записав выражение $E\,\Delta t \lim\limits_{t=\Delta t \to 0} \dfrac{1(t)}{\Delta t} Y(t)$ для $i(t)$ в виде $i(t) = K \lim\limits_{t=\Delta t \to 0} 1(t) \dfrac{Y(t)}{\Delta t} = K \lim\limits_{t \to 0} 1(t) \dfrac{Y(t)}{t}$, учитывая, что $1(t) = 1$ при $t \to 0$, и раскрывая неопределенность, получим

$$i(t) = i(0) = K \left[\frac{Y'(t)}{1}\right]_{t=0} = \frac{K}{L}.$$

Этот ток под действием импульса ЭДС устанавливается скачком, и, соответственно, устанавливается скачком потокосцепление от $\Psi = 0$ до $\Psi(0) = Li(0) = K$. Такое скачкообразное изменение потока и тока в катушке оказалось возможным в результате действия бесконечно большой ЭДС в бесконечно малый промежуток времени, что полностью соответствует изложенному в § 9.11.

Таким образом, на первом этапе скачкообразно происходит накопление энергии в полях цепи, в данном случае в магнитном поле катушки. Накопленная энергия рассеивается в сопротивлениях цепи в переходном процессе, происходящем на втором этапе. Этот процесс начинается после действия второй, отрицательной, скачкообразной ЭДС (рис. 12.5). Соответственно, реакцию цепи, в данном случае ток $i(t)$, можно представить как сумму реакций на обе скачкообразные ЭДС — положительную $(+E)$ и отрицательную $(-E)$. При этом необходимо учесть, что переходную проводимость следует определять как функцию промежутка времени, отсчитываемого от момента действия скачкообразной ЭДС до рассматриваемого момента времени t. Следовательно,

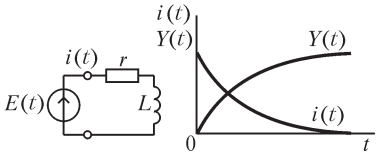


Рис. 12.6

$$i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} [EY(t) - EY(t - \Delta t)] = \lim_{\Delta t \to 0} E\,\Delta t \left[\frac{Y(t) - Y(t - \Delta t)}{\Delta t}\right] = KY'(t),$$

где величина $K = E\,\Delta t = \text{const}$ равна площади импульсной функции, а $Y'(t)$ — производная переходной проводимости цепи.

Для рассмотренного выше примера (рис. 12.6) имеем $i(t) = \frac{K}{L} e^{-\frac{r}{L}t} = i(0)\, e^{-\frac{r}{L}t}$, что соответствует решению, полученному в § 9.5 для случая замыкания цепи (r, L) накоротко при начальном токе $I = i(0)$.

Величину $Y'(t)$, в общем случае $h'(t)$, обозначают $h_\delta(t)$ и называют и м п у л ь с н о й х а р а к т е р и с т и к о й ц е п и, определяющей процессы в цепи после завершения действия импульса.

Обратим внимание на интересный факт, что импульсная характеристика $Y'(t)$, описывающая процесс после действия импульса, является всегда производной по времени от переходной характеристики $Y(t)$, описывающей процесс после действия скачкообразной ЭДС. Это легко понять, исходя из простых соображений. Ток $i(t)$ после действия импульса представляет собой свободный (переходящий) ток $i''(t)$ в цепи, существующий при отсутствии ЭДС и являющийся решением уравнения с нулевой правой частью. Ток $i(t)$ после действия скачкообразной ЭДС является решением того же уравнения с постоянной правой частью. Дифференцируя последнее уравнение, получим уравнение для производной по времени от этого тока с нулевой правой частью, т. е. точно такое же уравнение, как для тока после действия импульсной ЭДС. Таким образом, производная по времени тока после действия скачкообразной ЭДС имеет точно такой же закон изменения во времени, как и ток после действия импульсной ЭДС. Они отличаются друг от друга только множителями E или K. Процесс после действия скачкообразной ЭДС определяется величиной скачка E, а процесс после действия импульса — площадью импульса K.

В случае действия импульса ЭДС в цепи с катушкой, как мы видели в рассмотренном примере, величина $K = E\,\Delta t = \Delta\Psi$ определяет поток, образующийся в катушке во время действия импульса. В случае действия импульса источника тока I в цепи с конденсатором будем иметь $K = I\,\Delta t = \Delta q$, т. е. величина K определяет заряд, образующийся в конденсаторе во время действия импульса. Поэтому величина K и определяет начальные условия для переходного тока после действия импульса.

Найдем операторное изображение единичной скачкообразной функции и единичной импульсной функции. Так как единичная скачкообразная функция во всем интервале $0 \le t \le +\infty$ есть постоянная величина, равная единице, то ее операторное изображение, согласно сказанному в § 10.2, будет

$$1(t) \Rightarrow \frac{1}{p}.$$

Единичная импульсная функция является производной единичной скачкообразной функции $\delta(t) = \frac{d[1(t)]}{dt}$. При определении ее операторного изображения необходимо учесть, что она не равна нулю только в точке $t = 0$, т. е. в интервале от $t = -0$ до $t = +0$. Соответственно, чтобы учесть толчок на систему со стороны импульсной функции при определении ее изображения, необходимо взять нижний предел интеграла Лапласа $t = -0$, т. е.

$$\delta(t) \Rightarrow \int_{-0}^{\infty} \frac{d[1(t)]}{dt} e^{-pt}\, dt = 1(t)\, e^{-pt}\Big|_{-0}^{\infty} + p\int_{-0}^{\infty} 1(t)\, e^{-pt}\, dt = p\frac{1}{p} = 1.$$

Действительно, по определению $1(t) = 0$ при $t < 0$, т. е. $1(-0) = 0$, и, следовательно, первое слагаемое равно нулю как при верхнем, так и при нижнем пределах. Интеграл же во втором слагаемом равен $1/p$ как операторное изображение единичной функции.

Таким образом, имеем операторное изображение единичной импульсной функции

$$\delta(t) \Rightarrow 1.$$

Для неединичной импульсной функции, равной $A\delta(t)$, ее операторное изображение равно A.

12.3. Расчет цепи при воздействии ЭДС произвольной формы — интеграл Дюамеля

Пусть на зажимах цепи, обладающей переходной проводимостью $Y(t)$, действует напряжение $u(t)$ или ЭДС $e(t)$ произвольной формы (рис. 12.7). Цепь в общем случае может иметь сколь угодно сложную конфигурацию. Она является пассивным двухполюсником. Ток $i(t)$ на входе цепи, возникающий под действием напряжения $u(t)$, можно определить следующим образом: заменим действительную кривую $u(t)$ приближенно ступенчатой с интервалами по оси t, равными Δx (рис. 12.7). Ток в момент t можно рассматривать как возникающий под действием серии скачкообразных напряжении, следующих друг за другом через промежутки Δx в интервале от 0 до t. Первый скачок равен $u(0)$ в момент $t = 0$. Последующие скачки равны $\Delta u = \dfrac{\Delta u}{\Delta x}\Delta x$. Составляющая тока, вызванная отдельным скачком напряжения, действующим в момент x, равна $\Delta u Y(t - x)$. Переходную проводимость нужно рассматривать как функцию аргумента $t - x$, так как от момента x возникновения данного скачка напряжения до момента t отсчета значения тока прошло время $t - x$. Весь ток $i(t)$ является суммой составляющих тока, вызванных отдельными скачками напряжения, т. е.

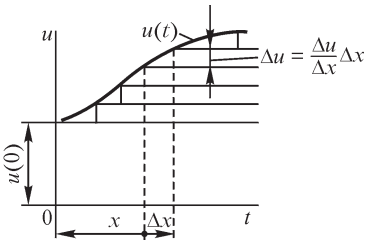


Рис. 12.7

$$i(t) \approx u(0)Y(t) + \sum_{x=0}^{x=t} Y(t-x)\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta x.$$

При уменьшении интервалов до бесконечно малых интервалов dx ступенчатая кривая напряжения перейдет в заданную кривую $u(t)$, и, соответственно, получим точное выражение для искомого тока $i(t)$:

$$i(t) = u(0)Y(t) + \int_0^t Y(t-x)u'(x)\, dx, \qquad (*)$$

где

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=x}.$$

Полученное выражение для $i(t)$ носит название интеграла Дюамеля, позволяющего решить задачу о включении цепи под действие напряжения $u(t)$ произвольной формы, причем $Y(t)$ определяется в итоге решения более простой задачи — включения той же цепи под действие постоянного напряжения.

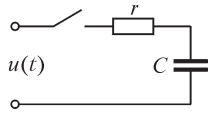


Рис. 12.8

В виде примера рассмотрим включение изображенной на рис. 12.8 цепи (r, C) под действие напряжения $u(t) = U(1 - e^{-t/T})$. На рис. 12.9 показана кривая изменения напряжения u на зажимах цепи. Постоянная T определяет скорость нарастания этого напряжения. В частности, при $T = 0$ имеем ранее рассмотренный случай включения этой цепи под постоянное напряжение $U = \text{const}$.

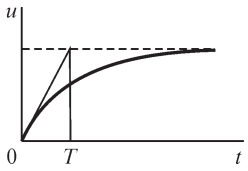


Рис. 12.9

Получаем

$$u(0) = 0; \quad u'(t) = \frac{U}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{и} \quad u'(x) = \frac{U}{T} e^{-\frac{x}{T}}.$$

Для данной цепи, согласно найденному в § 9.6 решению при рассмотрении включения ее под постоянное напряжение, переходная проводимость имеет выражение

$$Y(t) = \frac{1}{r} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{и} \quad Y(t-x) = \frac{1}{r} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{\frac{x}{\tau}},$$

где $\tau = rC$ — постоянная времени цепи.

Пользуясь интегралом Дюамеля, находим

$$i(t) = \int_0^t \frac{1}{r} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{\frac{x}{\tau}} \frac{U}{T} e^{-\frac{x}{T}} dx = \frac{U}{rT} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t e^{\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{T}\right)x} dx = \frac{U}{r} \frac{\tau}{T-\tau} \left(e^{-\frac{t}{T}} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Потери энергии, выделяемой в виде теплоты за время заряда конденсатора, равны

$$W = \int_0^\infty i^2 r\, dt = \frac{U^2}{r} \frac{\tau^2}{(T-\tau)^2} \int_0^\infty \left[e^{-\frac{2t}{T}} - 2e^{-\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{\tau}\right)t} + e^{-\frac{2t}{\tau}} \right] dt =$$

$$= \frac{U^2}{r} \left(\frac{\tau}{T-\tau} \right)^2 \left(\frac{T}{2} - 2\frac{\tau T}{\tau + T} + \frac{\tau}{2} \right) = \frac{U^2}{2r} \frac{\tau^2}{\tau + T} = \frac{U^2 C}{2} \frac{\tau}{\tau + T}.$$

Отсюда находим отношение этих потерь к энергии, запасаемой в конденсаторе,

$$a = \frac{W}{CU^2/2} = \frac{1}{1 + T/\tau}$$

и коэффициент полезного действия заряда конденсатора

$$\eta = \frac{CU^2/2}{CU^2/2 + W} = \frac{1}{1+a}.$$

В приведенной таблице даны значения величин a и η в функции T/τ. Отсюда видим, что η при включении конденсатора под постоянное напряжение получается равным только 50% независимо от значения r. Чем меньше r, тем быстрее совершается заряд, но вместе с тем возрастает ток заряда, так что энергия, выделяемая в сопротивлении, оказывается не зависящей от r. Однако, снижая скорость повышения приложенного напряжения, можно повысить значение η, и при бесконечно медленном увеличении напряжения коэффициент полезного действия получается равным 100 % при любом конечном значении r.

T/τ	a	η
0	1	0,5
1	0,5	0,67
2	0,33	0,75
4	0,20	0,833
∞	0	1

Если интеграл в выражении (*) взять по частям, то нетрудно получить другое выражение для тока $i(t)$, а именно

$$i(t) = Y(0)\,u(t) + \int_{x=0}^{x=t} Y'(t-x)\,u(x)\,dx.$$

Подынтегральное выражение в формуле (*) содержит переходную проводимость $Y(t - x)$ цепи, а подынтегральное выражение в последней формуле — импульсную проводимость $Y'(t - x)$ той же цепи.

12.4. Расчет установившихся режимов при помощи интеграла Дюамеля и правого преобразования Лапласа

В предыдущих главах были рассмотрены особенности расчета токов и напряжений электрических цепей при переходе от одного установившегося режима к другому — в переходном процессе. Было показано, что этот процесс обусловлен несоответствием напряжений и токов предкоммутационного $u_C(-0)$, $i_L(-0)$ и $u'_C(+0)$, $i'_L(+0)$ послекоммутационного установившегося режимов, определяющих энергию, накопленную в электрических полях конденсаторов и магнитных полях индуктивных катушек. Преходящее значение тока i'' (или напряжения u''), характеризующее наличие и интенсивность переходного процесса, определяется из условия $i_L(-0) = i_L(+0) = i'_L(+0) + i''_L(+0)$. Если $i_L(-0) = i'_L(+0)$, то $i''_L(+0) = 0$, и новый режим установится в момент коммутации $t = 0$. Такой мгновенный переход от одного состояния к другому имеет важное значение для практики. Избавление от переходного процесса позволяет предотвратить многие нежелательные явления. Например, удается исключить возникающие в переходном процессе нежелательные перенапряжения в высоковольтных линиях электропередач. Такое явление имеет место при подключении линии электропередачи к источнику синусоидального напряжения в режиме холостого хода, т. е. ненагруженной линии. В простейшем случае такой процесс может быть эквивалентирован цепью r, C. В § 9.6 показано, что при подключении к источнику синусоидального напря-

жения *r, C* цепи (линии передачи) напряжение на зажимах конденсатора (линии передачи) может вдвое превысить таковое на входе цепи в случае неблагоприятного подбора момента коммутации. В других случаях, например в электрических цепях систем управления, можно повысить их быстродействие, исключив временные задержки, связанные с затягиванием процесса достижения тока управления определенного значения.

Условия $i_L(-0) = i'_L(+0)$ и $u_C(-0) = u'_C(+0)$ могут быть реализованы двумя способами: либо заданием в момент коммутации начальных токов $i_L(-0)$ и напряжений $u_C(-0)$ равными $i'_L(+0)$ и $u'_C(+0)$, либо выбором для коммутации такого момента времени, когда докоммутационные (старые) значения $i_L(-0)$ и $u_C(-0)$ в момент коммутации $t \quad 0$ равны послекоммутационным (новым) расчетным значениям $i'_L(+0)$ и $u'_C(+0)$. В сложных электрических цепях со множеством реактивных элементов, т. е. катушек индуктивности и конденсаторов, реализовать эти условия для всех элементов не всегда возможно и приходится удовлетвориться выбором такой комбинации элементов, для которой реализация возможна. Для оптимального решения этой проблемы требуется выбирать такой метод расчета токов и напряжений цепи, который наиболее приспособлен для нахождения именно установившихся значений $i'_L(+0)$ и $u'_C(+0)$. Эту задачу проще всего решить при помощи метода переменных состояний. В этом методе именно токи i_L и напряжения u_C являются искомыми переменными, что позволяет формировать систему дифференциальных уравнений, изначально разрешенных относительно их первых производных, известных в математической литературе под названием уравнений Коши.

В случае простейшей цепи, состоящей из последовательно соединенных резистора *r*, индуктивной катушки *L* и источника ЭДС *e*, дифференциальное уравнение, разрешенное относительно единственной переменной состояния *i*, имеет вид

$$di/dt \quad - ir/L + e/L \quad - i/\tau + e/L.$$

При произвольной по форме кривой ЭДС ток в цепи может быть рассчитан при помощи интеграла Дюамеля (см. § 12.3). Для заданной функции напряжения на зажимах цепи $u(t) = e(t)$ искомый ток переходного процесса будет равен

$$i = u(0)Y(t) + \int_0^t Y(x)u'(t-x)dx = u(t)Y(0) + \int_0^t Y'(x)u(t-x)dx, \qquad (*)$$

или

$$i = u(0)Y(t) + \int_0^t Y(t-x)u'(x)dx = u(t)Y(0) + \int_0^t Y'(t-x)u(x)dx.$$

Поскольку интеграл Дюамеля позволяет рассчитать значение искомой функции, в данном случае тока, на всем интервале времен от 0 до ∞, то и установившееся значение тока *i'* можно определить при помощи этих выражений. Теоретически ток достигает своего установившегося значения при $t = \infty$, однако практически переходный процесс можно считать завершенным по истечении конечного промежутка времени, определяемого уровнем точности расчета или

измерения искомой величины. Если исходные данные для расчета задаются с точностью, скажем, до четырех значащих чисел, то процесс можно считать завершенным при условии $e^{-t/\tau} < 0{,}00001$. При такой степени точности расчета можно полагать, что переходный процесс практически завершается по истечении времени около $t \in (10–12)\tau_{max}$, где τ_{max} — постоянная времени сложной цепи, определяющая наиболее медленно затухающую по экспоненциальному закону $e^{-t/\tau}$ составляющую преходящего тока i''.

В качестве примера расчета установившегося режима при помощи интеграла Дюамеля рассмотрим случай r, L-цепи, когда $u(t) = Ue^{at}$. Для этой цепи переходная проводимость равна (см. § 12.3) $Y(t) = (1 - e^{-t/\tau})/r$. Соответственно, импульсная переходная проводимость $Y'(t) = dY(t)/dt = L^{-1}e^{-t/\tau} = L^{-1}e^{-pt}$. Если воспользоваться вторым уравнением (*) и учесть, что $Y(t) = (1 - e^{-t/\tau})/r = 0$ при $t = 0$, и так же обозначить $p \quad 1/\tau = r/L$, то

$$i = u(t)Y(0) + \int_0^t Y'(x)u(t-x)dx = \frac{1}{L}\int_0^t e^{-px}u(t-x)dx = \frac{U}{L}\int_0^t e^{-px}e^{a(t-x)}dx.$$

Для i' имеем

$$i' = \frac{1}{L}\int_0^\infty e^{-px}u(t-x)dx = \frac{Ue^{at}}{L}\int_0^\infty e^{-(a+p)x}dx = \frac{-Ue^{at}}{L(a+p)}e^{-(a+p)x}\Big|_0^\infty = \frac{Ue^{at}}{r+aL}.$$

Если обозначить $f(t-x) \quad u(t-x)$, то для i' можно записать

$$i' = \frac{1}{L}\int_0^\infty e^{-px}u(t-x)dx = \frac{1}{L}\int_0^\infty e^{-px}f(t-x)dx = \frac{1}{L}F(p,t) \text{ или } i' = F(p,t)/L,$$

где

$$F(p,t) = \int_0^\infty e^{-px}f(t-x)dx \text{ или } U(p,t) = \int_0^\infty e^{-px}u(t-x)dx.$$

Мы приходим к интересному выводу о том, что установившееся значение тока в цепи с дифференциальным уравнением первого порядка может быть определено при помощи интегрального преобразования $f(t) \Rightarrow F(p,t)$, известного в математике под названием правого преобразования Лапласа (ППЛ).

Для вычисления тока установившегося режима достаточно в изображении $F(p, t)$ заменить оператор p на коэффициент с обратным знаком, на который в уравнении Коши умножается переменная состояния i, в данном случае на $r/L = -(-r/L)$, и умножить $F(p, t)$ на коэффициент при $u(t)$ — в данном случае на $1/L$. Разумеется, для этой простой цепи решение для установившегося тока проще найти непосредственно через интеграл Дюамеля. Однако даже в этом случае расчеты упрощаются при наличии таблиц множества предварительно найденных изображений правых преобразований Лапласа, наподобие приведенной в § 10.2 таблицы, составленной при помощи обыкновенного преобразования Лапласа. Еще более существенны преимущества такого метода расчета установившихся токов и напряжений в сложных электрических цепях.

Таблица некоторых оригиналов и их ППЛ-изображений

Оригинал	**Изображение**
A	A/p
e^{at}	$\dfrac{e^{at}}{p-a}$
$\cos(\omega t+\psi)$	$\dfrac{\omega\sin(\omega t+\psi)-p\cos(\omega t+\psi)}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t+\psi)$	$\dfrac{p\sin(\omega t+\psi)-\omega\cos(\omega t+\psi)}{p^2+\omega^2}$
t	$t/p+1/p^2$
$\delta(t-t_0),\ t_0\geq 0$	$e^{-p(t-t_0)}1(t-t_0)$
$df(t)/dt$	$f(t)-pF(p,t)$

В случае сложной цепи, содержащей множество конденсаторов и катушек индуктивности, при условии отнесения ветвей с конденсаторами к дереву графа и ветвей с катушками индуктивности к кографу цепи, т. е. к звеньям графа, удается сформировать систему уравнений состояний (систему уравнений Коши) относительно множества u_C и i_L (см. § 5.14, § 9.2 и 9.13) в матричном виде

$$d\mathbf{x}/dt \quad \mathbf{Ax}+\mathbf{Bv},$$

где $\mathbf{x} \quad (u_{C1}, u_{C2}, ..., u_{Cq-1}, i_{L1}, i_{L2}, ..., i_{Ln})^t$ — вектор-столбец, в предельном случае состоящий из $q-1$ напряжений u_C дерева графа и n токов i_L звеньев графа цепи, $\mathbf{V} \quad (e_1, e_2, ..., e_{q-1}, \ _1, \ _2, ..., \ _n)^t$ — вектор-столбец источников ЭДС и токов в $q-1$ деревьях графа и n звеньях графа цепи. Квадратная матрица **A**, называемая матрицей параметров уравнений состояния цепи (матрица параметров), содержит всю совокупность данных, отражающих структуру соединений и ветвей цепи, и их параметров. Матрица **B** определяет наличие преобразованных источников ЭДС и токов в разрезах и контурах.

Поскольку в случае линейных цепей примени́м принцип наложения, воздействие множества источников может быть сведено к суммированию воздействий отдельных источников. Исходя из этой возможности, рассмотрим частный случай, когда только в некоторой k-й ветви цепи имеется источник ЭДС или тока $f_k(t)$. Для этого случая уравнения состояния могут быть записаны относительно k-й совокупности переменных состояний $\mathbf{x}_k$:

$$d\mathbf{x}_k/dt \quad \mathbf{Ax}_k+\mathbf{B}_k f_k(t).$$

Пусть для $f_k(t)$ найдено, или из таблиц известно, его изображение $F_k(p, t)$. Пусть неизвестное изображение переменных состояний установившегося режима $\mathbf{x}'_k(t)$ суть $\mathbf{X}'(p, t)$. Учитывая, что правостороннее преобразование производ-

ной функции $f_k(t)$ имеет вид $f_k(t) - pF_k(p, t)$, уравнение состояния для $\mathbf{x}'(t)$ можно записать в виде

$$\mathbf{x}'_k(t) - \mathbf{p}\mathbf{X}'_k(p, t) = \mathbf{A}\mathbf{X}'_k(p, t) + \mathbf{B}_k F_k(p, t) \text{ или } \mathbf{x}'_k(t) - (\mathbf{A} + \mathbf{p})\mathbf{X}'_k(p, t) = \mathbf{B}_k F_k(p, t).$$

Если диагональная матрица $\mathbf{p}$ состоит из некратных собственных значений матрицы $\mathbf{A}$, то можно принять $(\mathbf{A} + \mathbf{p}) = 0$, и тогда

$$\mathbf{x}'_k(t) = \mathbf{B}_k F_k(-\mathbf{A}, t).$$

Это означает, что искомые установившиеся значения переменных состояний сложной цепи можно записать непосредственно по изображению $F_k(p, t)$, подставив в него вместо оператора p матрицу $-\mathbf{A}$ и умножив $F_k(-\mathbf{A}, t)$ на $\mathbf{B}_k$ справа. Окончательное решение задачи при наличии множества источников можно записать в виде

$$\mathbf{x}'(t) = \sum_k \mathbf{x}'_k(t) = \sum_k \mathbf{B}_k F_k(-\mathbf{A}, t).$$

Привлекательность такого метода определения переменных состояний установившегося режима заключается в том, что при наличии оформленных в виде таблиц изображений $F_k(p, t)$ решение системы уравнений записывается автоматически в универсальной матричной форме путем простой замены в $F_k(p, t)$ оператора p на матрицу параметров $-\mathbf{A}$, но уже конкретной цепи. Однако реальная сложность полученного решения заключается в том, что даже при наличии изображений источников ЭДС и токов невозможно произвести качественный анализ особенностей процессов в системе, характеризуемой даже двумя переменными состояния, а при использовании численных методов расчета приходится оперировать функциями от матриц $\mathbf{B}_k F_k(-\mathbf{A}, t)$. В оценке баланса преимуществ и недостатков метода следует учесть и то обстоятельство, что в настоящее время при анализе сложных электрических цепей не избежать использования ЭВМ с обширным программным обеспечением, среди которых имеется достаточное количество стандартных программ, позволяющих оперировать широким набором матричных функций. Это дает возможность существенно упростить вычисление установившихся режимов при помощи изложенного выше метода.

12.5. Расчет переходных процессов в сложных цепях при помощи правого преобразования Лапласа

Интенсивность переходного процесса определяется энергией электрических и магнитных полей, накопленных в конденсаторах и индуктивных катушках до коммутации. При наличии резисторов в цепи, т. е. превращении в них энергии электромагнитного поля в иные виды, накопленная в этих полях энергия уменьшается, вследствие чего в линейных системах свободные токи и напряжения затухают по экспоненциальному закону. В § 9.2 приведено формальное решение матричного дифференциального уравнения $d\mathbf{x}/dt \quad \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v}$, записанное в виде

$$\mathbf{x}(t) = [\exp(\mathbf{A}t)]\mathbf{x}(0) + \int_0^t [\exp(\mathbf{A}(t - \tau)]\mathbf{B}\mathbf{v}(\tau)\, d\tau. \qquad (*)$$

В этом решении первое слагаемое представляет собой так называемое свободное решение, т. е. ту составляющую переменных состояния, которая порождается

накопленной в реактивных элементах цепи энергией. Вторая составляющая отражает принужденную реакцию цепи на воздействие источников ЭДС и токов.

Представление переменных состояния в переходном процессе в виде $\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}''_k(t) + \mathbf{x}'_k(t)$ дает возможность записать уравнения состояния в виде

$$d\mathbf{x}_k/dt = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k f_k(t) = d\mathbf{x}'_k/dt + d\mathbf{x}''_k/dt = \mathbf{A}\mathbf{x}'_k + \mathbf{A}\mathbf{x}''_k + \mathbf{B}_k f_k(t),$$

и предложить еще один способ расчета переходного процесса в сложных цепях. Поскольку переменные состояния должны удовлетворять начальным условиям $\mathbf{x}_k(-0) = \mathbf{x}_k(+0)$, то можно записать

$$\mathbf{x}_k(-0) = \mathbf{x}_k(+0) = \mathbf{x}'_k(+0) + \mathbf{x}''_k(+0) \text{ или } \mathbf{x}''_k(+0) = \mathbf{x}_k(-0) - \mathbf{x}'_k(+0).$$

Если $\mathbf{x}'_k(t)$ определено через изображение правого преобразования Лапласа $\mathbf{x}'_k(t) = \mathbf{B}_k F_k(-\mathbf{A}, t)$, то $\mathbf{x}'_k(+0) = \mathbf{B}_k F_k(-\mathbf{A}, 0)$ и $\mathbf{x}''_k(+0)$ можно определить при помощи выражения $\mathbf{x}''_k(+0) = \mathbf{x}_k(-0) - \mathbf{B}_k F_k(-\mathbf{A}, 0)$.

Подставляя в $\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}''_k(t) + \mathbf{x}'_k(t)$ выражения для $\mathbf{x}''_k(t)$ и $\mathbf{x}'_k(t)$, можно записать

$$\mathbf{x}_k(t) = e^{\mathbf{A}t}[\mathbf{x}_k(-0) - \mathbf{B}_k F_k(-\mathbf{A}, 0)] + \mathbf{B}_k F_k(-\mathbf{A}, t) \text{ и } \mathbf{x}(t) = \sum \mathbf{x}_k(t), \qquad (**)$$

т. е. получить общее решение матричного дифференциального уравнения в форме, исключающей операцию интегрирования.

Важным преимуществом такого способа решения системы дифференциальных уравнений является возможность исключения процедуры пошагового интегрирования и использования широкого спектра воздействующих функций в виде таблиц изображений $F_k(p, t)$. Для расчета переходного процесса по этому методу следует предварительно рассчитать изображения функций, определяющих ЭДС и токи. Именно предварительно рассчитанные при помощи правого преобразования Лапласа изображения являются основой данной методики. Для расчета переходного процесса в конкретной цепи следует лишь составить матрицу $\mathbf{A}$ параметров уравнения состояний данной цепи и, заменив оператор p в изображени $F_k(p, t)$ на $-\mathbf{A}$, определить установившееся значение функции $\mathbf{x}'_k(t) = \mathbf{B}_k F_k(-\mathbf{A}, t)$. При такой замене для искомых переменных состояния происходит переход от ординарных функций времени к матричным.

Расчет переходных процессов, также как и установившихся режимов, сложных электрических цепей, как правило, производится при помощи ЭВМ с большим пакетом стандартных программ, в том числе и с программами, оперирующими матричными функциями. По этой причине переход от пошагового интегрирования для расчета установившегося режима к операциям с матричными функциями является большим преимуществом. Это преимущество становится решающим в задачах, где целью пошагового интегрирования уравнения (*) является выход на установившийся режим.

В описанной методике решения системы линейных дифференциальных уравнений состояния электрических цепей (а также иных систем с аналогичными уравнениями) важное место, помимо операций с функциями от матриц $F_k(-\mathbf{A}, t)$, занимает вычисление матричной экспоненты $e^{\mathbf{A}t}$. Суть проблемы заключается

в том, что непосредственное вычисление $e^{\mathbf{A}t}$ при помощи разложения $e^{\mathbf{A}t}$ в ряд, $e^{\mathbf{A}t} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^q t^q}{q!}$, с вычислительной точки зрения неэффективен при больших t, так как по мере роста t необходимо увеличивать количество слагаемых для сохранения требуемой точности расчета. По этой причине важнейшим требованием организации процесса численного расчета матричной экспоненты является сочетание точности расчета с эффективностью процесса вычисления. В случае матрицы $\mathbf{A}$ с очень малыми собственными значениями, соответствующими большим постоянным времени, повышение точности приводит к увеличению времени расчета. Действительно, можно подобрать такой временной шаг h, при котором $e^{\mathbf{A}h} = \sum_{q=0}^{\lambda} \frac{\mathbf{A}^q h^q}{q!}$ обеспечит желаемую точность вычисления и при малом количестве слагаемых ряда. Однако такой шаг интегрирования в выражении (*) и при вычислении $e^{\mathbf{A}t}$ приведет к нежелательному и в большинстве случае неприемлемому удлинению времени расчета.

Изящный метод решения (*), уже использовавшийся в § 9.17, предложил Ю. В. Ракитский. В части вычисления $e^{\mathbf{A}t}$ он заключается в последовательном удвоении начального шага h до значительно большего шага $H = h2^N$, при котором решение достигается за приемлемое время. Для этой цели им предложены формулы, позволяющие выполнить последовательное увеличение шага h до значения $H = h2^N$. Если обозначить $\boldsymbol{\varphi}_0 = e^{\mathbf{A}h} = \sum_{q=0}^{\lambda} \frac{\mathbf{A}^q h^q}{q!}$, то удвоенному шагу h соответствует $\boldsymbol{\varphi}_1 = \boldsymbol{\varphi}_0^2$ или $e^{\mathbf{A}2h}$. Произведя 2^N рекуррентных расчетов, состоящих из операции умножения матриц, можно найти значение матрицы $e^{\mathbf{A}H} = \boldsymbol{\varphi}_N = e^{\mathbf{A}h2^N}$. Определив $e^{\mathbf{A}H}$ легко использовать те же реккурентные соотношения для последовательного вычисления $e^{\mathbf{A}t}$ в желаемые моменты времени, кратные H.

12.6. Расчет электрических цепей при воздействии импульсных ЭДС методом правого преобразования Лапласа

В §§ 9.10 и 12.2 рассмотрены некоторые особенности процессов в электрических цепях с бесконечно большими импульсными токами и напряжениями. Там же было указано, что такие токи и напряжения появляются в результате физически нереализуемых допущений, например мгновенного характера процесса коммутации, пренебрежения индуктивностями и емкостями отдельных элементов и участков электрической цепи. Такого рода допущения в некоторых случаях позволяют упростить задачу расчета цепей и нередко используются на практике. Рассмотрим особенности расчета цепей, для которых характерно наличие в них бесконечных, т. е. в количественном отношении неопределенных токов и напряжений. Неопределенность амплитудых значений импульсов заставляет оперировать со связанными с ними определенными характеристиками.

Импульсные токи и ЭДС количественно однозначно могут быть характеризованы величинами их площадей. Площадь импульса тока конечна и равна инте-

гралу $\int_0^{\Delta t} idt \approx i(\to \infty)\Delta t(\to 0)$ и однозначно определяет количество связанного с этим импульсом заряда Q. В замкнутом контуре, содержащем резисторы и конденсаторы, прохождение импульса тока через конденсатор изменяет его заряд на конечную величину $i(\to \infty)\Delta t(\to 0) = \Delta Q$. В замкнутом контуре, состоящем из резисторов и индуктивных катушек, импульс ЭДС однозначно определяет изменение потокосцепления Ψ контура, т. е. суммы потокосцеплений индуктивных катушек, на конечную величину $e(\to \infty)\Delta t(\to 0) = \Delta\Psi$. Согласно фарадеевской формулировке закона электромагнитной индукции (см. § 1.10) $\Delta\Psi = r\Delta Q$, импульс ЭДС в замкнутом контуре приводит к появлению импульса тока, зависящего от сопротивления r контура. Следовательно, расчет цепей с импульсными источниками тока и ЭДС сводится к нахождению распределения площадей импульсных токов и напряжений ветвей цепи. В резистивных цепях токи и напряжения ветвей можно рассчитать при помощи известных методов расчета цепей имея в виду, что они однозначно характеризуются их конечными площадями. Для резистивных цепей токи и напряжения в цепи равны нулю во всем интервале времени, кроме интервалов $\Delta t(\to 0)$ воздействия импульсных ЭДС и токов.

В цепях с индуктивными катушками и конденсаторами импульсные токи и напряжения скачкообразно на конечную величину меняют токи индуктивных катушек и напряжения конденсаторов. Эти изменения происходят в первой, длящейся в течение времени $\Delta t(\to 0)$, импульсной фазе процесса. Этот процесс приводит также к скачкообразному изменению энергии магнитного поля индуктивных катушек и электрического поля конденсаторов. Спустя время $\Delta t(\to 0)$ наступает вторая фаза процесса, в течение которой участки цепи с источниками импульсных ЭДС оказываются как бы короткозамкнутыми, поскольку на этих участках ЭДС и, соответственно, падение напряжения равны нулю, а участки цепи с импульсными источниками тока — разомкнутыми, поскольку токи в них равны нулю. Во второй фазе импульсные ЭДС и токи равны нулю и процесс в цепи поддерживается скачкообразно появившейся после первой фазы энергией магнитных полей индуктивных катушек и электрических полей конденсаторов. Эта энергия определяет матрицу начальных значений переменных состояний цепи $\mathbf{x}(0)$, а также свободные токи и напряжения матрицы $\mathbf{x}(t)$. При наличии резистивных элементов процесс в цепи носит затухающий характер и свободные токи и напряжения могут быть рассчитаны по формуле $\mathbf{x}(t) = [\exp(\mathbf{A}t)]\cdot\mathbf{x}(0)$. Сказанное относилось к случаю одиночного импульса. Если импульсы источников ЭДС и токов повторяются во времени по некоторому закону, то такой процесс может быть рассчитан при помощи правого преобразования Лапласа.

Расчет процессов в цепях с источниками импульсных ЭДС и токов в общем случае, в свете изложенного в § 12.5, также сводится только к нахождению изображения воздействующей на цепь импульсной функции. В качестве примера рассмотрим расчет установившегося режима в цепи r, C при воздействии ЭДС в виде знакопеременных импульсов, отстоящих друг от друга на интервал $T/2$. Такая функция может быть представлена в виде

$$f(t)\delta(t) = f(t)[\delta(t') - \delta(t' - T/2)],$$

где $f(t)$ — некоторая функция определяющая площадь импульса, $\delta(t)$ — единичная импульсная функция с площадью равной единице, $t' = t - 2E(t/2)$, а $E(t/2)$ — целая часть аргумента $t/2$.

Правое преобразование Лапласа $\delta(t)$ в первом интервале $0 - T/2$ имеет вид

$$\Delta(p, t) = e^{-pt}[1 - 1/(1 + e^{pT/2})].$$

Вычислим установившееся значение напряжения на конденсаторе в цепи r, C, для которой уравнение состояния имеет вид

$$du_C/dt \quad Au_C + Bu(t) \quad -u_C/rC + u(t)/rC.$$

Для определения $U(p, t)$ следует принимать во внимание, что $\Delta(p, t)$ является изображением импульсной функции с $K = E\Delta t = 1$ (см. § 12.2). Для перехода от $\Delta(p, t)$ к изображению функции $u(t)$ необходимо либо заранее задать значение площади импульса, либо определить ее при помощи дополнительных условий. Пусть после прохождения импульса тока бесконечной величины конденсатор заряжается до значения U_0. Определим соответствующую этому условию площадь импульсной функции $f(t)\delta(t)$. Эта площадь равна $U_x\Delta t$ ($U_x \to \infty$ и $\Delta t \to 0$). В течение промежутка времени $\Delta t \to 0$ по конденсатору протекает ток $U_x/r = i \to \infty$, приводящий к скачкообразному росту заряда конденсатора на величину Q. Имеет место равенство $U_x\Delta t = \Delta t U_x r/r = \Delta t i r$. Учитывая равенство $Q = \Delta t i = U_0 C$ можно определить площадь импульса $U_x\Delta t = U_0 rC$. Тогда $U(p, t) = \Delta(p, t)U_0 rC$ или

$$U(p, t) = U_0 rCe^{-pt}[1 - 1/(1 + e^{pT/2})].$$

Для вычисления $u'_C(t)$ достаточно в $U(p, t)$ заменить $p = -A = -(-1/rC) = 1/rC$ и умножить на коэффициент $1/rC$ при $u(t)$. Тогда в интервале $0 < t < T/2$

$$u'_C(t) = U(1/rC, t)/rC = U_0 e^{-pt}[1 - 1/(1 + e^{pT/2})] = \frac{U_0 e^{-\frac{t-T/2}{rC}}}{1 + e^{\frac{T}{2rC}}} \text{ или } u'_C(t) = \frac{U_0 e^{-\frac{t}{rC}}}{1 + e^{-\frac{T}{2rC}}}.$$

Во втором полупериоде $u'_C(t)$ вследствие асимметричности функций $\delta(t)$ и $u'_C(t)$ имеет место условие $u'_C(t + T/2) = -u'_C(t)$, и, следовательно, при $T/2 < t < T$

$$u'_C(t) = \frac{-U_0 e^{-\frac{t-T}{rC}}}{1 + e^{\frac{T}{2rC}}}.$$

Нетрудно заметить, что решение для $u'_C(t)$ в первом полупериоде может быть использовано для расчета процесса при воздействии одиночного импульса. Для этого достаточно в выражение для $u'_C(t)$ подставить $T \to \infty$, и тогда

$$u'_C(t) = U_0 \exp(-t/rC).$$

Решение этой простейшей задачи можно получить и при помощи следующих соображений. В установившемся режиме при положительном импульсе $u(t)$ напряжение на конденсаторе $u'_C(t)$ скачкообразно меняется на величину U_0 от некоторого значения $-U_1$ до U_2, а при отрицательном импульсе — от U_1 до $-U_2$.

Затем в процессе разряда, когда ЭДС равна нулю (цепь на входных зажимах как бы короткозамкнута), напряжение U_2 уменьшается по закону $U_2 e^{-t/rC}$ до значения $U_1 = U_2 e^{-T/2rC}$. Поскольку $U_2 + U_1 = U_0$, то имеет место равенство

$$U_1 = (U_0 - U_1)e^{-T/2rC}$$

или $U_1(1 + e^{T/2rC}) = U_0$. Тогда в интервале $0 < t < T/2$

$$u'_C(t) = U_0(1 - 1/(1 + e^{T/2rC}))e^{-t/rC} \text{ или } u'_C(t) = \frac{U_0 e^{-\frac{t-T/2}{rC}}}{1 + e^{\frac{T}{2rC}}}.$$

В качестве более сложного примера рассмотрим процессы в цепи с двумя конденсаторами (рис. 12.10). Матрица соединений **A** этой цепи имеет вид(см. § 9.12)

	E	C_1	C_2	r_3	r_4
1	1		–1	–1	
2		–1	1	1	
3		1			–1

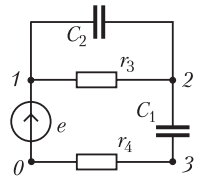


Рис. 12.10

Матрица контурных соединений **F** для двух контуров, образованных двумя ветвями связи (ветвь *3* с резистором r_3 и ветвь *4* с резистором r_4), имеет вид

	E	C_1	C_2
3 (r_3)			–1
4 (r_4)	1	1	1

Согласно приведенным в § 9.13 формулам, для $\mathbf{F}_{GC}$ можно записать

	–1
1	1

Для остальных матриц имеем: $\mathbf{F}_{GE} = |0,1|^t$, $\mathbf{R} = \mathrm{diag}(r_3, r_4)$, $\mathbf{C} = \mathrm{diag}(C_1, C_2)$,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{Vmatrix} 1/r_4 & 1/r_4 \\ 1/r_4 & 1/r_4 + 1/r_4 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{Vmatrix} 1/r_4 & 0 \\ 1/r_4 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_1 = \begin{Vmatrix} 1/r_4C_1 & 1/r_4C_1 \\ 1/r_4C_2 & \dfrac{r_4 + r_3}{r_4 r_3 C_2} \end{Vmatrix}.$$

Произведя все матричные операции для напряжений двух накопителей энергии u_1 и u_2, можно записать уравнения состояний

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1/r_4C_1 & 1/r_4C_1 \\ 1/r_4C_2 & \dfrac{r_4 + r_3}{r_4 r_3 C_2} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1/r_4C_1 & 0 \\ 1/r_4C_2 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} u$$

или

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1/r_4C_1 & 1/r_4C_1 \\ 1/r_4C_2 & \dfrac{r_4+r_3}{r_4r_3C_2} \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Vmatrix} = \mathbf{A}\begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Vmatrix} + \mathbf{Bu} = \mathbf{A}\begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1/r_4C_1 \\ 1/r_4C_2 \end{Vmatrix} u.$$

В данном случае также возникает необходимость введения дополнительного условия для вычисления изображения $U(p, t)$ по известному $\Delta(p, t)$. Наличие пути для бесконечного импульса тока по двум конденсаторам через резистор r_4 приводит к скачкообразному росту их зарядов на величину Q. При этом скачкообразно изменяются также напряжения u_1 и u_2 конденсаторов. В качестве дополнительного условия примем, что после прохождения импульса тока суммарное напряжение равно $u_2(+0)+u_1(+0)=U_0$. Воспользуемся тем, что скачки напряжений Δu_2 и Δu_1 конденсаторов обратно пропорциональны емкостям конденсаторов. При этих условиях заряд $Q=U_0C_э=U_0/(1/C_1+1/C_2)=U_0C_1C_2/(C_1+C_2)$. Следовательно, аналогично примеру простой цепи, $\Delta(p, t)$ следует умножать на U_0 и на $r_4C_э$ (где $C_э=C_1C_2/(C_1+C_2)$). При этих условиях $U(p, t)$ равно

$$U(p, t)=\Delta(p, t)U_0/(1/r_4C_1+1/r_4C_2)=\Delta(p, t)U_0\,r_4C_1C_2/(C_1+C_2).$$

Соответственно решение для установившегося режима при воздействии ЭДС в форме периодических знакопеременных импульсов будет иметь вид

$$\mathbf{u}'(\mathbf{A}, t)=e^{-\mathbf{A}t}\,[1-1/(1+e^{\mathbf{A}T/2})]\mathbf{B}U_0\,r_4C_1\,C_2/(C_1+C_2).$$

Нетрудно заметить, что площадь импульса $U_0\,r_4C_1C_2/(C_1+C_2)$ формально можно вычислить по матрице **B**. Она обратна сумме тех строк **B**, которые входят в контур, образованный конденсаторами C_1 и C_2. В данном случае в контур входят обе строки и площадь равна $U_0/(1/r_4C_1+1/r_4C_2)=U_0\,r_4C_э$.

Энергетические процессы в цепях с импульсными ЭДС и токами, с точки зрения эффективности использования электромагнитной энергии, требуют особого рассмотрения. В § 12.2 при исследовании процесса зарядки конденсатора в цепи rC показано, что потери энергии и КПД ее использования впрямую зависят от скорости накачки энергии в электрическое поле конденсатора. Только при бесконечно медленном приращении напряжения на зажимах конденсатора удается всю энергию источника перевести в электрическое поле конденсатора. При скачкообразном приложении постоянного напряжения к цепи r, C половина энергии источника теряется и КПД процесса зарядки оказывается равным 0,5. В цепях с импульсными токами и напряжениями, где изменения напряжений и токов в процессе зарядки могут быть теоретически бесконечно большими, следует ожидать еще больших потерь энергии и еще более низких КПД использования энергии.

Например, чтобы в цепи r, C за очень малое время Δt напряжение на конденсаторе выросло, скажем, от нуля до величины U_0 при конечной постоянной времени rC, необходимо будет приложить такое напряжение, при котором $U_x(1-e^{-\Delta t/\tau})=U_0$. При условии $\Delta t \ll \tau$, U_x должно быть больше U_0 в $1/(1-e^{-\Delta t/\tau})$ раза. Учитывая условие $\Delta t \ll \tau$ и разложив $e^{-\Delta t/\tau}$ в ряд, U_x приближенно можно

представить в виде $U_x \approx U_0/(1-(1-\Delta t/\tau)) \approx U_0\ \tau/\Delta t$. Если, например, $\tau = rC$ 1 мс и длительность импульса $\Delta t = 0{,}0001\ rC$, то $U_x \approx U_0\ \tau/\Delta t \approx 10\,000 U_0$. Потери энергии в виде выделяющегося в резисторе тепла приближенно можно рассчитать следующим образом. Для расчета тока в интервале $0 \ldots \Delta t$ воспользуемся условиями $\Delta t \ll \tau$ и $U_x \gg U_0$. Тогда для приближенной оценки с достаточной точностью можно полагать $i \approx U_x/r$, и потери энергии за время Δt будут равны $P\Delta t = \Delta t U_x^2/r$. Отношение a потерь энергии к энергии, накопленной в конденсаторе, будет равно

$$a = \frac{\Delta t U_x^2}{C U_0^2} \frac{2\tau^2}{\Delta t^2} \frac{\Delta t}{\tau} = \frac{2\tau}{\Delta t},$$

и для случая с $\tau/\Delta t \approx 10\,000$ полезная энергия, накопленная в конденсаторе, оказывается много меньше потерь энергии. Низкие значения КПД цепей с импульсными токами и напряжениями следует учитывать при использовании таких цепей в системах преобразования энергии, где эффективность ее использования является важным критерием выбора того или иного технического решения.

Приведенные примеры показывают возможности и сложности применения метода правого преобразования Лапласа для расчета установившихся режимов при импульсных воздействиях. Еще раз отметим главную особенность данного метода, а именно перевод основной сложности расчета цепи на этап поиска изображения воздействующей на цепь импульсной функции. Наличие не зависящего от конкретной задачи изображения позволяет перейти к расчету конкретной и любой иной цепи при помощи простой операции замены оператора p в изображении на матрицу параметров уравнения состояния данной цепи и умножении этой матричной функции $F_k(-\mathbf{A}, t)$ на $\mathbf{B}_k$.

12.7. Расчет цепи при действии последовательности импульсов путем решения разностных уравнений цепи

В ряде практических задач, например при передаче цифровых сигналов, достаточно определить значения искомой реакции цепи только в дискретные моменты времени $t = 0, T, 2T, \ldots, nT$. В этом случае информация о реакции цепи внутри интервала повторяемости импульсов может быть получена с использованием дискретных значений в качестве начальных условий. Такие задачи характерны для современных систем связи, управления и переработки данных, когда передаваемая информация представлена последовательностью импульсов. Последовательность импульсов можно характеризовать периодом T их следования и длительностью импульса $T_и$. В пределах времени действия импульса форма и амплитуда отдельных импульсов могут отличаться друг от друга.

Расчет цепи при действии последовательности импульсов может быть выполнен операторным методом, а также с помощью интеграла Дюамеля. При использовании операторного метода основная трудность заключаются в получении операторного изображения последовательности импульсов. Применение интеграла Дюамеля к последовательности различных импульсов также приводит к громоздкой процедуре вычислений.

Поэтому для расчета цепей при действии последовательности импульсов были разработаны специальные методы, которые позволяют определить значения тока или напряжения в цепи (реакцию цепи) в дискретные моменты времени, совпадающие с началом действия каждого импульса. Будем предполагать, что длительность $T_и$ импульса мала в сравнении с интервалом времени, которое необходимо анализируемой цепи для выхода на установившийся режим. Последовательность импульсов может быть описана аналитически с помощью единичной функции $1(t)$ или с использованием δ-функции. Например, последовательность прямоугольных импульсов с амплитудами $U_n = \{U_0, U_1, U_2, \ldots\}$ и длительностью $T_и$ можно записать в виде следующей суммы:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} U_n \left\{ 1(t - nT) - 1(t - nT - T_и) \right\}.$$

Если длительность $T_и$ импульса мала по сравнению с периодом T следования импульсов, то рассматриваемую последовательность можно описать с помощью δ-функции. Действительно, полагая $T_и \to 0$ и переходя в последнем выражении к пределу при неизменной площади $K_n = U_n T_и$ n-го импульса, имеем

$$\lim_{\substack{T_и \to 0 \\ U_n T_и = \text{const}}} \frac{U_n T_и \left\{ 1(t - nT) - 1(t - nT - T_и) \right\}}{T_и} = K_n \delta(t - nT),$$

откуда получим описание последовательности импульсов с помощью δ-функции

$$u(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} K_n \delta(t - nT).$$

Последовательности U_n и K_n можно рассматривать как функции дискретного аргумента $U_n = U(nT) = U[n]$, $K_n = K(nT) = K[n]$ или решетчатые функции. Квадратные скобки здесь и далее показывают, что заключенная в них переменная принимает только положительные целочисленные значения. Решетчатая функция с заданным периодом T может быть построена для любой функции времени $f(t)$ как последовательность дискретных значений функции f в моменты времени 0, T, $2T$, … .

Можно провести аналогию между методами расчета цепей при воздействии непрерывных сигналов и методами расчета цепей при воздействии последовательности импульсов. При этом методам, основанным на решении дифференциальных уравнений при действии непрерывных сигналов, соответствуют методы, основанные на решении разностных уравнений при воздействии импульсов. Преобразованию Лапласа для непрерывных сигналов соответствует так называемое дискретное преобразование Лапласа или z-преобразование для дискретных функций, рассматриваемое в следующих параграфах настоящей главы.

Рассмотрим методы формирования и решения разностных уравнений цепи. Рассчитаем ток в цепи, изображенной на рис.12.11, при действии на ее входе прямоугольных импульсов постоянной амплитудой U_0, с периодом следования T и длительностью $T_и$. Составим разностное уравнение для тока в цепи, которое для цепи первого порядка представляет собой рекуррентное соотношение, уста-

навливающее связь между значением тока в начале $(n+1)$-го интервала со значением тока в начале n-го интервала.

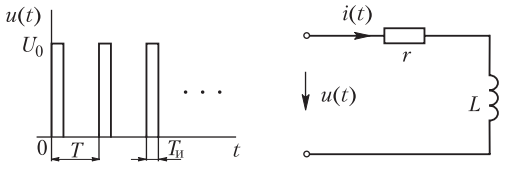


Рис. 12.11

Ток в цепи на интервале $nT \le t \le (n+1)T$ описывается дифференциальным уравнением $L\dfrac{di}{dt} + ri = u(t)$, где $u(t) = U_0$ во время действия импульса и $u(t)=0$ в промежутке времени между импульсами. Будем отсчитывать время $t' = t - nT$ от момента начала действия n-го импульса. Решение в интервале времени $0 \le t' \le T$ можно записать в виде $i(t') = i'(t') + Ae^{-t'/\tau}$ (здесь $\tau = L/r$ — постоянная времени цепи). Тогда $i(t')\big|_{t'=0} = i(t)\big|_{t=nT}$ и, соответственно, $i(0) = i[n]$. Выразим постоянную A через значение тока в начале действия импульса и значение тока в установившемся режиме $i'(t')$. На интервале $0 \le t' \le T_и$ имеем $i'(t') = U_0/r$, и решение можно записать в виде

$$i(t') = U_0/r + (i[n] - U_0/r)e^{-t'/\tau}.$$

На интервале $T_и \le t' \le T$ имеем $i'(t') = 0$, в результате решение на этом интервале получаем из соотношения

$$i(t') = i(t')\big|_{t'=T_и} e^{-\frac{t'-T_и}{\tau}} = \{U_0/r + (i[n] - U_0/r)\, e^{-T_и/\tau}\}\, e^{-\frac{t'-T_и}{\tau}}.$$

Принимая в последнем уравнении $t' = T$, получим искомое рекуррентное соотношение:

$$i[n+1] = \alpha i[n] + q, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (*)$$

где $\alpha = e^{-\frac{T}{\tau}}$, $q = \dfrac{U_0}{r}(e^{-\frac{T_и}{\tau}} - 1)e^{-\frac{T}{\tau}}$ — постоянные коэффициенты.

Рекуррентное соотношение (*) представляет собой линейное разностное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами и позволяет рассчитать, начиная с $i[1]$, последовательность дискретных значений тока в цепи:

$$i[1] = \alpha i[0] + q, \quad i[2] = \alpha^2 i[0] + q(1 + e^{-T/\tau}), \quad i[3] = \alpha^3 i[0] + q(1 + e^{-T/\tau} + e^{-2T/\tau}), \ldots.$$

Так как $i[0]=0$, то получаемая последовательность представляет собой геометрическую прогрессию $i[n] = q(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{(n-1)}) = q\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$ и выражение тока цепи в дискретные моменты времени $t = nT$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, имеет вид

$$i[n] = \frac{U_0}{r}\frac{e^{-T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}}\left(e^{\frac{T_и}{\tau}} - 1\right)\left(1 - e^{\frac{nT}{\tau}}\right). \qquad (**)$$

Последнее соотношение для тока $i[n]$ представляет собой решения разностного уравнения (*). Решетчатая функция $i[n]$ изображена на рис. 12.12 утолщенными вертикальными линиями.

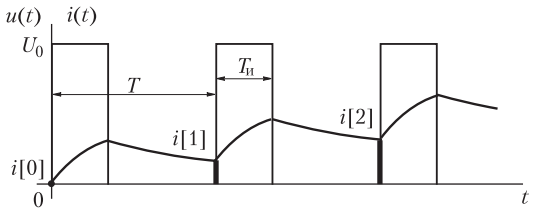


Рис. 12.12

Аналитические решения разностных уравнений для последовательностей импульсов можно получать также и другим способом, схожим со способом получения решения дифференциального уравнения. Решение линейного разностного уравнения может быть представлено в виде

$$i[n] = i'[n] + i''[n],$$

где $i'[n]$ — частное решение неоднородного разностного уравнения (*), а $i''[n] = C\lambda^n$ — общее решение однородного разностного уравнения $i[n+1] - \alpha i[n] = 0$. Как и для дифференциальных уравнений однородному разностному уравнению соответствует характеристическое уравнение $\lambda - \alpha = 0$. Таким образом, решение разностного уравнения (*) имеет вид:

$$i[n] = i'[n] + Ce^{-\frac{nT}{\tau}}.$$

Обе составляющие решения должны быть определены таким образом, чтобы выполнялись условия при $t = 0$ и при $t \to \infty$. При $t \to \infty$ $i'[n+1] \to i'[n]$, поэтому при $t \to \infty$ в разностное уравнение (*) можно подставить $i'[n+1] = i'[n]$ и определить $i'[n] = q/(1 - e^{-T/\tau})$. Коэффициент C определим из начальных условий $i[0] = 0 = i'[n] + C$. В результате получим:

$$i[n] = i'[n] + Ce^{-\frac{nT}{\tau}} = \frac{U_0}{r}\frac{e^{-T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}}\left(e^{\frac{T_и}{\tau}} - 1\right)\left(1 - e^{\frac{nT}{\tau}}\right).$$

что совпадает с найденным ранее решением (**).

Рассчитаем далее значение тока в цепи на всем интервале повторяемости импульсов, используя полученные выражения для $i[n]$. Поскольку на интервале действия импульса приложенное напряжение постоянно, то для $nT \le t \le nT + T_и$ имеем:

$$i(t) = \frac{U_0}{r} + \left(i[n] - \frac{U_0}{r}\right)e^{-\frac{t-nT}{\tau}},$$

а для $nT + T_и \le t \le (n+1)T$ можно записать:

$$i(t) = i(nT + T_и)\,e^{-\frac{t-nT-T_и}{\tau}}.$$

Зависимость изменения тока в цепи представлена на рис. 12.12 сплошной линией.

Рассмотренный подход к определению реакции цепи на действие последовательности импульсов может быть использован и для произвольной цепи с одним реактивным элементом. Получим разностное уравнение, описывающее процессы в цепи первого порядка при действии на входе цепи произвольной последовательности прямоугольных импульсов $x_{\text{вх}}[n] = U[n]$ длительностью $T_{\text{и}}$.

Значение искомой величины $x_{\text{вых}}[n+1]$ можно определить методом наложения как результат двух процессов. Первый из них — это процесс изменения выходной величины на n-м интервале, определяемый энергией электромагнитного поля, накопленной к началу n-го интервала в реактивном элементе цепи, второй — это процесс, вызванный действием входного импульса. Когда действующий входной импульс равен нулю и имеет место только первый процесс, то токи и напряжения изменяются по экспоненциальному закону и за время T выходная величина уменьшится до значения $x_{\text{вых}}[n]e^{-T/\tau}$. Значение выходной величины, определяемое только действием входного импульса (второй процесс), к концу интервала будет равно $x_{\text{вх}}[n](h(T) - h(T - T_{\text{и}}))$ при $h(0) = 0$. Используя принцип наложения, получим разностное уравнение первого порядка при действии прямоугольных импульсов:

$$x_{\text{вых}}[n+1] = x_{\text{вых}}[n]e^{-\frac{T}{\tau}} + x_{\text{вх}}[n](h(T) - h(T - T_{\text{и}})) = ax_{\text{вых}}[n] + bx_{\text{вх}}[n].$$

Рассмотрим решение задачи в том случае, когда напряжение $u(t)$ на входе цепи представлено в виде последовательности δ-импульсов. При действии импульсного сигнала $K[n] = K(nT)$ ток на входе цепи получает приращение $K[n]Y'(0)$, где $Y'(0)$ — значение импульсной проводимости цепи при $t = 0$. Тогда разностное уравнение цепи имеет вид:

$$i[n+1] = \{i[n] + K[n]Y'(0)\}\, e^{-\frac{T}{\tau}}.$$

При $K[n] \quad K = \text{const}$ его решение можно найти рассмотренным способом:

$$i[n] = i(0)\, e^{-\frac{nT}{\tau}} + KY'(0)\, e^{-\frac{T}{\tau}} \frac{1 - e^{-nT/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}}.$$

Для цепи с последовательно соединенными участками r, L имеем

$$Y(t) = \frac{1}{r}(1 - e^{-t/\tau}), \quad Y'(0) = 1/L.$$

В результате решение для тока цепи имеет вид

$$i[n] = \frac{K}{L} \frac{e^{-T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} (1 - e^{\frac{-nT}{\tau}}).$$

Сравним последнее выражение для тока с выражением (**), полученным при действии в цепи последовательности импульсов конечной длительности. Разложим экспоненту $e^{T_{\text{и}}/\tau}$, входящую в решение (**), в ряд Тейлора при $T_{\text{и}} > 0$ и удержим в разложении только два первых члена ряда:

$$e^{\frac{T_и}{\tau}} \approx 1 + \frac{T_и}{\tau} = 1 + \frac{T_и r}{L}.$$

Подставляя разложение экспоненты в выражение (**) и проводя несложные преобразования, можно убедиться, что выражения для входного тока, полученные при действии на входе цепи последовательности δ-импульсов и импульсов конечной длительности совпадают при $T_и \to 0$.

Применим изложенный способ получения разностного уравнения к цепи с произвольным числом реактивных элементов. Пусть переходный процесс в некоторой цепи описывается дифференциальным уравнением порядка k. Получим уравнение, связывающее вектор переменных состояния цепи в начале n-го интервала с его значением в начале $(n + 1)$-го интервала:

$$\mathbf{X}[n] \quad \| X_1[n], X_2[n], ..., X_k[n] \|^t$$

Решение уравнения состояния цепи $\frac{d}{dt}\mathbf{x} \quad \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{v}$, записанного в матричной форме (см. § 9.2) на интервале $nT \le t \le (n + 1)T$, позволяет получить необходимое рекуррентное соотношение между дискретными значениями вектора переменных состояния:

$$\mathbf{X}[n + 1] \quad \exp(\mathbf{A}_1 T)\mathbf{X}[n] + \exp(-\mathbf{A}_1(n + 1)T) \int_{nT}^{(n+1)T} \exp(\mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{B}_1\mathbf{v}(\tau)d\tau,$$

где $\mathbf{v}(\tau)$ — вектор источников, действующих на n-м временном интервале. После численного или аналитического вычисления интеграла во втором слагаемом его можно представить как некоторую решетчатую функцию $\mathbf{BV}[n]$, где $\mathbf{B}$ – матрица с постоянными коэффициентами. Тогда рекуррентное соотношение между дискретными значениями вектора переменных состояния примет вид

$$\mathbf{X}[n + 1] \quad \mathbf{AX}[n] + \mathbf{BV}[n],$$

где $\mathbf{A} = \exp(\mathbf{A}_1 T)$ — матрица с постоянными коэффициентами, называемая переходной матрицей, играет ту же роль в анализе цепей при действии дискретных сигналов, что и матричная экспонента $\exp(\mathbf{A}t)$, введенная для непрерывных сигналов. Решение этого уравнения при начальном условии $\mathbf{X}[0]$ можно найти, последовательно рассчитывая величины $\mathbf{X}[1]$, $\mathbf{X}[2]$, $\mathbf{X}[3]$, ..., $\mathbf{X}[n + 1]$:

$$\mathbf{X}[1] \quad \mathbf{AX}[0] + \mathbf{BV}[0],$$

$$\mathbf{X}[2] \quad \mathbf{AX}[1] + \mathbf{BV}[1] \quad \mathbf{AX}[0] + \mathbf{ABV}[0] + \mathbf{BV}[1], \text{ и т. д.}$$

Система разностных уравнений для дискретных значений вектора переменных состояния $\mathbf{X}[n] \quad \| X_1[n], X_2[n], ..., X_k[n] \|^t$ может быть сведена к одному разностному уравнения порядка k относительно решетчатой функции любой из переменных состояния $X_i[n]$, $i = 1, 2, \ldots k$. Пусть такое преобразование выполнено для некоторой переменной, которую обозначим через $X[n]$. Решение разностного уравнения порядка k

$$a_k X[n+k] + a_{k-1} X[n+k-1] + \ldots + a_0 X[n] = f[n]$$

можем искать по аналогии с решением дифференциального уравнения, представив его в виде суммы

$$X[n] = X'[n] + X''[n]$$

частного решения $X'[n]$ разностного уравнения и общего решения $X''[n]$ однородного разностного уравнения, получаемого из исходного при $f[n]$ 0. Общее решение может быть записано в виде $X''[n] = \sum_{m=1}^{k} C_m \lambda_m^n$, где λ_m — корни характеристического уравнения $a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_0 = 0$.

Для нахождения постоянных C_1, C_2, ..., C_k используют величины $X[n]$ при n 0, 1, 2, ..., $n - 1$. Составляющая $X'[n]$ решения определяется правой частью $f[n]$ уравнения; в частности, при $f[n] = \text{const}$ величину $X'[n]$ получаем из условия $X[n]$ 0 при $n \to \infty$. Рассмотренный путь решения задачи расчета переходного процесса при действии последовательности дискретных сигналов аналогичен классическому методу расчета переходных процессов, изложенному в главе 9. Более эффективным в ряде задач является другой метод, называемый методом дискретного, или z-преобразования, который изложен в следующих параграфах.

12.8. Метод *z*-преобразования

Метод расчета реакции цепи при действии последовательности импульсов, основанный на использовании z-преобразования, во многом аналогичен операторному методу. Он позволяет выполнить переход от последовательностей импульсов к их изображениям, преобразовать разностные соотношения между токами и напряжениями на элементах цепи к алгебраическим уравнениям, решить задачу для z-изображений и затем найти оригинал в виде последовательности импульсов искомой переменной.

Преобразование, определяющее соответствие решетчатой функции $f[n]$ и ее z-изображения $F(z)$, можно найти, вычисляя операторное изображение функции $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]\delta(t - nT)$, которая описывает последовательность импульсов интенсивностью (площадью) $f[n]$. Учитывая, что операторное изображение импульсной функции $\delta(t - nT)$ равно e^{-pnT} (см. § 10.2), получаем $F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]e^{-pnT}$. Обозначив $z = e^{pT}$, приходим к одностороннему прямому z-преобразованию решетчатой функции $f[n]$:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[z]z^{-n}.$$

Функцию $F(z)$ называют z-изображением решетчатой функции $f[n]$, что условно можно записать в виде $f[n] \Rightarrow F(z)$. Ряд $F(z)$ сходится, если $|f[n]|$ возрастает не быстрее, чем экспонента $Ae^{\alpha n}$ для всех z, лежащих вне окружности радиусом $R_0 = e^{\alpha}$ на комплексной плоскости. Дискретные последовательности импульсов токов и напряжений в электрических цепях удовлетворяют этим условиям.

Найдем z-изображения часто используемых на практике решетчатых функций.

Z-изображение решетчатой функции $f[n]$ $A{\cdot}1[n]$, которой соответствует ступенчатая функция $f(t)$ $A{\cdot}1(t)$, имеет вид

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A \cdot 1[n] \cdot z^{-n} = A(1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots) = \frac{A}{1 - z^{-1}} = A\frac{z}{z-1}.$$

Для решетчатой функции $\delta[n] = \left| \begin{array}{l} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{array} \right.$ z-изображение получается равным 1, поскольку в сумме $F(z)$ в этом случае только одно слагаемое, соответствующее $n = 0$, отлично от нуля.

Изображение функции $f[n] = e^{\alpha nT}$ равно

$$e^{\alpha nT} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha nT} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{\alpha T} z^{-1})^n = \frac{1}{1 - e^{\alpha T} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{\alpha T}}.$$

Найдем z-изображения функций $f[n + 1]$ и $f[n - 1]$. Считая, что z-изображение функции $f[n]$ известно и равно $F(z)$, для z-изображения функции $f[n + 1]$ получим:

$$f[n+1] \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f[n+1] z^{-n} = z \sum_{n=0}^{\infty} f[n+1] z^{-(n+1)} =$$

$$= z \sum_{n=1}^{\infty} f[n] z^{-n} + zf(0) - zf(0) = zF(z) - zf(0).$$

Аналогично для z-изображения функции $f[n - 1]$, учитывая что $f[n] = 0$ при $n < 0$, получим:

$$f[n-1] \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f[n-1] z^{-n} = z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} f[n-1] z^{-(n-1)} = z^{-1} F(z).$$

Обобщением последних соотношений являются z-изображения функций $f[n + k]$ и $f[n - k]$:

$$f[n+k] \Rightarrow z^k F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f[n] z^{k-n}, \quad f[n-k] \Rightarrow z^{-k} F(z).$$

Рассчитаем также изображение разности $\Delta f[n] = f[n+1] - f[n]$. В результате подстановки $f[n + 1]$ и $f[n]$ получим

$$\Delta f[n] = z(F(z) - f[0]) - F(z) = (z - 1)F(z) - zf[0].$$

Изображения наиболее употребительных функций приведены в следующей таблице.

Оригинал: решетчатая функция	**Изображение: z-преобразование**
$f[n], \quad n = 0, 1, 2, \ldots$	$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n}$
$A \cdot 1[n]$	$A\frac{z}{z-1}$

Оригинал: решетчатая функция	**Изображение: *z*-преобразование**
$e^{\alpha nT}$	$\dfrac{z}{z-e^{\alpha T}}$
nT	$\dfrac{zT}{(z-1)^2}$
$nTe^{\alpha nT}$	$\dfrac{ze^{\alpha T}}{(z-e^{\alpha T})^2}$
$e^{\alpha nT}\sin(\omega nT)$	$\dfrac{z\sin(\omega T)}{e^{\alpha T}z^2-2z\cos(\omega T)+e^{\alpha T}}$
$1[n-N]$	$\dfrac{z^{-(N+1)}}{z-1}$
$f[n+1]$	$zF(z)-zf[0]$
$f[n+k]$	$z^kF(z)-\sum\limits_{n=0}^{k-1}f[n]z^{k-n}$
$f[n-k]$	$z^{-k}F(z)$

Рассмотрим связь между z-изображением $F(z)$ решетчатой функции $f[n]$ и операторным изображением $F(p)$ соответствующей ей функции $f(t)$.

Операторное изображение $F(p)=\dfrac{G(p)}{H(p)}$ функции $f(t)$ при простых корнях полинома $H(p)$ можно представить в виде (см. § 10.5)

$$F(p)=\sum_k\frac{G(p_k)}{H'(p_k)}\frac{1}{p-p_k}=\sum_k A_k\frac{1}{p-p_k},\ \text{где}\ A_k=\frac{G(p_k)}{H'(p_k)}.$$

Тогда z-изображение $F(z)$ решетчатой функции $f[n]$ имеет вид

$$F(z)=\sum_k A_k\frac{z}{z-e^{p_kT}}.$$

Действительно, оригиналом функции $F(p)=\sum\limits_k A_k\dfrac{1}{p-p_k}$ является функция $f(t)=\sum\limits_k A_ke^{p_kt}$, которой соответствует решетчатая функция $f[n]=\sum\limits_k A_ke^{p_knT}$. Учитывая, что $e^{p_knT}\Rightarrow\dfrac{z}{z-e^{p_kT}}$, получим приведенное выше z-изображение.

Выполнение обратного z-преобразования, т. е. нахождение решетчатой функции $f[n]$ по ее z-изображению, связано с вычислением интеграла

$$f[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C F(z)z^{n-1}dz,$$

где C — замкнутый контур, охватывающий все особые точки функции $F(z)z^{n-1}$. Им может быть, в частности, круг радиусом $R_0<z$.

Если функция $F(z)$ имеет особые точки только в виде полюсов, то обратное z-преобразование можно рассчитать с помощью теоремы о вычетах

$$f[n] = \sum_k \mathrm{rez}[F(z_k) z_k^{n-1}],$$

где суммирование ведется по всем полюсам k функции $F(z_k) z_k^{n-1}$.

Если $F(z) = \dfrac{G(z)}{H(z)}$ представляет собой рациональную дробь и все полюсы простые и отличны от нуля, то

$$f[n] = \sum_k \frac{G(z_k)}{H'(z_k)} z_k^{n-1},$$

где z_k — корни знаменателя $H(z)$, а $H'(z) = dH/dz$.

Последнее соотношение обратного z-преобразования является аналогом теоремы разложения для преобразования Лапласа.

Решетчатую функцию $f[n]$ можно найти также по ее z-изображению путем преобразования выражения $F(z)$ и представления его в виде суммы нескольких слагаемых, изображения которых приведены выше в таблице.

12.9. Расчет переходных процессов в электрических цепях методом *z*-преобразования

Метод z-преобразования можно применить к решению разностного уравнения цепи. В этом случае получение разностного уравнения является промежуточным этапом решения задачи. Можно также рассчитать переходный процесс в цепи методом z-преобразования по схеме цепи, минуя этап составления разностного уравнения. Рассмотрим далее оба этих подхода к расчету электрических цепей.

Допустим, что процесс в цепи описывается разностным уравнением первого порядка вида $x_{\text{вых}}[n+1] = ax_{\text{вых}}[n] + bx_{\text{вх}}[n]$, тогда z-преобразование входящих в него функций приводит к уравнению $zX_{\text{вых}}(z) - zx_{\text{вых}}(0) = aX_{\text{вых}}(z) + bX_{\text{вх}}(z)$, из которого при $x_{\text{вых}}(0) = 0$ находим: $X_{\text{вых}}(z) = X_{\text{вх}}(z)\, b/(z-a)$. Затем, выполняя обратное z-преобразование, можем определить $x_{\text{вых}}[n]$.

Применим данный способ решения к расчету процесса в цепи r, L при действии на ее входе периодической последовательности прямоугольных импульсов напряжения. Для разностного уравнения рассматриваемой цепи, полученного в § 12.8,

$$i[n+1] = e^{-\frac{T}{\tau}} i[n] + \frac{U_0}{r}\left(e^{-\frac{T_{\text{и}}}{\tau}} - 1\right) e^{-\frac{T}{\tau}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

имеем $x_{\text{вых}}[n] = i[n]$, $x_{\text{вх}}[n] = U_0 \cdot 1[n]$.

В результате можно записать разностное уравнение для тока $i[n]$ в цепи в виде

$$i[n+1] \quad ai[n] + bU_0 \cdot 1[n], \text{ где } a = e^{-\frac{T}{\tau}}, \; b = \frac{1}{r}\left(e^{-\frac{T_{\text{и}}}{\tau}} - 1\right) e^{-\frac{T}{\tau}}.$$

Перейдем от полученного разностного уравнения, к уравнению относительно z-изображений. Учитывая, что изображение последовательности прямоугольных импульсов $U_0 \cdot 1[n]$ имеет вид $U_0 \dfrac{z}{z-1}$, находим z-изображение тока в цепи

$$I(z) = \frac{U_0}{r} e^{-\frac{T}{\tau}} \left(e^{\frac{T_и}{\tau}} - 1 \right) \frac{z}{(z-1)(z - e^{-T/\tau})}.$$

Записывая это выражение в виде

$$I(z) = \frac{U_0}{r} e^{-\frac{T}{\tau}} \left(e^{\frac{T_и}{\tau}} - 1 \right) \frac{1}{1 - e^{-T/\tau}} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-T/\tau}} \right)$$

и пользуясь таблицей соответствия решетчатых функций их z-изображениям (см. § 12.8), получаем искомое выражение для тока $i[n] = \dfrac{U_0}{r} e^{-\frac{T}{\tau}} \left(e^{\frac{T_и}{\tau}} - 1 \right) \dfrac{1 - e^{-nT/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}}$, совпадающее с найденным в § 12.8.

Рассмотренный способ решения может быть применен и к разностному уравнению порядка k. Пусть процесс в цепи описывается разностным уравнением k-го порядка вида $a_k x_{вых}[n+k] + a_{k-1} x_{вых}[n+k-1] + \ldots + a_0 x_{вых}[n] = x_{вх}[n]$, связывающим входную $x_{вх}[n]$ и выходные $x_{вых}[n]$, $x_{вых}[n+1]$, …, $x_{вых}[n+k]$ величины, тогда, переходя к z-изображениям его обеих частей, получаем после простых преобразований выражение

$$X_{вых}(z) = \frac{X_{вх}(z)}{a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \ldots + a_0} + \frac{X_{вых\,0}(z)}{a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \ldots + a_0},$$

где функция

$$X_{вых\,0}(z) = x_{вых}[0](a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \ldots + a_1 z) +$$
$$+ x_{вых}[1](a_k z^{k-1} + a_{k-1} z^{k-2} + \ldots + a_2 z) + \ldots + x_{вых}[k-1] a_k z$$

определяется начальными значениями $x_{вых}[0]$, $x_{вых}[1]$, …, $x_{вых}[k-1]$ выходной величины. Затем, выполняя обратное z-преобразование, можем определить $x_{вых}[n]$.

Метод z-преобразования позволяет рассчитать переходный процесс в электрической цепи и без использования разностных уравнений.

Пусть на входе цепи действует периодическая последовательность прямоугольных импульсов $x_{вх}(nT)$ с периодом T и длительностью $T_и$. Выполняя z-преобразование решетчатой функции $x_{вх}[n] = x_{вх}(nT)$, можем получить функцию $X_{вх}(z)$ и далее из соотношения $X_{вых}[n] = H_и(z) X_{вх}(z)$ найти z-изображение искомой величины $x_{вых}[n]$.

Входящая в это соотношение функция $H_и(z)$ представляет z-изображение реакции электрической цепи на действие сигнала, z-изображение которого равно единице:

$$H_и(z) = X_{вых}(z) \quad \text{при} \quad X_{вх}(z) = 1.$$

Сигналом, z-изображение которого равно единице, является одиночный импульс с интенсивностью, равной 1, приложенный к цепи при $t = 0$. Действительно, одиночный импульс единичной интенсивности, приложенный к цепи в момент времени $t = 0$, описывается решетчатой функцией $x_{\text{вх}}[0] = 1$ и $x_{\text{вх}}[n] = 0$ при $n = 1, 2, \ldots$. Тогда в соответствии с определением прямого z-преобразования имеем $X_{\text{вх}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\text{вх}}[n] z^{-n} = x_{\text{вх}}[0] = 1$.

Реакция цепи $h_{\text{и}}(t)$ на одиночный импульс единичной интенсивности определяется как разность переходных характеристик:

$$h_{\text{и}}(t) = h(t) - h(t - T_{\text{и}}).$$

В частном случае, когда искомой величиной является ток на входе цепи, имеем $h_{\text{и}}(t) = Y(t) - Y(t - T_{\text{и}})$. Решетчатая функция $h_{\text{и}}[n]$ соответствует реакции цепи $h_{\text{и}}(t)$ и представляет собой последовательность значений этой функции $h_{\text{и}}[n] = h_{\text{и}}(nT)$ в дискретные моменты времени nT, $n = 1, 2, \ldots$. Функция $H_{\text{и}}(z)$ является z-изображением решетчатой функции $h_{\text{и}}[n]$, таким образом, имеем

$$H_{\text{и}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_{\text{и}}[n] z^{-n}.$$

Учитывая, что $h_{\text{и}}[0] = h_{\text{и}}(0) = 0$, и, следовательно, первое слагаемое суммы равно нулю, суммирование можно начать с $n = 1$, тогда

$$H_{\text{и}}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} h_{\text{и}}[n] z^{-n}.$$

Получим рассмотренным способом z-изображение тока $I(z)$ в цепи при действии на ее входе периодических импульсов напряжения длительностью $T_{\text{и}}$ и постоянной амплитудой U_0 (см. рис. 12.11). Реакция цепи $h_{\text{и}}(t)$ на одиночный импульс единичной интенсивности определяется следующим образом:

$$h_{\text{и}}(t) = Y(t) - Y(t - T_{\text{и}}) = \frac{1}{r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) - \frac{1}{r}\left(-e^{-\frac{t - T_{\text{и}}}{\tau}}\right) = \frac{1}{r}\left(e^{-\frac{T_{\text{и}}}{\tau}} - 1\right) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

тогда $h_{\text{и}}[n] = \frac{1}{r}\left(e^{\frac{T_{\text{и}}}{\tau}} - 1\right) e^{-\frac{nT}{\tau}}$, а соответствующее z-изображение имеет вид

$$H_{\text{и}}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} h_{\text{и}}[n] z^{-n} = \frac{1}{r}\left(e^{\frac{T_{\text{и}}}{\tau}} - 1\right) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{nT}{\tau}} z^{-n} = \frac{1}{r}\left(e^{\frac{T_{\text{и}}}{\tau}} - 1\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{nT}{\tau}} z^{-n} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\left(e^{\frac{T_{\text{и}}}{\tau}} - 1\right)\left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}} z^{-1}} - 1\right) = \frac{1}{r}\left(e^{\frac{T_{\text{и}}}{\tau}} - 1\right) e^{-\frac{T}{\tau}} \frac{1}{z - e^{-\frac{T}{\tau}}}.$$

Используя выражение для $H_и(z)$, получаем z-изображение искомого тока

$$I(z) = H_и(z)U_{вх}(z) = \frac{U_0}{r}\left(e^{\frac{T_и}{\tau}} - 1\right)e^{-\frac{T}{\tau}}\frac{z}{(z-1)(z-e^{-T/\tau})},$$

которое совпадает с найденным в начале параграфа.

Рассчитаем соответствующую решетчатую функцию. Введем обозначение $a = \frac{U_0}{r}\left(e^{\frac{T_и}{\tau}} - 1\right)e^{-\frac{T}{\tau}}$, тогда

$$I(z) = \frac{az}{(z-1)(z-e^{-T/\tau})} = \frac{G(z)}{H(z)}.$$

Так как корни полинома знаменателя равны $z_1 = 1$, $z_2 = e^{-\frac{T}{\tau}}$, то

$$\frac{G(z_1)}{H'(z_1)} = \frac{a}{1-e^{-T/\tau}}, \quad \frac{G(z_2)}{H'(z_2)} = \frac{ae^{-T/\tau}}{e^{-T/\tau}-1}.$$

В результате имеем

$$i[n] = \frac{a}{1-e^{-T/\tau}}(1-e^{-nT/\tau}) = \frac{U_0}{r}\left(e^{\frac{T_и}{\tau}} - 1\right)e^{-T/\tau}\frac{1-e^{-nT/\tau}}{1-e^{-T/\tau}},$$

что также совпадает с полученным ранее решением.

12.10. О случайных процессах в электрических цепях

Нередко процессы в электрических цепях носят случайный характер, т. е. случайный характер имеют мгновенные ЭДС, токи и напряжения. Такие ЭДС, токи и напряжения не могут быть описаны при помощи рассмотренных ранее определенных функций. Эти мгновенные ЭДС, токи и напряжения в тот или иной момент времени можно определить лишь с той или иной вероятностью. Например, при передаче по проводам телеграфных импульсов или колебаний, модуляция которых осуществляется для воспроизведения речи или изображений, наперед не известны ни значение, ни длительность этих импульсов, ни амплитуда и фаза модулированных колебаний. Точно так же токи и напряжения при переходных процессах, возникающие в энергетических системах при наличии многочисленных приемников, включения и отключения которых возможны в любые моменты времени, не могут быть наперед определенно указаны вследствие невозможности однозначного предсказания очередности этих коммутаций.

При наличии усилителей с очень большими коэффициентами усиления необходимо принимать во внимание так называемый тепловой шум сопротивлений цепи и дробовой эффект в лампах. В проводниках электроны находятся в тепловом хаотическом движении. Существует некоторая вероятность того, что на фоне общего хаотического движения определенное число электронов в тот или иной момент времени будет иметь направленное в одну сторону движение, которое, действуя как ток на участке с сопротивлением, приведет к появлению разности потенциалов на концах этого участка. Значение этого напряжения

и его знак являются случайными величинами. Частотный спектр этого теплового шума вследствие чрезвычайно большого числа электронов и их хаотического движения является равномерным до весьма высоких частот.

Электронный ток в лампах представляет собой движение отдельных электронов, испускаемых катодом и доходящих до анода. Несмотря на то, что средний анодный ток может быть величиной постоянной в зависимости от числа одновременно достигших анода электронов, анодный ток будет меняться во времени. Причем эти изменения будут носить случайный характер. Этот эффект носит название дробового эффекта.

Во всех перечисленных и аналогичных им случаях можно говорить лишь о вероятности того или иного процесса, того или иного значения ЭДС, тока и напряжения.

Расчет случайных процессов в электрических цепях связан с проблемой определения вероятностных характеристик источников возмущений в цепи, например действующих в цепи ЭДС или изменений параметров цепи, и с проблемой определения вероятностных характеристик токов и напряжений, возникающих в цепи под воздействием этих возмущений.

Первая проблема решается при помощи статистических исследований свойств источников возмущений, т. е. путем сбора и обработки соответствующих статистических данных.

Для отыскания вероятностных характеристик искомых токов и напряжений существует ряд разработанных методов. Рассмотрение этих методов представляет собой специальную задачу. Отметим здесь только, что при этом может быть использован ряд известных нам понятий, например понятия об импульсной переходной функции, о комплексной передаточной функции, о среднем квадратическом значении функции и т. д. Отдельные понятия видоизменяются в соответствии со спецификой задачи.

Вероятностные и статистические методы имеют существенное значение во многих областях электротехники, в частности в области передачи сигналов, в области автоматического регулирования и т. д.

Вопросы и упражнения к главам 9, 10, 11 и 12

9.1. Общий путь расчета переходных процессов. Метод переменных состояния

ВОПРОСЫ

1. Какой режим в линейной электрической цепи можно считать установившимся?

2. При каких условиях в электрической цепи может возникать свободный ток?

3. (О) Каким образом по виду электрической цепи можно определить порядок дифференциального уравнения, описывающего переходный процесс?

4. (О) Входящая в правую часть дифференциального уравнения для тока $i_k(t)$ некоторой ветви электрической цепи функция $f_k(t)$: *а*) постоянна $f_k(t) = A$; *б*) является синусоидальной функцией времени $f_{km} \sin(\omega t + \psi_k)$. Как рассчитать величину $i'_k(t)$?

5. (О) Зависит ли порядок дифференциального уравнения, описывающего переходный процесс в цепи, от выбора метода, с помощью которого составляется система уравнений (метод контурных токов, узловых напряжений и др.)?

6. Почему именно токи катушек индуктивности и напряжения конденсаторов определяют энергетическое состояние электрической цепи?

7. Почему напряжения на конденсаторах и токи катушек индуктивности остаются неизменными в момент коммутации?

8. Могут ли в момент коммутации в линейной электрической цепи с источниками энергии конечной мощности быть бесконечно большими: *а*) токи катушек индуктивности; *б*) напряжения на резисторах; *в*) напряжения на конденсаторах; *г*) напряжения на катушках индуктивности; *д*) токи конденсаторов; *е*) токи резисторов?

9. (О) Может ли характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению некоторой электрической цепи, одновременно иметь один (или несколько) отрицательный вещественный корень и пару мнимых корней?

10. Может ли характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению электрической цепи, иметь корни: *а*) $8 - j8$; *б*) $-3j$; *в*) $3j$, $3j$; *г*) $-8 + 8j$; *д*) $-2 + j3$, $-2 - j3$; *е*) $-4 + j2$, $4 + j2$; *ж*) -6, -6; *з*) -8, 8?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Найдите величины i'_L (или u'_C) в электрических цепях, схемы которых изображены на рис. В9.1 (E = const, $\mathfrak{I}$ = const).

2. (Р) Найдите запасенную энергию в установившихся режимах в цепи до замыкания и после замыкания ключа в условиях предыдущего упражнения.

3. (Р) Для схем, изображенных на рис. В9.1, определите $i'_L(t)$ или $u'_C(t)$, считая, что на входе цепи действует источник синусоидальной ЭДС $e(t) = E_m \sin \omega t$ или тока $\mathfrak{I}(t) = \ _m \sin \omega t$. Расчет установившегося режима выполните в цепи, которая образовалась после замыкания ключа.

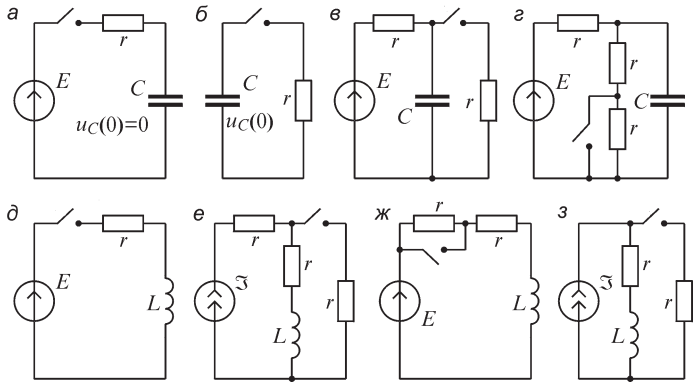


Рис. В9.1

4. (Р) Составьте дифференциальное уравнение для тока i_L или напряжения u_C в цепей, схемы которых изображены на рис. В9.2. Запишите также уравнения состояний этих цепей.

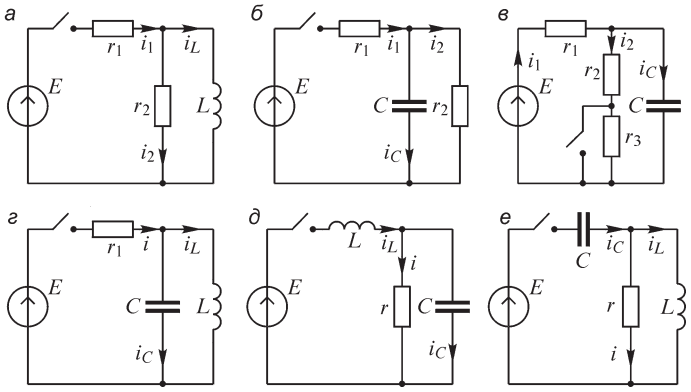


Рис. В9.2

5. (Р) При выражении токов и напряжений резистивных элементов через переменные состояния можно рассмотреть новую цепь, в которой катушки индуктивности представлены источниками тока, а конденсаторы — источниками ЭДС. Чему равны величины источников тока и источников ЭДС? Используя метод наложения, запишите уравнения состояния электрических цепей упр. 4, заменяя катушки индуктивности источниками тока, а конденсаторы — источниками ЭДС.

6. (О) Схема цепи содержит после коммутации m конденсаторов и p катушек индуктивности. Каков максимальный порядок производной, используемой при определении постоянных интегрирования, если в схеме имеется k контуров, состоящих только из конденсаторов и n звезд, состоящих только из катушек индуктивности? Каков порядок дифференциального уравнения, описывающего переходный процесс в этой цепи?

7. В цепи имеется контур, состоящий из двух конденсаторов C_1 и C_2 и источника ЭДС. Будут ли напряжения u_{C_1} и u_{C_2} являться переменными состояния?

8. Как должны быть соединены две катушки индуктивности и источник тока, чтобы ток только одной из них вошел в систему уравнений метода переменных состояний?

9. Изобразите схемы электрических цепей, содержащие три конденсатора и резисторы, переходный процесс в которых описывается: *а*) дифференциальным уравнением третьего порядка; *б*) дифференциальным уравнением второго порядка; *в*) дифференциальным уравнением первого порядка.

10. (О) Приведите примеры цепей, в которых отсутствие переходного процесса после коммутации явилось следствием: *а*) специально подобранных начальных условий; *б*) конфигурации цепи.

11. (Р) Найдите величины $i_L(+0)$ и $\left.\dfrac{di_L}{dt}\right|_{t=+0}$ после коммутации в цепях, схемы которых показаны на рис. В9.3 (U = const, E = const, $\mathfrak{I}$ = const).

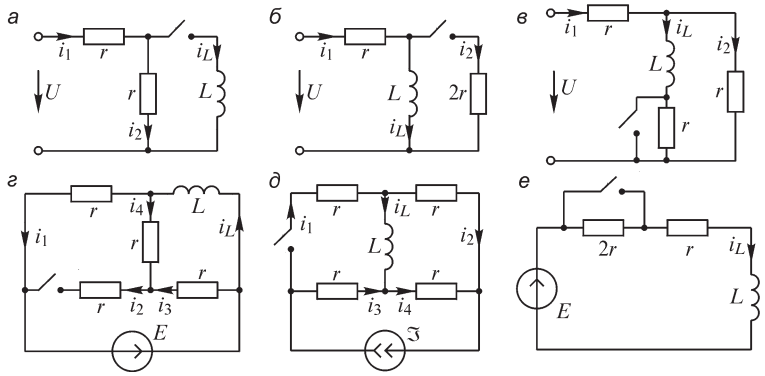


Рис. В9.3

12. (Р) Найдите величины $u_C(+0)$ и $\left.\dfrac{du_C}{dt}\right|_{t=+0}$ после коммутации в цепях, схемы которых показаны на рис. В9.4 (U = const, E = const, $\mathfrak{I}$ = const).

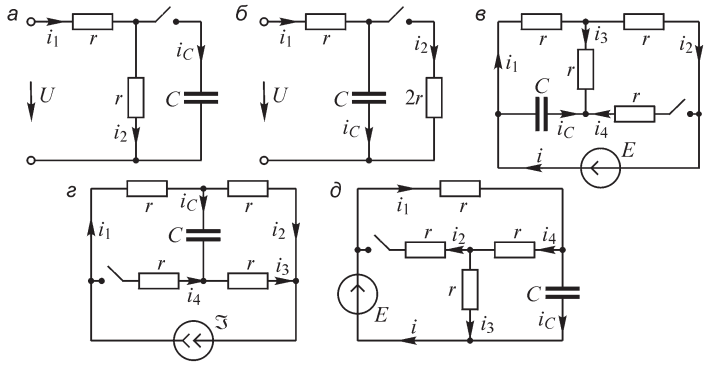


Рис. В9.4

13. (Р) Найдите величины $i_L(+0)$, $\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=+0}$, $\left.\frac{d^2 i_L}{dt^2}\right|_{t=+0}$, $u_C(+0)$, $\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=+0}$, $\left.\frac{d^2 u_C}{dt^2}\right|_{t=+0}$ после коммутации в цепях, схемы которых изображены на рис. В9.5 (U = const).

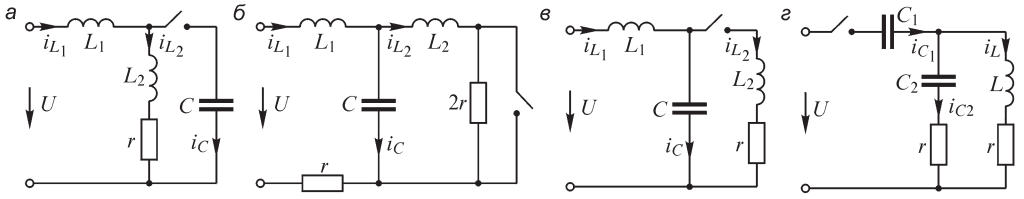


Рис. В9.5

14. (О) Характеристическое уравнение, составленное для цепи из резисторов, катушки индуктивности и конденсатора имеет один из следующих корней: *а*) $+j20$; *б*) $-2 + j5$; *в*) $-j20$; *г*) -2. Укажите, какие еще корни должно иметь это уравнение.

15. Изобразите на комплексной плоскости корни характеристических уравнений, соответствующие следующим выражениям, определяющим свободный процесс:

а) $x''(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + A_3 e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \psi)$;

б) $x''(t) = (A_0 + A_1 t + A_2 t^2) e^{-\delta t} + A_3 e^{\alpha t}$;

в) $x''(t) = (A_0 + A_1 t) e^{-\delta t} \sin(\omega' t + \psi)$, $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < 0$, $\alpha < 0$, $\delta > 0$.

Какой порядок имеют соответствующие характеристические уравнения?

9.2. Переходные процессы в цепях *r, L* и *r, C*

ВОПРОСЫ

1. Во сколько раз изменится постоянная времени цепи с последовательно соединенными участками r, L (или r, C), если *а*) увеличить сопротивление r резистора в 2 раза; *б*) уменьшить индуктивность L катушки (или емкость C конденсатора) в 2 раза?

2. Во сколько раз изменяется свободная составляющая тока в цепях с последовательно соединенными участками r, L (или r, C) за время $t = \tau$, $t = 3\tau$, $t = 5\tau$?

3. Можно ли для уменьшения постоянной времени цепи с последовательно соединенными участками r, L: *а*) увеличить пропорционально линейные размеры катушки, сохранив теми же число витков и материал провода обмотки; *б*) внести в катушку, намотанную на немагнитный полый цилиндр ферромагнитный стержень; *в*) увеличить число витков, сохранив размеры катушки; *г*) намотать катушку более тонким проводом из того же материала, сохранив ее размеры и число витков?

УПРАЖНЕНИЯ

1. К цепи с последовательно соединенными участками r, L в момент времени $t = 0$ подключается источник синусоидального напряжения $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$. Как зависят от величины ψ: *а*) $i_L(+0)$; *б*) $u_L(+0)$; *в*) $i''_L(+0)$?

2. К цепи с последовательно соединенными участками r, C в момент времени $t = 0$ подключается источник синусоидального напряжения $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$. Как зависят от величины ψ: *а*) $u_C(+0)$; *б*) $i_C(+0)$; *в*) $u'_C(+0)$; *г*) максимальное значение тока $i_C(t)$?

3. Изобразите кривые, соответствующие функциям $u'_L(t)$, $u''_L(t)$, $u_L(t)$, при подключении к цепи с последовательно соединенными участками r, L источника синусоидального напряжения $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$ при $\psi = \varphi + \pi/2$. Здесь $\varphi = \psi_u - \psi_i$ — угол сдвига по фазе между напряжением и током в цепи после окончания переходного процесса.

4. Изобразите кривые, соответствующие функциям $u'_C(t)$, $u''_C(t)$, $u_C(t)$, при подключении к цепи с последовательно соединенными участками r, C источника синусоидального напряжения $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$ при $\psi = \varphi$. Здесь $\varphi = \psi_u - \psi_i$ — угол сдвига по фазе между напряжением и током в цепи после окончания переходного процесса $u_C(0) = 0$.

5. (Р) Предложите способ расчета постоянной времени цепи, содержащей произвольное число резисторов и: *а*) одну катушку индуктивности; *б*) один конденсатор.

6. (Р) Найдите постоянные времени цепей, схемы которых изображены на рис. В9.6.

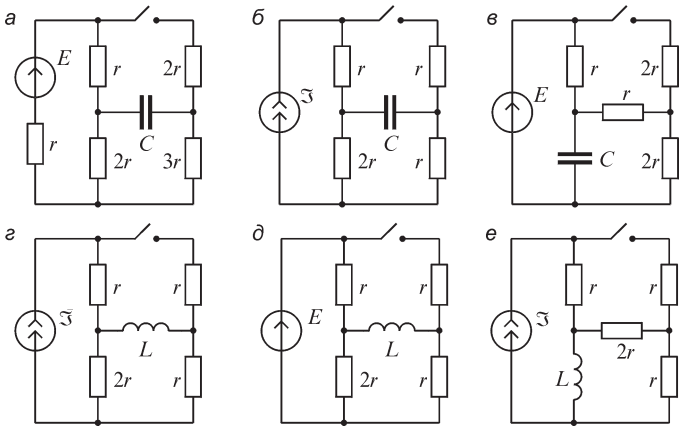


Рис. В9.6

7. (Р) Найдите ток $i(t)$ в цепи, схема которой изображена на рис. В9.7, при *а*) $E = \text{const}$; *б*) $E = E(t)$.

8. (Р) Рассчитайте энергию, рассеиваемую в резисторе r за время разряда конденсатора в цепи, схема которой изображена на рис. В9.8. Сравните ее с запасенной энергией в электрическом поле конденсатора до коммутации. $E = 20$ В, $r = 10$ Ом, $r_0 = 5$ Ом, $C = 1$ мкФ.

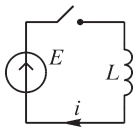


Рис. В9.7

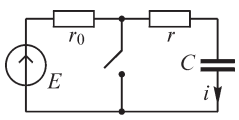


Рис. В9.8

9.3. Переходные процессы в цепи *r, L, C*

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Какими должны быть начальные условия в цепи с последовательно соединенными участками *r*, *L*, *C*, чтобы при включении цепи под постоянное напряжение переходный процесс в цепи отсутствовал?

2. Параметры цепи с последовательно соединенными участками *r*, *L*, *C* таковы, что имеет место апериодический разряд конденсатора. Может ли разряд стать колебательным, если: *а*) уменьшать сопротивление *r* резистора; *б*) увеличивать индуктивность *L* катушки; *в*) уменьшать емкость *C* конденсатора; *г*) уменьшать отношение *r*/*L*; *д*) увеличивать частоту резонанса контура; *е*) увеличивать добротность контура; *ж*) увеличивать волновое сопротивление контура?

3. (О) При каких сопротивлениях *r* в цепи с последовательным соединением элементов *r*, *L*, С период колебаний тока в ней при разряде конденсатора будет: *а*) минимальным; *б*) максимальным?

4. Справедливы ли утверждения, что для увеличения декремента колебаний Δ при колебательном разряде конденсатора на цепь *r*, *L* следует: *а*) увеличить сопротивление *r* резистора; *б*) уменьшить индуктивность *L* катушки; *в*) увеличить отношение *r*/*L*; *г*) увеличить емкость *C* конденсатора; *д*) увеличить напряжение $u_C(0)$? Каким образом изменяется при этом период затухающих колебаний?

5. (Р) Цепь, состоящую из последовательно соединенных участков *r*, *L*, *C*, подключают под постоянное напряжение U_0 при нулевых начальных условиях. Докажите, что при апериодическом переходном процессе напряжение на конденсаторе не может превысить величину U_0.

6. (О) Покажите, что при колебательном разряде конденсатора на цепь *r*, *L* напряжение на нем не превысит его начального значения.

9.4. Переходные процессы в цепях при мгновенном изменении параметров участков цепи

ВОПРОСЫ

1. (О) В каком случае мгновенное изменение индуктивности (емкости) цепи не приводит к появлению импульсов напряжения (тока) бесконечно большой амплитуды?

2. Возможно ли появление бесконечно больших скачков напряжения или тока при мгновенном изменении сопротивления?

3. (О) После коммутации в цепи возникло сечение только из катушек индуктивности. Является ли это необходимым и достаточным для возникновения в цепи импульсов напряжения бесконечно большой амплитуды?

4. (О) В результате коммутации в цепи образовался контур, состоящий из конденсаторов и еще одного элемента. Возможно ли возникновение импульсов тока бесконечно большой амплитуды, если этот элемент: *а*) идеальный источник ЭДС; *б*) резистор; *в*) источник тока?

5. В результате коммутации в цепи образовалось сечение, состоящее из катушек индуктивности и еще одного элемента, не являющегося катушкой индуктивности. Почему в этом случае возникновение импульса напряжения бесконечно большой амплитуды возможно только, если этот элемент источник тока?

10.1. Операторные изображения функций, их производных и интегралов

ВОПРОСЫ

1. Является ли операторное изображение функции $f(t)$: *а*) функцией времени; *б*) функцией оператора p?

2. Одинаковы ли размерности напряжения $u(t)$ и его изображения по Лапласу $U(p)$?

3. (О) Существует ли операторное изображение функции e^{t^2}?

4. Зависит ли изображение интеграла функции $f(t)$ от значения $f(0)$ этой функции в момент времени $t = 0$, который является нижним пределом интеграла?

5. (О) Функция $f(t)$ имеет разрыв первого рода при $t = 0$: $f(+0) \neq f(-0)$. Какое из значений $[f(+0)$ или $f(-0)]$ следует принять в качестве $f(0)$ в выражении $f'(t) = pF(p) - f(0)$?

6. Каковы размерности изображения: *а*) напряжения $U(p)$; *б*) тока $I(p)$; *в*) сопротивления $Z(p)$; *г*) проводимости $Y(p)$?

7. Какие условия следует наложить на выбор величины σ_0, входящей в пределы интеграла формулы обратного преобразования Лапласа?

8. Равно ли изображение произведения $f_1(t)\cdot f_2(t)$ функций произведению их операторных изображений $F_1(p)\cdot F_2(p)$?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Получите операторные изображения токов:

а) $i(t) = 2e^{-10(t-3)}$; *б*) $i(t) = 5e^{-t}\sin 100\pi t$; *в*) $i(t) = 10te^{-t}$; *г*) $i(t) = 3(1 - e^{-10t})$.

2. (Р) Найдите операторные изображения приведенных на рис. В10.1 напряжений с помощью: *а*) интеграла Лапласа; *б*) метода наложения, используя изображение функции, смещенной во времени: $f(t - x) \Rightarrow e^{-px}\cdot F(p)$.

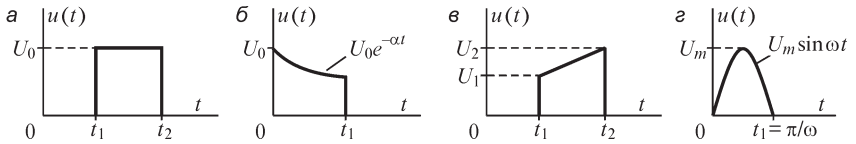


Рис. В10.1

3. (Р) Покажите, что оригинал $f(t)$ при $t = +0$ при известном его изображении $F(p)$ можно найти по формуле $f(+0) = \lim\limits_{p\to\infty}[pF(p)]$.

4. (Р) Покажите, что оригинал $f(t)$ при $t \to \infty$ (т. е. в установившемся режиме) при известном его изображении $F(p)$ можно найти по формуле

$$f(t)\big|_{t\to\infty} = \lim_{p\to 0}\,[pF(p)].$$

5. (Р) Найдите токи $i(+0)$ и $i(\infty)$ по заданному операторному изображению тока

а) $I(p) = \dfrac{U_0(2rCp+1)}{p(2rLCp^2 + pL + 2r)}$; *б)* $I(p) = \dfrac{U_0(LCp^2 + rCp)}{p(rLCp^2 + pL + r)}$;

в) $I(p) = \dfrac{U_0(LCp^2 + 1)}{p(rLCp^2 + pL + r)}$; *г)* $I(p) = \dfrac{U_0(LCp^2 + 1)}{(p+\alpha)(L^2Cp^3 + rLCp^2 + pL + r)}$;

д) $I(p) = \dfrac{U_0(LC^2p^3 + Cp)}{p(rLC^2p^3 + 2LCp^2 + rCp + 1)}$.

6. Покажите, что если: *а)* $i_1(t) \Rightarrow I_1(p)$ и $i_2(t) \Rightarrow I_2(p)$, то $i_1(t) + i_2(t) \Rightarrow I_1(p) + I_2(p)$; *б)* $i\,(t) \Rightarrow I(p)$, то при $r = \text{const}$ $ri_1(t) \Rightarrow rI_1(p)$.

7. Покажите, что если функция $f(t)$ имеет своим изображением $F(p)$, то

$$f(At) \Rightarrow \frac{1}{A}F\left(\frac{1}{A}p\right), \text{ где } A = \text{const}.$$

Пользуясь этим, найдите операторное изображение функции $U_m \sin k\omega t$, учитывая , что $\sin\omega t \Rightarrow \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$.

10.2. Расчет переходных процессов операторным методом

ВОПРОСЫ

1. (О) В чем состоит различие в учете начальных условий при расчете переходных процессов в цепях классическим и операторным методами?

2. (О) При выполнении какого условия входное операторное сопротивление $Z(p)$ двухполюсника можно получить, заменяя величину $j\omega$ на p в выражении его комплексного входного сопротивления $Z(j\omega)$?

3. Участки электрической цепи соединены последовательно (параллельно). Можно ли сложить их операторные сопротивления (проводимости), если начальные условия: *а)* нулевые; *б)* ненулевые?

4. (О) Переходный процесс в некоторой линейной электрической цепи рассчитывают операторным методом при нулевых начальных условиях. Можно ли утверждать, что система уравнений законов Кирхгофа в операторной форме совпадает с аналогичной системой уравнений, составленной для этой же цепи комплексным методом при замене $p \to j\omega$, $I(p) \to \dot{I}$, $E(p) \to \dot{E}$ и т. д.?

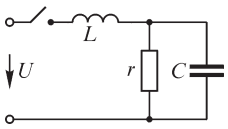


Рис. В10.2

5. Как изменятся полиномы $G(p)$, $H(p)$ выражения $I(p) = G(p)/H(p)$ при изменении в цепи начальных условий?

6. В цепи, изображенной на рис. В10.2, $u_C(0) \neq 0$. Можно ли при подключении цепи к источнику напряжения U рассчитать ток в катушке индуктивности с помощью выражения $I_L(p) = U(p)/Z(p)$?

7. (О) Почему величины $G(p_k)/H'(p_k)$ в правой части теоремы разложения могут быть комплексными? Ведь в ее левой части — функция действительного аргумента $i(t)$?

8. (О) Можно ли, зная операторное сопротивление цепи, определить корни характеристического уравнения, соответствующего ее дифференциальному уравнению?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) Найдите операторные сопротивления приведенных на рис. В10.3 электрических цепей.

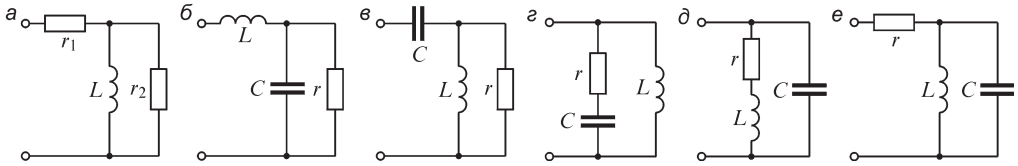


Рис. В10.3

2. (Р) Изобразите дополнительные источники, вводимые при расчете переходных процессов в приведенных на рис. В10.4 цепях операторным методом. Запишите уравнения законов Кирхгофа в операторной форме, принимая $E = \text{const}$, $\mathfrak{I} = \text{const}$.

3. Получите выражения для тока $I(p)$ при подключении цепи с последовательно соединенными участками r, L, C к источнику постоянного напряжения при нулевых начальных условиях, если корни полинома знаменателя: *а*) вещественны и отличны друг от друга; *б*) вещественны и равны друг другу.

4. (Р) Запишите выражение для тока $I(p)$ (или напряжения $U(p)$) источника в изображенных на рис. В10.5 электрических цепях после замыкания ключа, считая начальные условия нулевыми и принимая $e(t) = E_m \sin \omega t$, $(t) = \ _m \sin \omega t$.

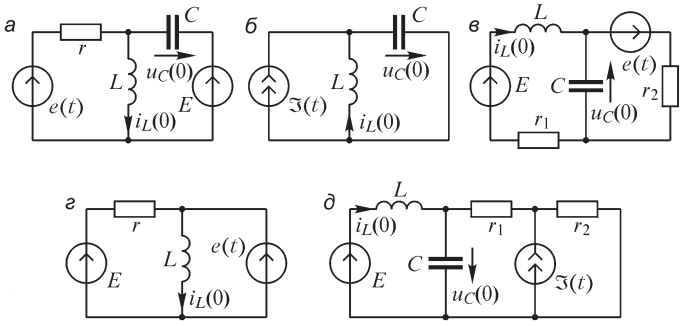


Рис. В10.4

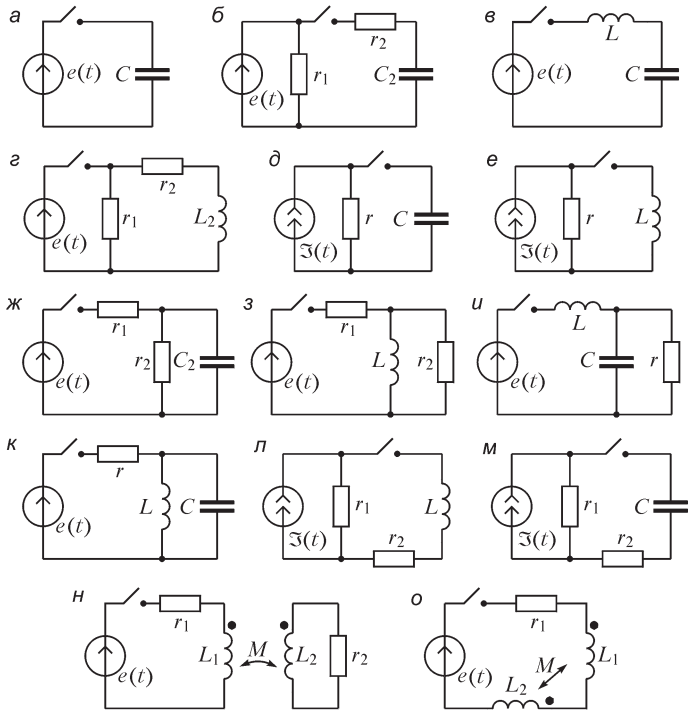


Рис. В10.5

5. (Р) Рассчитайте операторным методом токи в ветвях цепи, изображенной на рис. В10.6 при следующих значениях параметров: $r = 40$ Ом, $L = 0{,}1$ Гн, $C = 10$ мкФ, $u = U_0 = 120$ В.

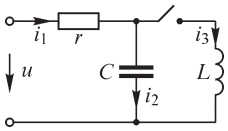


Рис. В10.6

6. Запишите уравнение метода узловых напряжений в операторной форме для изображенной на рис. В10.2 цепи.

7. (Р) Найдите ток $i(t)$ по заданному его операторному изображению

$$а)\ I(p) = \frac{U_0}{r}\frac{p+2}{(p+1)^2(p+3)};\ б)\ I(p) = \frac{U_0}{r}\frac{1{,}5p+1}{(2p+1)p};\ в)\ I(p) = \frac{U_0}{r}\frac{2p+1}{(p^2+\omega)^2(p+2)}.$$

8. (Р) Найдите выражение для тока в цепи с последовательно соединенными участками r, L при действии на ее входе напряжения $u = U_m e^{-\alpha t}$ и начальном условии $i(0) = 0$.

9. (Р) Найдите выражения для токов $i_1(t)$, $i_2(t)$ воздушного трансформатора (рис. В10.7), подключаемого к источнику постоянного напряжения. Параметры первичного и вторичного контуров равны r_1, L_1 и r_2, L_2, соответственно, $i_2(0) = 0$.

Рассмотрите частные случаи:

1) $r_1/L_1 = r_2/L_2$;
2) $L_1 \cdot L_2 = M^2$;
3) $r_1 = r_2 = r$, $M = L_1 = L_2 = L$.

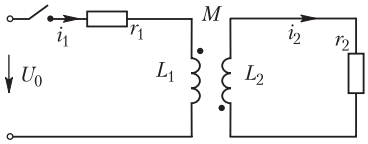


Рис. В10.7

10. (Р) Покажите, что если входящий в выражение $I(p) = G(p)/H(p)$ полином $H(p)$ имеет пару сопряженных мнимых корней и может быть записан в виде $H(p) = (p^2 + \omega^2)N(p)$, то справедливо равенство

$$\frac{G(+j\omega)}{H'(+j\omega)}e^{j\omega t} + \frac{G(-j\omega)}{H'(-j\omega)}e^{-j\omega t} = \mathrm{Im}\left[\frac{G(j\omega)}{\omega N(j\omega)}e^{j\omega t}\right].$$

Используйте следующие свойства полиномов $H(j\omega)$ и $G(j\omega)$:

$$H'(j\omega) = 2j\omega N(j\omega),\ H'(-j\omega) = 2j\omega N(-j\omega),\ N(-j\omega) = \overset{*}{N}(j\omega),\quad G(-j\omega) = \overset{*}{G}(j\omega).$$

11.1. Частотные характеристики непериодических сигналов

ВОПРОСЫ

1. Одинаков ли класс функций, для которых могут быть выполнены прямые преобразования Фурье и Лапласа?

2. Можно ли выполнить прямое преобразование Фурье следующих непериодических ЭДС, токов, напряжений ($\alpha > 0$):

а) $i(t) = \begin{cases} 5, & t \ge 0; \\ 0, & t < 0; \end{cases}$ *б*) $i(t) = 10e^{\alpha t}$, $(t > 0)$; *в*) $i(t) = 10e^{-\alpha t}$, $(t > 0)$;

г) $u(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0; \\ At, & 0 < t \le T; \\ 0, & t > T; \end{cases}$ *д*) $i(t) = 20\ln\alpha t$; *е*) $u(t) = 100\,\mathrm{sh}\,\alpha t$; *ж*) $i(t) = 5\,\mathrm{sh}\,\alpha t$?

3. Могут ли принимать отрицательные значения: *а*) вещественная; *б*) мнимая; *в*) амплитудная; *г*) фазовая частотные характеристики ЭДС, напряжений, токов?

4. Какие из изображенных на рис. В11.1 частотных характеристик $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$ и $f_3(\omega)$ могут являться: *а*) вещественной частотной характеристикой сигнала; *б*) мнимой частотной характеристикой сигнала; *в*) амплитудной частотной характеристикой сигнала; *г*) фазовой частотной характеристикой сигнала?

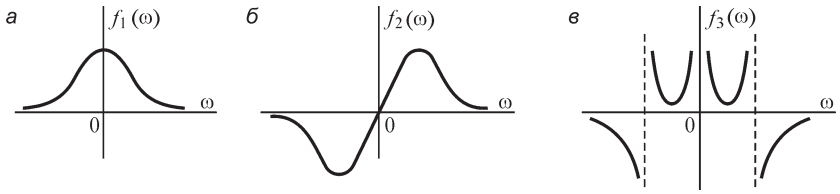


Рис. В11.1

5. (О) Как изменяются ширина и амплитуда первого лепестка (при $|\omega| < \pi/a$) амплитудной частотной характеристики прямоугольного импульса (рис. В11.2): *а*) при уменьшении длительности импульса; *б*) при увеличении амплитуды импульса?

6. Во сколько раз изменится значение амплитудной частотной характеристики $U(\omega)$ напряжения $u(t) = U_0e^{-\delta t}\sin\omega_0 t$ в точке $\omega = 0$ и изменении величины δ от $0{,}5\omega_0$ до ω_0?

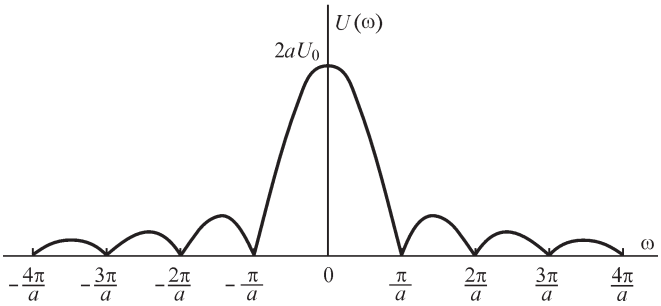


Рис. В11.2

УПРАЖНЕНИЯ

1. Рассчитайте модуль и фазу спектральной плотности напряжений $u_1(t) = U_0 e^{-t/\tau}$, $u_2(t) = U_0 e^{-2t/\tau}$ при $\omega = 0$, $\omega = \tau$, $\omega = 2\tau$.

2. (Р) Найдите частотную характеристику $U(j\omega)$ напряжений $u(t)$, изображенных на рис. В11.3:

$$а)\ u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ U_0, & 0 < t < 2a, \\ 0, & t > 2a; \end{cases} \quad б)\ u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ U_m \sin\omega_0 t, & 0 < t \le \pi/\omega_0, \\ 0, & t > \pi/\omega_0, \end{cases}$$

$$в)\ u(t) = \begin{cases} 0, & t \le -a, \\ \dfrac{U_m}{a}(t + a), & -a \le t \le 0, \\ -\dfrac{U_m}{a}(t - a), & 0 \le t \le a, \\ 0, & t \ge a. \end{cases}$$

Постройте амплитудную и фазовую частотные характеристики напряжений $u(t)$.

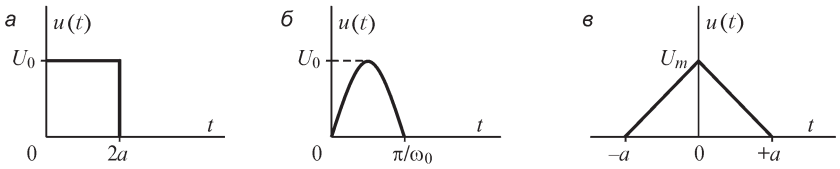


Рис. В11.3

3. Выразите спектральную плотность приведенных далее напряжений через спектральную плотность $F(j\omega)$ напряжения $u(t)$: *а)* $u(at)$, $a > 0$; *б)* $tu(t)$; *в)* $u(t)/t$; *г)* $u(t - t_0)$; *д)* $u(-t)$; *е)* $u(t) + u(-t)$; *ж)* $u(t) - u(-t)$ (см. 10.1, упр. 7).

4. Частотная характеристика напряжения $u(t)$ равна $U(j\omega)$. Выразите частотные характеристики напряжений $u(t)\sin\omega_1 t$, $u(t)\cos\omega_1 t$ через $U(j\omega)$.

5. Определите частоту ω_0, при которой модуль частотной характеристики $U(j\omega)$ напряжения $u(t) = U_0(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$ в 10 раз меньше по сравнению с его значением при частоте $\omega = 0$, ($\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha < \beta$).

6. Определите диапазон частот $0 < \Delta\omega < \omega_{гр}$ амплитудно-частотной характеристики $E(\omega)$ импульса ЭДС $e(t) = E_0 e^{-\alpha t}$, в котором сосредоточено 90 % его энергии ($\alpha > 0$).

7. (Р) Периодическое напряжение $u(t)$ является бесконечной последовательностью одинаковых импульсов $u_{имп}(t)$, повторяющихся через интервалы времени $T = 2\pi/\omega_1$ (рис. В11.4). Получите соотношение, связывающее дискретный спектр $U(jq\omega_1)$ функции $u(t)$ со спектральной плотностью $U(j\omega)$ одиночного импульса $u_{имп}(t)$.

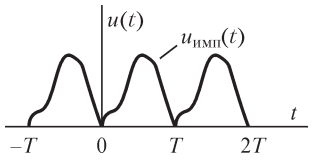


Рис. В11.4

11.2. Расчет переходных процессов при помощи частотных характеристик сигналов и электрических цепей

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. На каком этапе расчета тока в переходном процессе методом частотных характеристик необходимо использовать комплексный метод расчета цепей переменного тока?

2. Частотная характеристика $z(\omega)$ цепи получена опытным путем при изменении частоты от $\omega_{min} = 0$ до $\omega_{max} = \omega'$. При каких условиях погрешность нахождения тока $i(t)$ на входе цепи по его частотной характеристике $I(\omega) = U_{вх}(\omega)/z(\omega)$, получаемой в диапазоне частот $0 \le \omega \le \omega'$, где $U_{вх}(\omega)$ — амплитудная частотная характеристика напряжения $u_{вх}(t)$ на входе цепи, будет приемлемой?

3. (О) Можно ли рассчитать методом частотных характеристик переходные процессы, протекающие при ненулевых начальных напряжениях на конденсаторах и токах в катушках?

4. Предложите подход для определения частоты $\omega_{гр}$, такой, что при $\omega > \omega_{гр}$ сопротивление (или проводимость) двухполюсника, содержащего реактивные элементы, монотонно убывает с ростом частоты ω.

5. На вход цепи подается напряжение $u_{вх}(t)$. Какая характеристика цепи должна быть найдена, чтобы, используя спектральный метод, рассчитать: *а*) напряжение $u_{вых}(t)$ на некотором элементе цепи; *б*) ток $i_{вых}(t)$ некоторого элемента цепи?

6. (Р) Определите ток $i(t)$, вещественная частотная характеристика $I_1(\omega)$ которого, получаемая при аппроксимации ее отрезками прямых, показана на рис. В11.5. Изобразите зависимости $i(t)$.

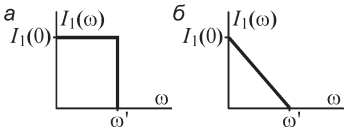


Рис. В11.5

12.1. Переходные и импульсные характеристики электрических цепей

ВОПРОСЫ

1. Какой вид должно иметь приложенное к цепи воздействие при нахождении ее *а*) переходной; *б*) импульсной характеристики?

2. Какие электрические цепи имеют не зависящие от времени переходные характеристики?

3. Может ли переходная характеристика электрической цепи: *а*) иметь размерность сопротивления; *б*) проводимости; *в*) быть безразмерной?

4. К входу электрической цепи подключают источник скачкообразного напряжения $u(t) = U_0 \cdot 1(t - \tau)$. Можно ли рассчитать ток на входе цепи с переходной проводимостью $Y(t)$, пользуясь выражениями: *а*) $i(t) = U_0 \cdot 1(t) \cdot Y(t - \tau)$; *б*) $i(t) = U_0 \cdot 1(t - \tau) \cdot Y(t)$; *в*) $i(t) = U_0 \cdot 1(t - \tau) \cdot Y(t - \tau)$?

5. (О) В одной из ветвей электрической цепи действует импульсная ЭДС. Как следует изобразить эту ветвь при расчете токов в промежутках времени между импульсами? Изменится ли ответ, если вместо источника ЭДС в ветвь включен импульсный источник тока?

6. (О) В момент действия импульса и в момент паузы процессы в цепи описываются различными дифференциальными уравнениями. В чем заключается их различие?

7. Каковы амплитуда, длительность и площадь импульсных функций $K_1\delta(t)$, $K_2\delta(t + \tau)$, $K_3\delta(t - 2\tau)$?

8. (О) Для нахождения импульсной характеристики цепи следует решать однородное дифференциальное уравнение. Почему уравнение имеет ненулевое решение? Зависит ли решение от параметров импульса?

9. Зависит ли ток в цепи с последовательным соединением элементов r, L к моменту окончании действия импульсной ЭДС на ее входе от: *а*) сопротивления r; *б*) площади импульса?

10. (О) Цепь с последовательно соединенными резистором и конденсатором подсоединена к источнику импульсного тока ($I\Delta t = K$). Изменяется ли напряжение u_C на конденсаторе: *а*) в момент действия импульса; *б*) после окончания действия импульса?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Получите выражения для переходных характеристик $h(t) = u_2(t)/u_1$, $Y(t) = i_1(t)/u_1$ изображенных на рис. В12.1 электрических цепей.

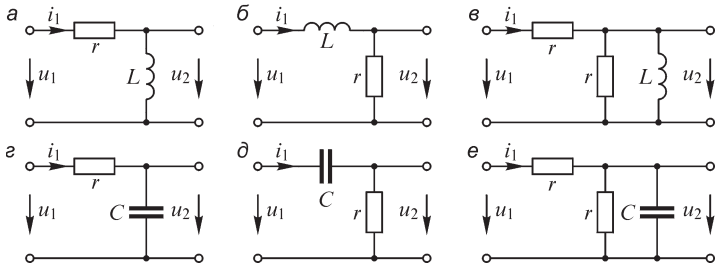


Рис. В12.1

2. Переходные характеристики электрических цепей приведены на рис. В12.2. Изобразите соответствующие им импульсные характеристики.

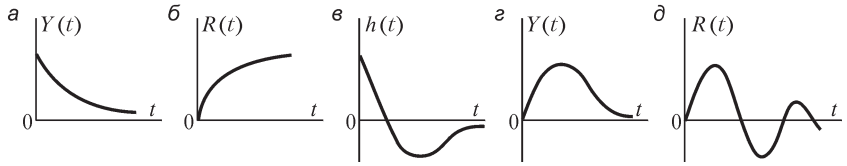


Рис. В12.2

3. (Р) Помеха $u(t)$ на входе изображенной на рис. В12.3 цепи имеет форму прямоугольного импульса напряжения амплитудой U_0 и длительностью T. Рассчитайте напряжение на сопротивлении $r_н$ нагрузки при $U_0 = 10$ мВ, $L = 10^{-2}$ Гн, $C = 10^{-9}$ Ф, $r_н = 10^3$ Ом, $T = 10^{-5}$ с.

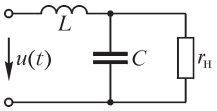


Рис. В12.3

4. (Р) Найдите значения интегралов *а)* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} U_0\delta(t)\,dt$; *б)* $\int\limits_{t=+0}^{\infty} \delta(t)\,dt$; *в)* $\int\limits_{\tau}^{\infty} \delta(t)\,dt$, $(\tau > 0)$;

г) $\int\limits_{2\tau}^{\infty} \delta(t-\tau)\,dt$; *д)* $\int\limits_{-\tau}^{+\tau} \delta(t-2\tau)\,dt$; *е)* $\int\limits_{-\tau}^{\infty} \delta(t+2\tau)\,dt$; *ж)* $\int\limits_{-\infty}^{2\tau} \delta(t-\tau)\,dt$; *з)* $\int\limits_{-2\tau}^{+2\tau} \delta(t+3\tau)\,dt$;

и) $\int\limits_{0}^{5\tau} \delta(t-4\tau)\,dt$; *к)* $\int\limits_{0}^{\tau} 1(t)\,dt$; *л)* $\int\limits_{-\infty}^{t} U_0\delta(t)\,dt$; *м)* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} 1(t)\,dt$.

5. (Р) На входе электрической цепи действует импульсная ЭДС $K\delta(t)$, характеризуемая величиной $K = E\Delta t$. Запишите выражения для нахождения некоторой выходной величины $x_{вых}$ (тока либо напряжения) к моменту окончания действия импульса ($t = +0$) и при $t > 0$.

6. (Р) Пользуясь выражениями для найденных при решении упр. 1 переходных характеристик $h(t) = u_2(t)/u_1$, $Y(t) = i_1(t)/u_1$ электрических цепей, получите импульсные характеристики этих цепей.

7. (Р) На входе цепи с последовательно соединенными элементами r, C $(u_C(0) = 0)$ действует импульсная ЭДС $K\delta(t)$. Объясните, почему ток через конденсатор после окончания импульса меняет направление. Меняет ли направление напряжение на конденсаторе? Запишите выражение $u_C(t)$.

8. (Р) На входе электрических цепей (см. рис. В12.1) в момент времени $t = 0$ действует импульсная ЭДС $K\delta(t)$. Рассчитайте ток i_1 и напряжение u_2 в момент времени $t = +0$ после окончания действия импульса. Получите выражение $i_1(t)$ и $u_2(t)$ при $t > 0$.

12.2. Расчет переходных процессов в цепях при помощи интеграла Дюамеля

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) На входе цепи действует напряжение $u(t)$. Входной ток можно рассчитать с помощью выражения $i(t) = u(0)Y(t) + \int\limits_0^t Y(t-x)u'(x)dx$. Какой вид примет это

выражение при расчете: *а*) тока $i_k(t)$ в k-й ветви, не являющейся входной; *б*) напряжения $u_k(t)$ на k-й ветви?

2. (О) Цепь подключают под действие напряжения произвольной формы. Можно ли рассчитать переходный процесс в цепи с помощью интеграла Дюамеля, если: *а*) в ней заданы ненулевые начальные условия; *б*) она является активным двухполюсником?

3. (Р) На входе цепи действует напряжение

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) & \text{при} \quad 0 \le t \le t_1, \\ u_2(t) & \text{при} \quad t_1 < t < \infty, \end{cases}$$

причем: *а*) $u_1(t_1) = u_2(t_1)$ и *б*) $u_1(t_1) \ne u_2(t_1)$. Используя метод наложения, получите на основе интеграла Дюамеля выражение для входного тока $i(t)$ цепи.

4. (Р) На входе цепей, изображенных на рис. В12.1, действует напряжение указанного на рис. В12.4 вида. Запишите выражение для тока $i_1(t)$.

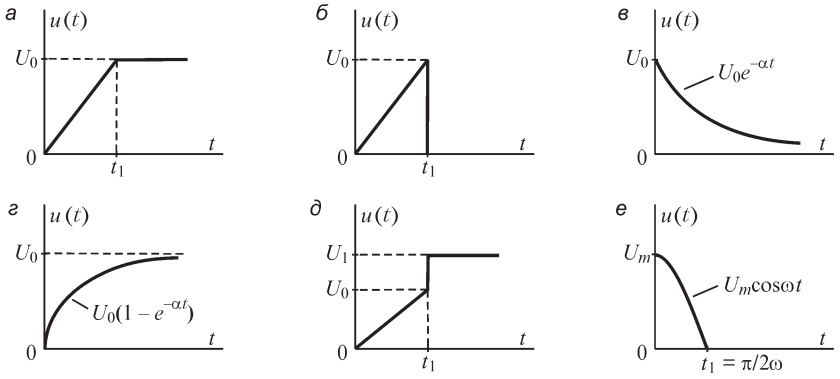


Рис. В12.4

5. (Р) Напряжение на входе приведенных на рис. В12.1 цепей изменяется по закону $u(t) = U_m \sin \omega t$ при $0 \le t \le T/4$; $u(t) = \frac{1}{2} U_m \sin \omega t$ при $T/4 \le t \le T/2$; $u(t) = 0$ при $t > T/2$, где $\omega = 2\pi/$. Найдите зависимость $i_1(t)$.

6. (Р) В § 12.3 при выводе интеграла Дюамеля напряжение $u(t)$ заменяют суммой ступенчатых напряжений. Получите выражение интеграла в иной форме, заменяя напряжение $u(t)$ суммой импульсных напряжений прямоугольной формы.

12.3. Расчет переходных процессов в цепях при действии последовательности импульсов

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) На входе цепи (рис. В12.5) действуют импульсы напряжения прямоугольной формы амплитудой $U_0 = 100$ В с периодом следования $T = 2 \cdot 10^{-4}$ с и длительностью $T_и = 10^{-4}$ с. Рассчитайте напряжение на конденсаторе $u_C[n]$ при

начальном условии $u_C(0) = 0$, составляя и решая разностное уравнение. Запишите полученное решение при $T_и \to 0$, $U_0 \to \infty$ и сохранении значения $K = U_0 T_и = 10^{-2}$ В·с, т. е. при действии последовательности мгновенных импульсов напряжения интенсивностью K.

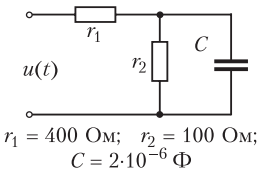


Рис. В12.5

2. (Р) На входе цепи с последовательно соединенными участками r, L действуют мгновенные импульсы напряжения с периодом $T = 2 \cdot 10^{-4}$ с и интенсивностью $K = 10^{-4}$ В·с. Рассчитайте ток $i(t)$ в цепи при $i(0) = 0$, $r = 10$ Ом, $L = 0{,}02$ Гн.

3. (Р) Найдите z-изображения мгновенных импульсов напряжения единичной интенсивностью, образующих последовательность: *а*) (1, 0, 0, ...); *б*) (1, 1, 0, 0, ...); *в*) (1, 1, 1, 0, 0, 0, ...); *г*) (1, –1, 1, –1, ...); *д*) (1, 1, –1, –1, ...).

4. (Р) Найдите z-изображения решетчатых функций $f(nT) = f[n]$, соответствующих функциям: *а*) $u(t) = U_0(1 - e^{\alpha t})$; *б*) $u(t) = U_m \sin \omega t$; *в*) $u(t) = at^2$.

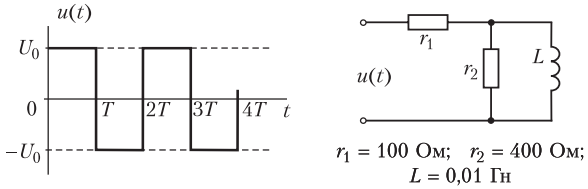


Рис.В12.6

5. (Р) На входе цепи действует периодическое (с периодом $T = 3 \cdot 10^{-4}$ с) напряжение амплитудой $U_0 = 100$ В (рис. В12.6). Рассчитайте ток $i_L[n]$ катушки при $i_L(0) = 0$ методом z-преобразования.

Глава тринадцатая

Анализ общих свойств четырехполюсников

13.1. Различные виды уравнений четырехполюсника

Любой сложной цепи, имеющей два входных зажима, ранее было дано общее наименование двухполюсника. Двухполюсник был назван пассивным, если внутри нет источников энергии, и активным, если в нем содержатся источники энергии. Двухполюсник обобщенно характеризовался одним параметром — входным сопротивлением или, соответственно, входной проводимостью.

Многие электротехнические устройства, служащие для передачи энергии или сигналов, имеют два входных и два выходных зажима, причем их внутренняя электрическая цепь может быть весьма сложной. Такие устройства носят название четырехполюсников — пассивных, если внутри них отсутствуют источники энергии, и активных, если внутри них содержатся источники энергии.

В настоящей главе будем рассматривать пассивные четырехполюсники, так как активный четырехполюсник может быть заменен эквивалентным ему пассивным и вынесенными за зажимы последнего эквивалентными ЭДС, что будет показано в § 13.8. Параметры всех элементов четырехполюсника будем полагать постоянными.

Отметим, что линейный пассивный двухполюсник, а также линейный пассивный четырехполюсник в общем случае могут содержать внутри себя источники энергии, но с обязательным условием, что действие их взаимно компенсируется внутри двухполюсника или, соответственно, внутри четырехполюсника таким образом, что напряжения на входных, а для четырехполюсника — также и на выходных разомкнутых зажимах равны нулю.

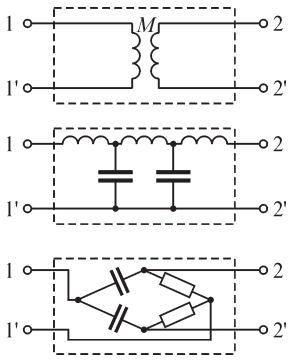


Рис. 13.1

Как сейчас будет показано, пассивный четырехполюсник может быть обобщенно охарактеризован тремя независимыми параметрами, которые могут быть определены расчетом, если известно внутреннее строение четырехполюсника, а также экспериментально. Экспериментальное определение параметров четырехполюсника имеет особо важное значение, когда внутреннее строение четырехполюсника неизвестно.

Примерами пассивных четырехполюсников являются трансформатор, электрический фильтр, мостовая цепь, схемы которых приведены на рис. 13.1. Они имеют два входных (*1*, *1*) и два выходных (*2*, *2′*) зажима.

В дальнейшем будем рассматривать свойства четырехполюсников при установившихся синусоидальных процессах.

Исследование периодических несинусоидальных процессов в четырехполюсниках может быть сведено с помощью разложения в дискретный ряд Фурье к рассмотрению синусоидальных процессов для отдельных гармонических составляющих.

Исследование переходных процессов в четырехполюсниках при нулевых начальных условиях также сводится с помощью интеграла Фурье к рассмотрению синусоидальных процессов. Исследование переходных процессов с помощью операторного метода формально аналогично исследованию при синусоидальных процессах с заменой оператора p на величину $j\omega$. Все сказанное дает основание ограничиться рассмотрением свойств четырехполюсника с помощью комплексного метода.

Установим зависимости, связывающие между собой входные и выходные напряжения и токи: $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{I}_1, \dot{I}_2$ (рис. 13.2).

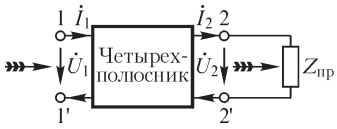


Рис. 13.2

Положительные направления напряжений и токов выберем, как показано на рис. 13.2. При этом положительное направление потока энергии на входных зажимах *1*, *1'* будет к четырехполюснику, а на выходных зажимах *2*, *2'* — от четырехполюсника, что показано стрелками с хвостовым оперением. Такой выбор положительных направлений целесообразен, когда четырехполюсник рассматривается как передаточное устройство.

Пусть реальная схема четырехполюсника содержит n независимых контуров. В качестве первого выберем контур, включающий в себя источник энергии на входных зажимах *1*, *1'*. В качестве второго выберем контур, включающий в себя приемник, присоединенный к выходным зажимам *2*, *2'*. Не интересуясь падением напряжения в источнике энергии, будем рассматривать напряжение $\dot{U}_1$ на входных зажимах четырехполюсника как вызывающее токи в цепи.

Составим уравнения по методу контурных токов. При этом все собственные и общие сопротивления внутри четырехполюсника будем отмечать дополнительно штрихом (′), так как далее буквами Z_{11}, Z_{22}, Z_{12} и Z_{21} без штрихов будут обозначены параметры четырехполюсника. Заметим, кроме того, что собственное сопротивление второго контура является суммой $Z'_{22} + Z_{пр}$, где Z'_{22} — часть этого сопротивления, содержащаяся внутри четырехполюсника, а $Z_{пр}$ — сопротивление приемника, расположенного вне четырехполюсника. Имеем уравнения:

$$Z'_{11}\dot{I}_1 + Z'_{12}\dot{I}_2 + Z'_{13}\dot{I}_3 + \ldots + Z'_{1n}\dot{I}_n = \dot{U}_1;$$
$$Z'_{21}\dot{I}_1 + (Z'_{22} + Z_{пр})\dot{I}_2 + Z'_{23}\dot{I}_3 + \ldots + Z'_{2n}\dot{I}_n = 0;$$
$$Z'_{31}\dot{I}_1 + Z'_{32}\dot{I}_2 + Z'_{33}\dot{I}_3 + \ldots + Z'_{3n}\dot{I}_n = 0;$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Так как $Z_{пр}\dot{I}_2 = \dot{U}_2$, где $\dot{U}_2$ — напряжение на выходных зажимах четырехполюсника, то, перенеся величину $\dot{U}_2$ в правую часть второго уравнения, приведем систему уравнений к виду

$$Z'_{11}\dot{I}_1 + Z'_{12}\dot{I}_2 + Z'_{13}\dot{I}_3 + \ldots + Z'_{1n}\dot{I}_n = \dot{U}_1;$$
$$Z'_{21}\dot{I}_1 + Z'_{22}\dot{I}_2 + Z'_{23}\dot{I}_3 + \ldots + Z'_{2n}\dot{I}_n = -\dot{U}_2;$$
$$Z'_{31}\dot{I}_1 + Z'_{32}\dot{I}_2 + Z'_{33}\dot{I}_3 + \ldots + Z'_{3n}\dot{I}_n = 0;$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Пользуясь решением этих уравнений, приведенным в § 5.11, и учитывая, что правые части всех уравнений, кроме первых двух, равны нулю, получим выражения для входного $\dot{I}_1$ и выходного $\dot{I}_2$ токов через входное $\dot{U}_1$ и выходное $\dot{U}_2$ напряжения:

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}\dot{U}_1 - \frac{\Delta_{21}}{\Delta}\dot{U}_2; \quad \dot{I}_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta}\dot{U}_1 - \frac{\Delta_{22}}{\Delta}\dot{U}_2.$$

Отношения Δ_{11}/Δ, Δ_{22}/Δ, Δ_{12}/Δ и Δ_{21}/Δ, имеющие размерность проводимости, обозначим, соответственно:

$$\frac{\Delta_{11}}{\Delta} = Y_{11}; \quad -\frac{\Delta_{22}}{\Delta} = Y_{22}; \quad \frac{\Delta_{12}}{\Delta} = Y_{21} \quad \text{и} \quad -\frac{\Delta_{21}}{\Delta} = Y_{12}.$$

Тогда уравнения четырехполюсника, записанные через Y-параметры, принимают вид

$$\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2; \quad \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2.$$

Для линейной пассивной цепи $\Delta_{12} = \Delta_{21}$, и поэтому $Y_{12} = -Y_{21}$.

Решив полученную систему уравнений относительно напряжений $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$, получим уравнения четырехполюсника, записанные через Z-параметры, имеющие размерность сопротивления:

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2; \quad \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2,$$

где

$$Z_{11} = \frac{Y_{22}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}; \quad Z_{22} = \frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}; \quad Z_{12} = \frac{-Y_{12}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}};$$

$$Z_{21} = \frac{-Y_{21}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}},$$

при этом $Z_{12} = -Z_{21}$.

Наиболее распространенной формой записи уравнений четырехполюсника является такая, при которой входные величины $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ выражаются через выходные $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$. Решая систему уравнений четырехполюсника, записанную через Z-параметры, относительно $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$, получаем

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2,$$

где

$$A = \frac{Z_{11}}{Z_{21}}; \quad B = -\frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}}; \quad C = \frac{1}{Z_{21}}; \quad D = -\frac{Z_{22}}{Z_{21}}.$$

Заметим, что A и D — безразмерные, B имеет размерность сопротивления, C — размерность проводимости.

Легко убедиться, учитывая соотношение $Z_{12} = -Z_{21}$, что между параметрами A, B, C и D четырехполюсника существует связь

$$AD - BC = 1.$$

Наличие этой связи, так же как и связи $Y_{12} = -Y_{21}$ и $Z_{12} = -Z_{21}$, показывает, что при любой форме записи уравнений четырехполюсника независимыми являются только три параметра.

В некоторых случаях оказывается целесообразным в качестве заданных и искомых величин четырехполюсника выбирать совокупности $\dot{I}_1, \dot{U}_2$ и $\dot{I}_2, \dot{U}_1$. При таком выборе уравнения четырехполюсника удобно представить через его H-параметры, называемые гибридными. Связь между величинами $\dot{I}_1, \dot{U}_2$ и $\dot{I}_2, \dot{U}_1$ можно записать в виде

$$\dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2, \quad \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2.$$

Параметр H_{11} имеет размерность сопротивления, H_{22} — проводимости, параметры H_{12}, H_{21} — безразмерные.

Решая эти уравнения относительно соответствующих токов и напряжений, можем выразить H-параметры через A, Z, Y-параметры четырехполюсника. Между H-параметрами существует связь, выражаемая соотношением $H_{21} = H_{12}$.

Если поменять местами входные и выходные зажимы четырехполюсника (см. рис. 13.2), то получим схему, изображенную на рис. 13.3. Из сопоставления рис. 13.2 и 13.3 видим, что это соответствует замене $\dot{U}_1$ на $\dot{U}_2$, $\dot{U}_2$ на $\dot{U}_1$, $\dot{I}_1$ на $-\dot{I}_2$ и $\dot{I}_2$ на $-\dot{I}_1$. Произведя такую замену в уравнениях четырехполюсника

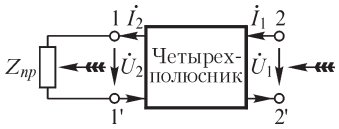


Рис. 13.3

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2,$$

соответствующих схеме рис. 13.2, и учитывая, что $AD - BC = 1$, получим уравнения четырехполюсника рис. 13.3 в виде

$$\dot{U}_1 = D\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + A\dot{I}_2.$$

Таким образом, если поменять местами вход и выход четырехполюсника, то в уравнениях меняются местами параметры A и D.

Симметричным называют четырехполюсник, свойства которого одинаковы со стороны обеих пар зажимов. Очевидно, при этом $A = D$.

Выше были получены соотношения $Y_{12} = -Y_{21}$ и $Z_{12} = -Z_{21}$ для уравнений четырехполюсника в системах Y-параметров и Z-параметров. Изменение порядка индексов у величин Y_{12} и Z_{12} приводит к изменению знака величины вследствие того, что положительное направление потока энергии принято на входных зажимах к четырехполюснику, а на выходных — от четырехполюсника (см. рис. 13.2). С учетом этого принцип взаимности не нарушается.

Если положительное направление тока, а соответственно, и потока энергии на выходных зажимах изменить на противоположное, т. е. принять положительное направление энергии на входных и выходных зажимах одинаковым по отношению к четырехполюснику (рис. 13.4), то следует изменить знак тока $\dot{I}_2$ во всех уравнениях. Чтобы уравнения четырехполюсника остались неизменными, т. е. сохранился знак «плюс» перед всеми его членами, необходимо изменить знаки следующих коэффициентов: Y_{21}, Y_{22}, Z_{12}, Z_{22}, B, и D, H_{21}, H_{22}. При этом будем иметь $Y_{12} = Y_{21}$; $Z_{12} = Z_{21}$ и $AD - BC = -1$, $H_{12} = -H_{21}$.

Рис. 13.4

Выбор положительных направлений согласно рис. 13.2 целесообразен, как было отмечено, при рассмотрении четырехполюсника как устройства для передачи энергии или сигнала от первичных (входных) ко вторичным (выходным) зажимам. Выбор положительных направлений согласно рис. 13.4 целесообразен, когда четырехполюсник рассматривается просто как часть сложной электрической цепи.

13.2. Эквивалентные схемы четырехполюсника

Так как пассивный четырехполюсник характеризуется только тремя независимыми параметрами, то простейшая эквивалентная схема четырехполюсника должна содержать три элемента. На рис. 13.5 изображена так называемая Т-образная эквивалентная схема четырехполюсника, на рис. 13.6 — П-образная эквивалентная схема.

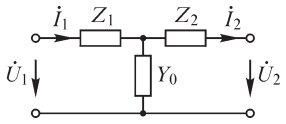


Рис. 13.5

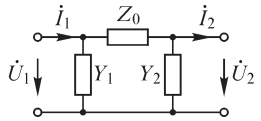


Рис. 13.6

Выразим $\dot{U}_1$ и $\dot{I}_1$ через $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$ для Т-образной эквивалентной схемы н сопоставим эти выражения с уравнениями четырехполюсника, записанными в системе A-параметров:

$$\dot{U}_1 = Z_1\dot{I}_1 + Z_2\dot{I}_2 + \dot{U}_2; \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + (Z_2\dot{I}_2 + \dot{U}_2)Y_0$$

и, следовательно,

$$\dot{U}_1 = (1 + Z_1Y_0)\dot{U}_2 + (Z_1 + Z_2 + Z_1Z_2Y_0)\dot{I}_2 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = Y_0\dot{U}_2 + (1 + Z_2Y_0)\dot{I}_2 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2.$$

Отсюда получаем связь между параметрами четырехполюсника и его эквивалентной Т-образной схемы:

$$A = 1 + Z_1Y_0; \quad B = Z_1 + Z_2 + Z_1Z_2Y_0; \quad C = Y_0; \quad D = 1 + Z_2Y_0$$

и

$$Y_0 = C; \quad Z_1 = \frac{A-1}{C}; \quad Z_2 = \frac{D-1}{C}.$$

Аналогично для П-образной эквивалентной схемы

$$\dot{U}_1 = Z_0(\dot{I}_2 + Y_2\dot{U}_2) + \dot{U}_2; \quad \dot{I}_1 = Y_1\dot{U}_1 + Y_2\dot{U}_2 + \dot{I}_2$$

и, следовательно,

$$\dot{U}_1 = (1 + Y_2Z_0)\dot{U}_2 + Z_0\dot{I}_2 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = (Y_1 + Y_2 + Y_1Y_2Z_0)\dot{U}_2 + (1 + Y_1Z_0)\dot{I}_2 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2.$$

Отсюда получаем связь между параметрами четырехполюсника и его П-образной эквивалентной схемы:

$$A = 1 + Y_2Z_0; \quad B = Z_0; \quad C = Y_1 + Y_2 + Y_1Y_2Z_0; \quad D = 1 + Y_1Z_0$$

и

$$Z_0 = B; \quad Y_1 = \frac{D-1}{B}; \quad Y_2 = \frac{A-1}{B}.$$

Для симметричного четырехполюсника $A = D$, и, соответственно, в эквивалентных схемах $Z_1 = Z_2$ и $Y_1 = Y_2$.

13.3. Экспериментальное определение параметров четырехполюсника

Для экспериментального определения параметров четырехполюсников нет необходимости производить измерения при номинальных напряжениях и токах. Достаточно выполнить измерения при холостом ходе, когда $Z_{пр} = \infty$ и $\dot{I}_2 = 0$, и при коротком замыкании на вторичных зажимах, когда $Z_{пр} = 0$ и $\dot{U}_2 = 0$. Такая возможность имеет особо большое значение для измерения параметров мощных устройств, так как мощность в опытах холостого хода и короткого замыкания значительно меньше мощности в номинальном режиме. При холостом ходе и коротком замыкании подводимая к первичным зажимам мощность идет только на покрытие потерь внутри четырехполюсника. При номинальном режиме она значительно больше, так как происходит передача энергии во вторичную цепь к приемнику.

Будем отмечать величины в первичной цепи дополнительными индексами: при холостом ходе — индексом 0, при коротком замыкании — индексом «к». Пусть во вторичной цепи при холостом ходе напряжение $\dot{U}_2$, а при коротком замыкании ток $\dot{I}_2$ будут номинальными. Имеем

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_{10} &= A\dot{U}_2; \quad \dot{I}_{10} = C\dot{U}_2; \\ \dot{U}_{1к} &= B\dot{I}_2; \quad \dot{I}_{1к} = D\dot{I}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Налагая эти режимы друг на друга, получаем

$$\dot{U}_{10} + \dot{U}_{1к} = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2 = \dot{U}_1;$$
$$\dot{I}_{10} + \dot{I}_{1к} = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2 = \dot{I}_1.$$

Отсюда видно, что для определения значений $\dot{U}_1$, $\dot{I}_1$, которые будут иметь место при номинальном режиме, достаточно произвести опыты холостого хода и короткого замыкания при номинальных $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$.

Для линейных четырехполюсников установление номинальных $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$ не обязательно, так как может быть выполнен пропорциональный пересчет.

Из выражений (*) имеем

$$Z_{1к} = \frac{\dot{U}_{1к}}{\dot{I}_{1к}} = \frac{B}{D}; \quad Y_{10} = \frac{\dot{I}_{10}}{\dot{U}_{10}} = \frac{C}{A}.$$

Для симметричного четырехполюсника измерения сопротивления короткого замыкания $Z_{1к}$ и проводимости холостого хода Y_{10} со стороны первичных зажимов достаточно, так как существуют связи $AD - BC = 1$ и $A = D$.

Для несимметричного четырехполюсника, когда $A \neq D$, необходимо еще выполнить дополнительный опыт, произведя измерение со стороны вторичных зажимов либо при холостом ходе, т. е. при разомкнутых первичных зажимах либо при коротком замыкании первичных зажимов. Так как перестановка местами входа и выхода приводит к перестановке местами параметров A и D, то получим

$$Z_{2к} = B/A; \quad Y_{20} = C/D.$$

Из уравнений четырехполюсника, записанных для Z-параметров или Y-параметров, видно, что имеют место следующие соотношения:

$$Z_{10} = \frac{1}{Y_{10}} = Z_{11}; \quad Z_{20} = \frac{1}{Y_{20}} = -Z_{22}; \quad Z_{1к} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}};$$

$$Y_{1к} = \frac{1}{Z_{1к}} = Y_{11}; \quad Y_{2к} = \frac{1}{Z_{2к}} = -Y_{22}; \quad Y_{10} = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_{22}}.$$

Все приведенные соотношения относятся к комплексным коэффициентам уравнений четырехполюсника. Произведя опыты при различных частотах, экспериментально можно получить частотные характеристики параметров четырехполюсника, которые могут быть использованы для расчета переходных процессов с помощью интеграла Фурье.

13.4. Соединения четырехполюсников и матричная запись уравнений четырехполюсника

Уравнения четырехполюсника, записанные через Y-параметры, в матричной форме имеют вид

$$\begin{Vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Vmatrix}, \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y}\dot{\mathbf{U}},$$

соответственно, через Z-параметры:

$$\begin{Vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{Vmatrix}, \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{Z}\dot{\mathbf{I}}$$

и через A-параметры:

$$\begin{Vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{Vmatrix}, \quad \text{или} \quad \begin{Vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{Vmatrix} = \mathbf{A} \begin{Vmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{Vmatrix}.$$

Матричная запись уравнений оказывается целесообразной при анализе различных соединений четырехполюсников.

Рассмотрим так называемое каскадное соединение двух четырехполюсников (рис. 13.7). Эти два четырехполюсника, взятые вместе, можно рассматривать как один эквивалентный четырехполюсник, обведенный на рис. 13.7 штриховой линией, с величинами $\dot{U}_1$, $\dot{I}_1$ на входе и $\dot{U}_2$, $\dot{I}_2$ на выходе. В данном случае $\dot{U}_1 = \dot{U}_1'$; $\dot{I}_1 = \dot{I}_1'$; $\dot{U}_2 = \dot{U}_2''$ и $\dot{I}_2 = \dot{I}_2''$. Задача заключается в определении параметров эквивалентного четырехполюсника через известные параметры первого и второго четырехполюсников.

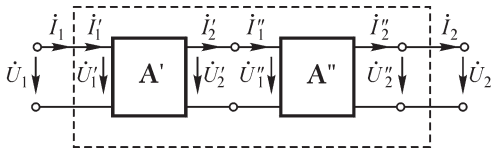


Рис. 13.7

Равенства $\dot{U}_2' = \dot{U}_1''$ и $\dot{I}_2' = \dot{I}_1''$, имеющие место на стыке двух четырехполюсников, определяют выбор целесообразной системы уравнений.

В матричной форме имеем

$$\begin{Vmatrix}\dot U'_2\\ \dot I'_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\dot U''_1\\ \dot I''_1\end{Vmatrix};\quad \begin{Vmatrix}\dot U_1\\ \dot I_1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\dot U'_1\\ \dot I'_1\end{Vmatrix};\quad \begin{Vmatrix}\dot U_2\\ \dot I_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\dot U''_2\\ \dot I''_2\end{Vmatrix}.$$

При этом лучше всего использовать запись уравнений через A-параметры:

$$\begin{Vmatrix}\dot U'_1\\ \dot I'_1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}A' & B'\\ C' & D'\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\dot U'_2\\ \dot I'_2\end{Vmatrix};\quad \begin{Vmatrix}\dot U''_1\\ \dot I''_1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}A'' & B''\\ C'' & D''\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\dot U''_2\\ \dot I''_2\end{Vmatrix}.$$

Используя эти соотношения, получим

$$\begin{Vmatrix}\dot U_1\\ \dot I_1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\dot U'_1\\ \dot I'_1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}A' & B'\\ C' & D'\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\dot U'_2\\ \dot I'_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}A' & B'\\ C' & D'\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\dot U''_1\\ \dot I''_1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}A' & B'\\ C' & D'\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}A'' & B''\\ C'' & D''\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\dot U''_2\\ \dot I''_2\end{Vmatrix}=\|A\|\begin{Vmatrix}\dot U_2\\ \dot I_2\end{Vmatrix}.$$

Таким образом, матрица A-параметров двух каскадно соединенных четырехполюсников равна произведению матриц A-параметров отдельных четырехполюсников. Произведя эту операцию, получаем

$$\|A\|=\|A'\|\,\|A''\|=\begin{Vmatrix}A'A''+B'C'' & A'B''+B'D''\\ C'A''+D'C'' & C'B''+D'D''\end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим в качестве другого примера так называемое п а р а л л е л ь н о е с о е д и н е н и е двух четырехполюсников (рис. 13.8).
При таком соединении имеют место равенства $\dot U_1=\dot U'_1=\dot U''_1$ и $\dot U_2=\dot U'_2=\dot U''_2$ или в матричной форме

$$\begin{Vmatrix}\dot U_1\\ \dot U_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\dot U'_1\\ \dot U'_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\dot U''_1\\ \dot U''_2\end{Vmatrix}.$$

Поэтому в качестве подходящей системы уравнений следует выбрать ту, в которой токи выражаются через напряжения, т. е. систему Y-параметров. Имеем

$$\begin{Vmatrix}\dot I'_1\\ \dot I'_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}Y'_{11} & Y'_{12}\\ Y'_{21} & Y'_{22}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\dot U'_1\\ \dot U'_2\end{Vmatrix}\quad\text{и}\quad \begin{Vmatrix}\dot I''_1\\ \dot I''_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}Y''_{11} & Y''_{12}\\ Y''_{21} & Y''_{22}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\dot U''_1\\ \dot U''_2\end{Vmatrix}.$$

Так как $\dot I_1=\dot I'_1+\dot I''_1$; $\dot I_2=\dot I'_2+\dot I''_2$, то

$$\begin{Vmatrix}\dot I_1\\ \dot I_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\dot I'_1\\ \dot I'_2\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}\dot I''_1\\ \dot I''_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}Y'_{11} & Y'_{12}\\ Y'_{21} & Y'_{22}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\dot U'_1\\ \dot U'_2\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}Y''_{11} & Y''_{12}\\ Y''_{21} & Y''_{22}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\dot U''_1\\ \dot U''_2\end{Vmatrix}.$$

Имея в виду равенство матриц напряжений, получаем

$$\begin{Vmatrix}\dot I_1\\ \dot I_2\end{Vmatrix}=\left[\begin{Vmatrix}Y'_{11} & Y'_{12}\\ Y'_{21} & Y'_{22}\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}Y''_{11} & Y''_{12}\\ Y''_{21} & Y''_{22}\end{Vmatrix}\right]\begin{Vmatrix}\dot U_1\\ \dot U_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}Y'_{11}+Y''_{11} & Y'_{12}+Y''_{12}\\ Y'_{21}+Y''_{22} & Y'_{22}+Y''_{22}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\dot U_1\\ \dot U_2\end{Vmatrix}.$$

Следовательно, при параллельном соединении четырехполюсников матрица Y-параметров есть сумма матриц Y-параметров отдельных четырехполюсников.

В заключение рассмотрим так называемое п о с л е д о в а т е л ь н о е с о е д и н е н и е двух четырехполюсников (рис. 13.9). При таком соединении имеем

$$\dot U_1=\dot U'_1+\dot U''_1;\quad \dot U_2=\dot U'_2+\dot U''_2\quad\text{и}\quad \dot I_1=\dot I'_1=\dot I''_1;\quad \dot I_2=\dot I'_2=\dot I''_2.$$

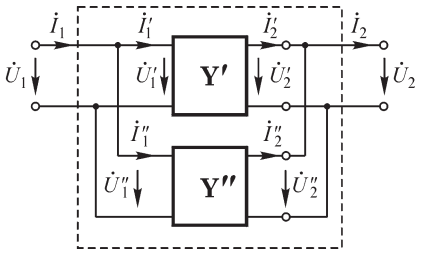


Рис. 13.8

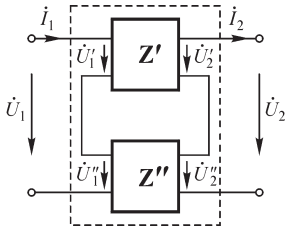


Рис. 13.9

При этом целесообразно воспользоваться уравнениями четырехполюсника, записанными через Z-параметры:

$$\begin{Vmatrix} \dot{U}_1' \\ \dot{U}_2' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Z_{11}' & Z_{12}' \\ Z_{21}' & Z_{22}' \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \dot{I}_1' \\ \dot{I}_2' \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} \dot{U}_1'' \\ \dot{U}_2'' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Z_{11}'' & Z_{12}'' \\ Z_{21}'' & Z_{22}'' \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \dot{I}_1'' \\ \dot{I}_2'' \end{Vmatrix}.$$

Получаем

$$\begin{Vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dot{U}_1' \\ \dot{U}_2' \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \dot{U}_1'' \\ \dot{U}_2'' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Z_{11}' & Z_{12}' \\ Z_{21}' & Z_{22}' \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \dot{I}_1' \\ \dot{I}_2' \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} Z_{11}'' & Z_{12}'' \\ Z_{21}'' & Z_{22}'' \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \dot{I}_1'' \\ \dot{I}_2'' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Z_{11}' + Z_{11}'' & Z_{12}' + Z_{12}'' \\ Z_{21}' + Z_{21}'' & Z_{22}' + Z_{22}'' \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, при последовательном соединении двух четырехполюсников матрица Z-параметров эквивалентного четырехполюсника равна сумме матриц Z-параметров отдельных четырехполюсников.

13.5. Передаточные функции четырехполюсников

Часто возникает задача нахождения тока $i_2(t)$ или напряжения $u_2(t)$ в некотором (втором) участке сложной цепи, возникающих под воздействием заданного тока $i_1(t)$ или напряжения $u_1(t)$ в другом (первом) участке цепи. Обозначив $i_1(t)$ или $u_1(t)$ через $x_1(t)$, а $i_2(t)$ или $u_2(t)$ через $x_2(t)$, введем понятие передаточной функции $K(p)$ от первого ко второму участку цепи из соотношения

$$K(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)},$$

где $X_1(p)$ и $X_2(p)$ — операторные изображения $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Выделяя эти два участка из общей цепи и имея в виду, что воздействие возмущения $x_1(t)$ от первого участка ко второму передается через всю остальную пассивную цепь, можем рассматривать эту остальную цепь как четырехполюсник, и тогда передаточная функция определится параметрами этого четырехполюсника. При этом $x_1(t)$ окажется функцией, определяющей возмущение на входе четырехполюсника (на стороне зажимов *1 – 1′*), а $x_2(t)$ – функцией, определяемой реакцией на это возмущение на выходе четырехполюсника (на стороне зажимов *2 – 2′*).

Если рассматриваемые функции удовлетворяют требованиям, при которых возможно преобразование Фурье, то, заменяя p на $j\omega$, получим

$$K(j\omega) = K(\omega)\, e^{j\alpha(\omega)} = \frac{X_2(j\omega)}{X_1(j\omega)}.$$

Если функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ обе являются токами или обе являются напряжениями, то передаточная функция представляет собой безразмерную величину. Такой случай имеем, например, если $x_1(t) = u_1(t)$ и $x_2(t) = u_2(t)$ суть напряжения на входе и на выходе четырехполюсника.

Если $x_1(t) = u_1(t)$, а $x_2(t) = i_2(t)$, то $K(p)$ представляет собой *обобщенную* (операторную) *взаимную проводимость* между рассматриваемыми участками цепи, а $K(j\omega)$ — ее частотную характеристику. Наоборот, если $x_1(t) = i_1(t)$, а $x_2(t) = u_2(t)$, то $K(p)$ — *обобщенное* (операторное) *взаимное сопротивление* и $K(j\omega)$ — его частотная характеристика.

Рассмотрим передаточную функцию четырехполюсника в случае, когда на входе задано напряжение $\dot{U}_1$, а на выходе включен приемник с сопротивлением $Z_{\text{пр}}$. Имеем

$$I_1(p) = \frac{U_1(p)}{Z_{1\text{вх}}(p)},$$

где $Z_{1\text{вх}}(p)$ — операторное сопротивление на входе четырехполюсника, зависящее от параметров четырехполюсника и сопротивления приемника.

Напишем уравнение четырехполюсника через Z-параметры в операторной форме:

$$U_1(p) = Z_{11}(p)I_1(p) + Z_{12}(p)I_2(p);$$
$$U_2(p) = Z_{21}(p)I_1(p) + Z_{22}(p)I_2(p).$$

Подставляя в эти уравнения выражение для тока $I_2(p) = \dfrac{U_2(p)}{Z_{\text{пр}}(p)}$ и исключая из них $I_1(p)$, получим

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_{21}(p)Z_{\text{пр}}(p)}{Z_{11}(p)Z_{\text{пр}}(p) - Z_{11}(p)Z_{22}(p) + Z_{12}(p)Z_{21}(p)}.$$

В частном случае, когда сопротивление приемника равно бесконечности (холостой ход),

$$K(p) = \frac{Z_{21}(p)}{Z_{11}(p)}.$$

Такое же значение для $K(p)$ можно принять в важных практических случаях, когда сопротивление приемника, приключаемого к четырехполюснику, очень велико, например, если выходные зажимы четырехполюсника приключаются к сетке и катоду электронной лампы.

В случае если на входе четырехполюсника задан ток $I_1(p)$, а не напряжение, то из второго уравнения четырехполюсника $U_2(p) = Z_{21}(p)\, I_1(p) + Z_{22}(p)\, I_2(p)$ и из соотношения $I_2(p) = U_2(p)/Z_{\text{пр}}(p)$ получаем

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{I_1(p)} = \frac{Z_{21}(p)Z_{\text{пр}}(p)}{Z_{\text{пр}}(p) - Z_{22}(p)},$$

и при $Z_{\text{пр}} = \infty$ (холостой ход)

$$K(p) = Z_{21}(p).$$

Рассмотрим вопрос о расположении в комплексной плоскости полюсов и нулей передаточной функции, т. е. значений комплексной величины p (комплексной частоты), при которых передаточная функция обращается в ∞ или в 0. Для определенности будем рассматривать передаточную функцию как отношение напряжений на выходе и входе четырехполюсника при холостом ходе, т. е. величину $K(p) = Z_{21}(p)/Z_{11}(p)$.

Рассуждения легче вести в отношении свойств входных сопротивлений Z_{10} и Z_{20} при холостом ходе, определенных со стороны первичных и вторичных зажимов, и сопротивления $Z_{1к}$ при коротком замыкании во вторичной цепи, как имеющих определенный физический смысл. Поэтому выразим величины $Z_{21}(p)$ и $Z_{11}(p)$ через эти входные сопротивления, представленные в операторной форме.

В § 13.3 были приведены соотношения

$$Z_{10}(p) = Z_{11}(p); \quad Z_{20}(p) = -Z_{22}(p); \quad Z_{1к}(p) = Z_{11}(p) - \frac{Z_{12}(p)Z_{21}(p)}{Z_{22}(p)}.$$

Отсюда получаем

$$Z_{21}(p) = \sqrt{Z_{20}(p)[Z_{10}(p) - Z_{1к}(p)]} \quad \text{и} \quad Z_{11}(p) = Z_{10}(p).$$

Величины $Z_{10}(p)$, $Z_{20}(p)$, $Z_{1к}(p)$ имеют и полюсы, и нули только в левой полуплоскости комплексной переменной p. Их нули находятся только слева от оси мнимых. Это вытекает из следующих соображений: закон Ома в операторной форме, например при подаче напряжения на первичные зажимы при холостом ходе, имеет вид

$$I_{10}(p) = \frac{U_{10}(p)}{Z_{10}(p)} = Y_{10}(p)U_{10}(p).$$

Если $u_{10}(t)$ есть импульс напряжения с площадью A, то его операторное изображение $U_{10}(p) = A$. В этом случае полюсы $Y_{10}(p)$, т. е. нули $Z_{10}(p)$, являются одновременно и полюсами $I_{10}(p)$.

В § 10.6 было показано, что полюсы операторного изображения свободной составляющей тока для пассивных электрических цепей могут лежать только в левой полуплоскости, так как вещественная часть корней характеристического уравнения должна быть отрицательной, ибо процесс должен быть затухающим. В данном случае после воздействия импульса весь ток и будет только свободным. Из этих рассуждений вытекает, что *все нули величины $Z_{10}(p)$, а следовательно, и полюсы $Y_{10}(p)$ лежат в левой полуплоскости*. То же самое относится к величинам $Z_{20}(p)$ и $Z_{1к}(p)$.

Рассматривая закон Ома в форме

$$U_{10}(p) = \frac{I_{10}(p)}{Y_{10}(p)} = Z_{10}(p)I_{10}(p)$$

и проводя аналогичные рассуждения по отношению к импульсу тока, приходим к выводу, что *все полюсы $Z_{10}(p)$ и, соответственно, нули $Y_{10}(p)$ также лежат в левой полуплоскости*.

Рассмотрим положение полюсов передаточной функции $K(p)$. Они определяются полюсами числителя $Z_{21}(p) = \sqrt{Z_{20}(p)[Z_{10}(p) - Z_{1к}(p)]}$ и нулями знаменателя $Z_{11}(p) = Z_{10}(p)$. И те, и другие лежат только в левой полуплоскости, что следует из только что приведенных рассуждений о расположении полюсов и нулей входных сопротивлений. Таким образом, приходим к важному положению, что *все полюсы передаточной функции пассивного четырехполюсника лежат в левой полуплоскости*.

Рассмотрим положение нулей передаточной функции $K(p)$. Они определяются нулями $Z_{21}(p)$ и полюсами знаменателя. Последние лежат только в левой полуплоскости, однако в отношении нулей $Z_{21}(p)$ такое заключение сделать нельзя. В выражение под корнем входит разность $[Z_{10}(p) - Z_{1к}(p)]$, которая может содержать нули как в левой, так и в правой полуплоскости, в чем убедимся сейчас на примерах. В таком случае *нули передаточной функции пассивного четырехполюсника могут лежать и в левой, и в правой полуплоскости*.

Рассмотрим схему цепи, изображенную на рис. 13.10, называемую иногда л е с т н и ч н о й. Нуль передаточной функции, т. е. нулевое значение $U_2(p)$ при конечном $U_1(p)$, как видно из схемы, может быть либо когда величины $Z_2(p)$, или $Z_4(p)$, или $Z_6(p)$ равны нулю, т. е. имеют нуль, либо когда величины $Z_1(p)$, или $Z_3(p)$, или $Z_5(p)$, или $Z_7(p)$ равны бесконечности, т. е. имеют полюс. Но и нули, и полюсы всех этих величин лежат в левой полуплоскости, а следовательно, и все нули передаточной функции цепи также лежат в левой полуплоскости.

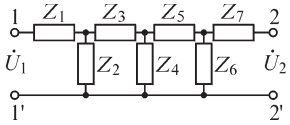


Рис. 13.10

Рассмотрим теперь схему цепи, изображенную на рис. 13.11, иногда называемую с к р е щ е н н о й или м о с т о в о й.

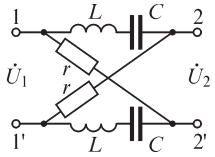


Рис. 13.11

Как нетрудно заметить, при холостом ходе эта цепь состоит из двух параллельно включенных ветвей r, L, C, а следовательно, $Z_{10}(p) = \frac{1}{2}\left(r + pL + \frac{1}{pC}\right)$.

Вследствие симметрии $Z_{20}(p) = Z_{10}(p)$. При коротком замыкании зажимов *2–2* оказываются последовательно включенными два одинаковых контура, каждый из которых состоит из параллельно включенных ветви (L, C) и ветви r, т. е.

$$Z_{1к} = 2\frac{r[pL + 1/(pC)]}{r + pL + 1/(pC)}.$$

Используя эти выражения, получим

$$Z_{11}(p) = Z_{10}(p) = \frac{1}{2}\left(r + pL + \frac{1}{pC}\right);$$

$$Z_{21}(p) = \sqrt{Z_{20}(p)[Z_{10}(p) - Z_{1к}(p)]} = \frac{1}{2}\left(r - pL - \frac{1}{pC}\right)$$

и, следовательно,

$$K(p) = \frac{Z_{21}(p)}{Z_{11}(p)} = \frac{r - pL - 1/(pC)}{r + pL + 1/(pC)} = -\frac{p^2 - 2\delta p + \omega_0^2}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2},$$

где $\delta = r/(2L)$, $\omega_0^2 = 1/(LC)$.

Полюсы $K(p)$ расположены в точках $p_{1,3} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$, т. е. оба в левой полуплоскости.

Нули $K(p)$ расположены в точках $p_{2,4} = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ в правой полуплоскости.

Четырехполюсники, все нули передаточной функции которых расположены в левой полуплоскости, называются м и н и м а л ь н о - ф а з о в ы м и. Примером их является цепь, схема которой приведена на рис. 13.10.

Четырехполюсники, имеющие нули также и в правой полуплоскости, называются н е м и н и м а л ь н о - ф а з о в ы м и. Примером их является цепь, изображенная на рис. 13.11. Эта цепь обладает интересными и важными свойствами. Пусть $\omega_0 > \delta$, т. е. $p_{1,3} = -\delta \pm j\omega'$ и $p_{2,4} = \delta \pm j\omega'$, где $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. Тогда

$$K(p) = -\frac{(p - p_2)(p - p_4)}{(p - p_1)(p - p_3)}.$$

Для перехода от этого выражения к частотной характеристике передаточной функции следует принять $p = j\omega$. Получаем

$$K(j\omega) = -\frac{(j\omega - p_2)(j\omega - p_4)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_3)}.$$

Комплексным величинам, стоящим в скобках в числителе и знаменателе, соответствуют векторы, начинающиеся в точках p_1, p_2, p_3, p_4 и кончающиеся в переменной точке $p = j\omega$ на оси мнимых (рис. 13.12).

Из рисунка легко видеть, что модуль $K(\omega) = 1$ и остается неизменным при изменении частоты от нуля до бесконечности. Аргумент $K(j\omega)$ равен сумме аргументов множителей числителя, за вычетом суммы аргументов множителей знаменателя, т. е.

$$(\alpha_2 + \alpha_4) - (\alpha_1 + \alpha_3) = 2\pi - 2(\alpha_1 + \alpha_3).$$

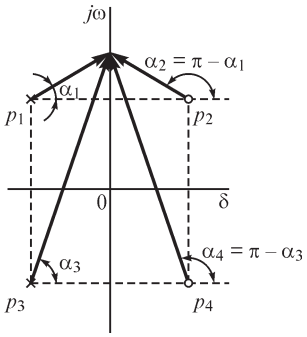


Рис. 13.12

При изменении частоты от 0 до ∞ аргумент передаточной функции изменяется от 2π до 0, так как $(\alpha_1 + \alpha_3)$ изменяется от 0 до π.

Независимость модуля $K(j\omega)$ от частоты и является ценным свойством этой цепи. Подключая каскадно эту цепь к некоторому четырехполюснику, получаем возможность изменять фазочастотную характеристику последнего, не изменяя его амплитудно-частотной характеристики.

Из сказанного видно, что для цепи, изображенной на рис. 13.11, отсутствует зависимость между фазочастотной и амплитудно-частотной характеристиками передаточной функции, так как фаза изменяется, а амплитуда остается неизменной при изменении частоты. Отсутствие такой связи характерно для немини-

мально-фазовых четырехполюсников. Такая связь существует только для минимально-фазовых четырехполюсников, что облегчает, как было отмечено в § 11.4, снятие частотных характеристик экспериментальным путем.

13.6. Дифференцирующие и интегрирующие цепи

Весьма важной является возможность создания четырехполюсников, напряжение на выходе которых представляет собой производную или интеграл напряжения на входе. Такие четырехполюсники, получившие наименование дифференцирующих и интегрирующих цепей, находят широкое применение в измерительной технике, в системах автоматики и в устройствах для интегрирования систем дифференциальных уравнений.

Рассмотрим простейшие дифференцирующие и интегрирующие цепи. Попутно составим для них выражения передаточных функций в качестве конкретных примеров к материалу предыдущего параграфа.

Простейшие дифференцирующие цепи изображены на рис. 13.13. Будем предполагать, что сопротивление приемника на выходе цепи столь велико, что ток i_2 очень мал по сравнению с током i_1, т. е. будем полагать $i_2 = 0$.

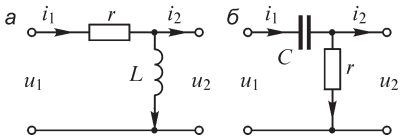


Рис. 13.13

Для цепи (рис. 13.13, *а*) в этом случае при нулевых начальных условиях имеем

$$U_2(p) = pLI_1(p) = \frac{pL}{r + pL}U_1(p).$$

Следовательно, передаточная функция рассматриваемого четырехполюсника, определяемая как отношение изображений выходного и входного напряжений, имеет вид

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{pL}{r + pL}.$$

Если L/r достаточно мало по сравнению с интервалом времени, в течение которого $u_1(t)$ заметно изменяется, то приближенно можно принять

$$I_1(p) \approx \frac{U_1(p)}{r}; \quad U_2(p) \approx \frac{L}{r}pU_1(p); \quad K(p) \approx \frac{L}{r}p.$$

Но при нулевых начальных условиях $pU_1(p) \Rightarrow \frac{d}{dt}u_1(t)$. Следовательно,

$$u_2(t) \approx \frac{L}{r}\frac{d}{dt}u_1(t).$$

Таким образом, рассмотренная цепь осуществляет дифференцирование входного напряжения.

Для цепи (рис. 13.13, *б)* при нулевых начальных условиях аналогично имеем

$$U_2(p) = rI_1(p) = \frac{r}{r + 1/(pC)}U_1(p); \quad K(p) = \frac{r}{r + 1/(pC)}.$$

Если rC достаточно мало по сравнению с интервалом времени, в течение которого $u_1(t)$ заметно изменяется, то приближенно можно принять

$$I_1(p) \approx pCU_1(p); \quad U_2(p) \approx rCpU_1(p); \quad K(p) \approx rCp.$$

Следовательно,

$$u_2(t) \approx rC\frac{d}{dt}u_1(t),$$

т. е. такая цепь также осуществляет дифференцирование входного напряжения.

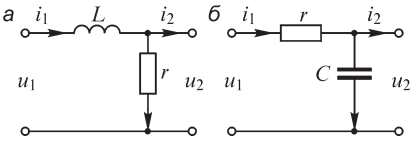


Рис. 13.14

Простейшие интегрирующие цепи изображены на рис. 13.14. Будем также предполагать, что ток i_2 столь мал по сравнению с i_1, что можно принять $i_2 = 0$. Кроме того, начальные условия будем полагать нулевыми.

Для цепи (рис. 13.14, *а*) имеем

$$U_2(p) = \frac{r}{r+pL}U_1(p); \quad K(p) = \frac{r}{r+pL},$$

а для цепи (рис. 13.14, *б*) — соответственно,

$$U_2(p) = \frac{1/(pC)}{r+1/(pC)}U_1(p); \quad K(p) = \frac{1/(pC)}{r+1/(pC)}.$$

Если для цепи (рис. 13.14, *а*) величина L/r и, соответственно, для цепи (рис. 13.14, *б*) величина rC превышают интервалы изменения напряжения $u_1(t)$ между его максимальными и минимальными значениями, в течение которых $u_1(t)$ изменяется монотонно или остается постоянным, то приближенно можно принять для цепи (рис. 13.14, *а*)

$$U_2(p) \approx \frac{r}{L}\frac{1}{p}U_1(p); \quad K(p) \approx \frac{r}{pL}$$

и для цепи (рис. 13.14, *б*)

$$U_2(p) \approx \frac{1}{rC}\frac{1}{p}U_1(p); \quad K(p) \approx \frac{1}{prC}.$$

Но $\frac{1}{p}U_1(p) \Rightarrow \int_0^t u_1(t)\,dt$. Следовательно, для этих двух цепей имеем, соответственно,

$$u_2(t) \approx \frac{r}{L}\int_0^t u_1(t)\,dt \quad \text{и} \quad u_2(t) \approx \frac{1}{rC}\int_0^t u_1(t)\,dt.$$

Таким образом, рассмотренные цепи осуществляют интегрирование входного напряжения.

Нетрудно видеть, что указанные выше условия, наложенные на соотношения между параметрами простейших дифференцирующих и интегрирующих цепей, приводят к тому, что напряжения u_2 на выходе получаются значительно меньше напряжений u_1 на входе. Этот недостаток можно устранить, увеличивая напряжение u_2 с помощью усилителя, включаемого между выходом цепи и приемни-

ком, или применяя более сложные дифференцирующие и интегрирующие цепи, содержащие усилители и обратные связи.

Из изложенного следует, что осуществление дифференцирующих и интегрирующих цепей возможно путем комбинирования участка с сопротивлением r как с катушкой индуктивности L, так и с конденсатором емкости C. На практике предпочтение отдается последнему варианту, так как конденсаторы легче выполнить с малыми потерями. В катушках же отрицательное влияние оказывает не только активное сопротивление обмотки, но и междувитковая емкость.

13.7. Обратные связи

Пусть некоторое устройство, назовем его основным, представляющее собой четырехполюсник (рис. 13.15), имеет на выходных зажимах напряжение $u_2(t)$ при напряжении на входных зажимах $u_1'(t)$. Его передаточная функция

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1'(p)}.$$

Подведем напряжение u_2 на вход так называемого устройства обратной связи, которое, вообще говоря, является также некоторым четырехполюсником. Напряжение на выходе устройства обратной связи пусть будет $u_1''(t)$ (рис. 13.15). Соответственно, это устройство характеризуется передаточной функцией

$$W(p) = \frac{U_1''(p)}{U_2(p)}.$$

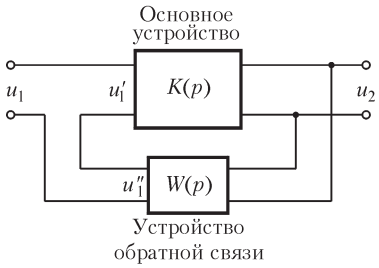


Рис. 13.15

Введем напряжение u_1'' первичную цепь так, чтобы оно добавлялось к напряжению u_1 на входе всей системы. Тогда напряжение u_1' на входе основного устройства будет равно

$$u_1' = u_1 + u_1''.$$

Записывая это уравнение для изображений, имеем

$$U_1'(p) = U_1(p) + U_1''(p)$$

или

$$\frac{U_2(p)}{K(p)} = U_1(p) + W(p)U_2(p),$$

откуда находим

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{K(p)}{1 - W(p)K(p)} = K'(p).$$

Величина $K'(p)$ является передаточной функцией всей рассматриваемой системы с учетом действия обратной связи, т. е. с учетом обратного дополнительного воздействия выходного напряжения u_2 через устройство обратной связи на входные зажимы основного устройства.

Пусть, например, основное устройство представляет собой усилитель с линейной характеристикой, не изменяющий фазу напряжения и имеющий коэффициент усиления k. Он является активным четырехполюсником, так как содержит источник энергии. Напряжения u_2 и u_1' связаны в этом случае простым соотношением $u_2 = ku_1'$ и соответственно $K(p) = k$, причем k — вещественное число.

Пусть устройство обратной связи является простым делителем напряжения из активных сопротивлений (рис. 13.16). Тогда $u_1'' = \beta u_2$ и, соответственно, $W(p) = \beta$, где β — вещественное число.

В этом случае имеем

$$K'(p) = \frac{k}{1-\beta k} = k'.$$

Величина k представляет собой коэффициент усиления всей системы с учетом воздействия обратной связи.

Если $\beta > 0$, то $k' > k$. В этом случае напряжение обратной связи u_1'' имеет ту же фазу, что и входное напряжение u_1. Обратная связь увеличивает напряжение u_1' на входе усилителя, что и приводит к увеличению коэффициента усиления k' всей системы по сравнению с коэффициентом усиления k самого усилителя.

Такая обратная связь называется п о л о ж и т е л ь н о й.

Если $\beta < 0$, что легко осуществить перекрещиванием проводов, идущих к делителю или от делителя напряжения, то $k' < k$, т. е. происходит уменьшение коэффициента усиления, так как при этом u_1'' и u_1 сдвинуты по фазе на угол π. Такая обратная связь называется о т р и ц а т е л ь н о й.

В общем случае, когда основное устройство и устройство обратной связи представляют собой более сложные устройства, имеющие сложные выражения для их передаточных функций $K(p)$ и $W(p)$, все же можно говорить о положительной обратной связи, когда она способствует увеличению выходного напряжения, и об отрицательной обратной связи, когда она способствует снижению этого напряжения.

При положительной обратной связи возможно нарастание собственных колебаний системы, раз возникших вследствие какого-либо первоначального толчка. Наоборот, отрицательная обратная связь способствует подавлению таких колебаний.

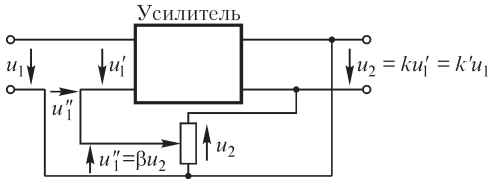


Рис. 13.16

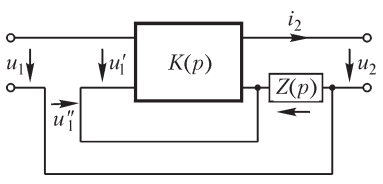


Рис. 13.17

Обратная связь, изображенная на рис. 13.16, является так называемой обратной связью по напряжению, так как дополнительное напряжение u_1'' в первичной цепи определяется выходным напряжением u_2. На рис. 13.17 показана так назы-

ваемая обратная связь по току, при которой напряжение u_1'' определяется падением напряжения на участке с небольшим сопротивлением, включенным последовательно во вторичную цепь, т. е. определяется током i_2 во вторичной цепи, проходящим по этому участку. Обозначим операторное сопротивление этого участка через $Z(p)$.

Определяя для этого случая передаточную функцию основного устройства как отношение изображений выходного тока и входного напряжения:

$$K(p) = \frac{I_2(p)}{U_1'(p)},$$

будем иметь

$$U_1'(p) = U_1(p) + U_1''(p) = U_1(p) + Z(p)I_2(p)$$

или

$$\frac{I_2(p)}{K(p)} = U_1(p) + Z(p)I_2(p),$$

т. е.

$$\frac{I_2(p)}{U_1(p)} = \frac{K(p)}{1 - Z(p)K(p)} = K'(p).$$

Величина $K'(p)$ представляет собой передаточную функцию всей системы с учетом воздействия обратной связи. Заметим, что в этом случае $K(p)$ и $K'(p)$ имеют размерность проводимости, тогда как в случае, относящемся к рис. 13.16, они были безразмерны.

13.8. Активный четырехполюсник

Активным называют четырехполюсник, содержащий внутри себя источники электрической энергии, причем действие этих источников не компенсируется взаимно внутри четырехполюсника. Это значит, что при отключении четырехполюсника от внешних цепей на одной или на обеих парах его разомкнутых зажимов возникает напряжение, обусловленное наличием источников энергии внутри четырехполюсника. Пусть ЭДС источников не зависят от токов в них. Пользуясь принципом наложения, нетрудно привести такой активный четырехполюсник с любым числом внутренних источников энергии к пассивному четырехполюснику с двумя дополнительными источниками ЭДС во входной и в выходной цепях.

Пусть при отключении активного четырехполюсника, содержащего внутри себя источники ЭДС $\dot{E}_k$ ($k = 1, 2, ..., n$), на его зажимах появляются напряжения $\dot{U}_{01}$ и $\dot{U}_{02}$ (рис. 13.18, *а*). При этом $I_1 = 0$ и $I_2 = 0$. Тот же результат получим, если замкнем накоротко все источники ЭДС во *внешних* цепях, сохранив сопротивления этих цепей и этих источников и введя дополнительно источники ЭДС $\dot{E}_{01}' = -\dot{U}_{01}$ и $\dot{E}_{02}' = -\dot{U}_{02}$, как показано на рис. 13.18, *б*. Внешние цепи с их источниками на рис. 13.18, *б* показаны штриховыми прямоугольниками.

Замкнем теперь накоротко все источники ЭДС *внутри* четырехполюсника, сохранив их внутренние сопротивления, т. е. примем $\dot{E}_k = 0$. Пусть теперь дейст-

13.9. Чувствительность характеристик электрических цепей к изменению параметров элементов

При создании новых приборов и устройств на стадиях их расчета и наладки имеет важное значение выделение тех элементов, изменение параметров которых оказывает наибольшее влияние на входные и передаточные функции устройств. Выбор таких элементов может оказаться существенным при доводке работоспособности прибора к требуемому уровню путем подбора значений параметров элементов. Внешние факторы, например температура, влажность, давление, могут привести к таким отклонениям параметров элементов от номинальных, при которых режим работы электрической цепи настолько изменится, что цепь уже не сможет удовлетворять предъявляемым к ней требованиям. Выделение таких элементов существенно при подборе устройств, для которых свойственно минимальное влияние внешних воздействий на их параметры.

К еще более значительным изменениям в режимах работы устройств ведут нежелательные изменения параметров активных цепей, когда небольшие изменения коэффициентов управления зависимых источников под действием различных, иногда случайных, обстоятельств могут привести к потере работоспособности цепи. В этой связи возникает проблема количественной оценки чувствительности определенных свойств системы к изменению параметров элементов. Такие важные свойства электрических цепей, как управляемость и надежность, в значительной степени определяются чувствительностью характеристик электрических цепей к изменению параметров элементов.

Пусть f — некоторая характеристика электрической цепи, например, входная или передаточная функция, добротность или частота резонанса, а x — параметр элемента электрической цепи — сопротивление, индуктивность, емкость либо коэффициент усиления. Тогда под чувствительностью характеристики электрической цепи f к изменению параметра x понимают функцию $S_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Наряду с чувствительностью S_x используется также понятие относительной, или нормированной чувствительности, определяемой выражением

$$S_x^f = \frac{x}{f} S_x = \frac{x}{f}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(\ln f)}{\partial \ln x}.$$

В общем случае величина f зависит от нескольких параметров. Суммарное изменение df функции f при одновременном изменении N параметров может быть вычислено через чувствительности к каждому из параметров по формуле

$$df = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x} dx_i = \sum_{i=1}^{N} S_{x_i} dx_i.$$

При этом результирующую чувствительность можно определить через относительные чувствительности элементов при помощи выражения

$$\frac{df}{f} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{x_i}{f} \right) \frac{dx_i}{x_i} = \sum_{i=1}^{N} S_{x_i}^f \frac{dx_i}{x_i},$$

т. е. выразить ее через нормированные чувствительности системы.

Рассмотрим пример определения чувствительности передаточной функции пассивного двухполюсника. Выделим ветвь пассивного двухполюсника с комплексным сопротивлением элемента равным Z (рис. 13.19). Найдем зависимость входного сопротивления двухполюсника от величины Z. Будем рассматривать цепь с выделенным сопротивлением, как четырехполюсник, описываемый системой уравнений в Z-параметрах

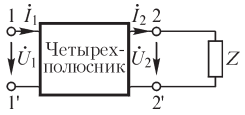


Рис. 13.19

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2,$$
$$\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2.$$

Поскольку $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z$, то ток $\dot{I}_2$ можно определить через $\dot{I}_1$ из второго уравнения. Если подставить его значение в первое уравнение и выполнить ряд простых преобразований можно получить

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{Z_{11}Z_{12} - Z_{12}Z_{21} + Z_{11}Z}{Z_{22}Z} = \frac{a(j\omega) + Zb(j\omega)}{c(j\omega) + Zd(j\omega)},$$

где $a(j\omega) = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$; $b(j\omega) = Z_{11}$; $c(j\omega) = Z_{22}$; $d(j\omega) = 1$.

Таким образом, чувствительность входного сопротивления двухполюсника к изменению сопротивления Z его элемента можно рассчитать, пользуясь выражением

$$S_Z^{Z_{\text{вх}}} = \frac{Z}{Z_{\text{вх}}}\frac{\partial Z_{\text{вх}}}{\partial Z} = \frac{Z(bc - a)}{(a + bz)(c + z)} = \frac{ZZ_{12}Z_{21}}{(Z_{11}Z_{12} - Z_{12}Z_{21} + Z_{11}Z)(Z_{22} + Z)}.$$

Для нахождения чувствительности коэффициента передачи $K(j\omega) = \dfrac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}$ пассивного четырехполюсника к изменению параметра Z его элемента предварительно следует определить зависимость $K(j\omega, Z)$. Для этого запишем уравнения, связывающие напряжения $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_3$ и токи $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ шестиполюсника (рис. 13.20),

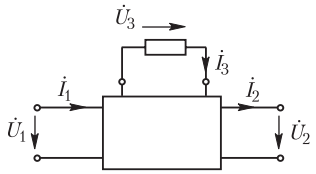


Рис. 13.20

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 + Z_{13}\dot{I}_3,$$
$$\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 + Z_{23}\dot{I}_3,$$
$$\dot{U}_3 = Z_{31}\dot{I}_1 + Z_{32}\dot{I}_2 + Z_{33}\dot{I}_3.$$

С учетом соотношений $\dot{I}_2 = 0, \dot{U}_3 = Z\dot{I}_3$ получаем из третьего уравнения выражение $\dot{I}_3 = \dfrac{Z_{31}}{Z_{11}Z_{33}}\dot{I}_1$ и после подстановки его в первые два уравнения находим:

$$K(j\omega, Z) = \frac{Z_{23}Z_{31} - Z_{21}Z_{33} + ZZ_{21}}{Z_{13}Z_{31} - Z_{11}Z_{33} + ZZ_{11}} = \frac{a(j\omega) + Zb(j\omega)}{c(j\omega) + Zd(j\omega)},$$

где $a(j\omega) = Z_{23}Z_{31} - Z_{21}Z_{33}$, $b(j\omega) = Z_{21}$, $c(j\omega) = Z_{13}Z_{31} - Z_{11}Z_{33}$, $d(j\omega) = Z_{11}$.

Полученное выражение по форме записи аналогично найденному выше выражению для величины $Z_{\text{вх}}$ двухполюсника. Его можно записать в более удобном виде через частотные характеристики холостого хода и короткого замыкания передаточной функции.

При $Z = 0$ имеем $K(j\omega, 0) = K(0) = \dfrac{a(j\omega)}{c(j\omega)}$, откуда $a(j\omega) = K(0)c(j\omega)$, а при $Z \to \infty$

$$K(j\omega, \infty) = K(\infty) = \frac{b(j\omega)}{d(j\omega)} \text{ и } b(j\omega) = K(\infty)\,d(j\omega).$$

Следовательно,

$$K(j\omega, Z) = \frac{K(0)c(j\omega) + ZK(\infty)\,d(j\omega)}{c(j\omega) + Zd(j\omega)} = \frac{\dfrac{c(j\omega)}{d(j\omega)}K(0) + ZK(\infty)}{\dfrac{c(j\omega)}{d(j\omega)} + Z}.$$

Сопротивление цепи со стороны зажимов *3—3* при замкнутых накоротко зажимах *1—1* (см. рис. 13.20) получается, с учетом того, что $\dot{U}_1 = 0$ и $\dot{I}_1 = -\dfrac{Z_{13}}{Z_{11}}\dot{I}_3$, равным $Z_{\text{вх}3} = \dfrac{Z_{11}Z_{33} - Z_{31}Z_{13}}{Z_{11}}$, что совпадает с величиной $\dfrac{c(j\omega)}{d(j\omega)}$, в чем нетрудно убедиться непосредственной подстановкой величин $c(j\omega)$ и $d(j\omega)$.

Таким образом, величину

$$K(j\omega, Z) = \frac{Z_{\text{вх}3}K(0) + ZK(\infty)}{Z_{\text{вх}3} + Z}$$

можно рассчитать на основе данных опытов холостого хода и короткого замыкания цепи.

Используя полученные выражения, можем найти чувствительность

$$S_Z = \frac{\partial K}{\partial Z} = \frac{[K(\infty) - K(0)]Z_{\text{вх}3}}{(Z + Z_{\text{вх}3})^2},$$

$$S_Z^K = \frac{Z}{K}\frac{\partial K}{\partial Z} = \frac{[K(\infty) - K(0)]Z_{\text{вх}3}Z}{(Z + Z_{\text{вх}3})[K(0)Z_{\text{вх}3} + ZK(\infty)]}.$$

Расчет чувствительности по полученным выражениям позволяет значительно упростить вычисления. Так, для цепи (рис. 13.21), рассчитывая величины S_{Z_1}, $S_{Z_1}^K$, получаем

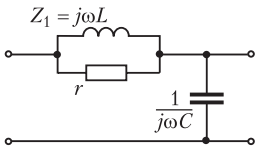


Рис. 13.21

$$Z_1 = j\omega L,\ Z_{\text{вх}3} = \frac{r\dfrac{1}{j\omega C}}{r + \dfrac{1}{j\omega C}},\ K(0) = 1,\ K(\infty) = 0,$$

$$S_{Z_1} = -\frac{Z_{\text{вх}3}}{(Z + Z_{\text{вх}3})^2},\ S_{Z_1}^K = -\frac{Z_1}{Z_1 + Z_{\text{вх}3}}.$$

Глава четырнадцатая

Цепные схемы. Электрические фильтры. Структурные схемы

14.1. Характеристические параметры четырехполюсника

В технических устройствах источник сигналов или энергии иногда соединяют через цепь, состоящую из ряда четырехполюсников, соединенных каскадно, т. е. входные зажимы каждого последующего четырехполюсника соединяют с выходными зажимами предыдущего (рис. 14.1). Схемы таких цепей называют ц е п н ы м и с х е м а м и, а отдельные четырехполюсники — з в е н ь я м и этой цепной схемы. Всю цепную схему также можно рассматривать как четырехполюсник, причем его параметры можно или определить экспериментально указанным в § 13.3 способом, или вычислить по параметрам звеньев, из которых состоит цепная схема, как это показано в § 13.4.

Условимся напряжения и токи между звеньями отмечать индексом, соответствующим номеру последующего звена (рис. 14.1).

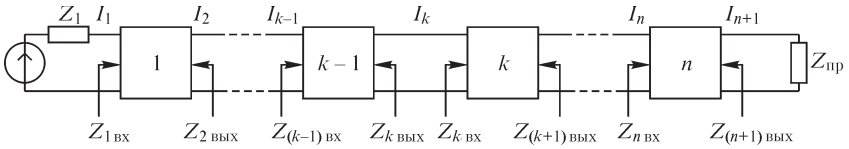


Рис. 14.1

Назовем входным сопротивлением k-го звена $Z_{k\,вх}$ и выходным сопротивлением $Z_{k\,вых}$ $(k-1)$-го звена сопротивления, определяемые следующим образом. Разорвем цепь между звеньями $k-1$ и k, замкнем накоротко источник ЭДС, сохранив в схеме его сопротивление Z_1, и определим отдельно сопротивления для обеих частей цепной схемы со стороны разрыва, которые и будут равны, соответственно, $Z_{k\,вх}$ и $Z_{k\,вых}$. Обратим внимание на то, что при такой индексации входное сопротивление любого звена, а также ток и напряжение на входе звена имеют индекс, соответствующий номеру звена, выходное же сопротивление, а также ток и напряжение на выходе звена имеют индекс, на единицу превышающий номер звена.

Во многих случаях осуществляют так называемое согласование в цепной схеме. С о г л а с о в а н и е м з в е н ь е в ц е п н о й с х е м ы с сопротивлением источника ЭДС, звеньев между собой и звеньев с сопротивлением нагрузки называют случай, когда одновременно имеют место следующие условия: входное сопротивление $Z_{1\,вх}$ на зажимах первого звена оказывается равным сопротивлению Z_1 источника; для любых соседних звеньев входное сопротивление $Z_{k\,вх}$ последующего, k-го, звена равно выходному сопротивлению $Z_{k\,вых}$ предыдущего, $(k-1)$-го, звена и выходное сопротивление $Z_{(n+1)\,вых}$ последнего, n-го, звена равно сопротивлению $Z_{пр}$ приемника (рис. 14.1). При соблюдении этих условий сопротивления $Z_{k\,вх}$ и $Z_{(k+1)\,вых}$ называют входным и выходным х а р а к т е р и с т и ч е с к и м и с о п р о т и в л е н и я м и k-го звена (четырехполюсника), входящего в данную

цепную схему, а соединение всех четырехполюсников цепной схемы при соблюдении указанных условий называют характеристически согласованным соединением.

Так как при согласовании $Z_{k\ \text{вых}} = Z_{k\ \text{вх}}$, то при этом можно опускать индексы, указывающие выход и вход, и писать просто Z_k. Характеристические сопротивления принято отмечать дополнительным индексом c. Соответственно характеристические сопротивления k-го четырехполюсника обозначаются — на входе Z_{kc} и на выходе $Z_{(k+1)c}$.

В дальнейшем, поскольку рассматриваемые свойства будут справедливы для любого k-го четырехполюсника, с целью упрощения индексации будем рассматривать первый четырехполюсник и, соответственно, полагать $k = 1$ и $k + 1 = 2$.

Рассматривая отдельно первый четырехполюсник при условии согласования, мы должны полагать его замкнутым на сопротивление нагрузки Z_{2c}. Пользуясь системой A-параметров четырехполюсника и учитывая, что $\dot{U}_2 = Z_{2c}\dot{I}_2$, можем написать

$$\dot{U}_1 = A_1\dot{U}_2 + B_1\dot{I}_2 = (A_1 Z_{2c} + B_1)\dot{I}_2;$$
$$\dot{I}_1 = C_1\dot{U}_2 + D_1\dot{I}_2 = (C_1 Z_{2c} + D_1)\dot{I}_2.$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$Z_{1c} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A_1 Z_{2c} + B_1}{C_1 Z_{2c} + D_1}.$$

В § 13.1 было сказано, что для четырехполюсника со стороны выходных зажимов уравнения остаются теми же самыми, и только A и D меняются местами. Учитывая это, а также то, что нагрузочное сопротивление теперь будет $Z_1 = Z_{1c}$, для выходного сопротивления первого четырехполюсника получаем формулу

$$Z_{2c} = \frac{D_1 Z_{1c} + B_1}{C_1 Z_{1c} + A_1}.$$

Решив совместно два последних уравнения, находим

$$Z_{1c} = \sqrt{\frac{A_1 B_1}{C_1 D_1}}; \quad Z_{2c} = \sqrt{\frac{D_1 B_1}{C_1 A_1}}.$$

Для симметричного четырехполюсника имеем $Z_{1c} = Z_{2c} = Z_c = \sqrt{B_1/C_1}$. В этом случае характеристическое сопротивление называется повторным сопротивлением, так как, нагружая четырехполюсник на сопротивление Z_c, на входе четырехполюсника будем иметь такое же сопротивление Z_c. Полученные два параметра Z_{1c} и Z_{2c} недостаточны для описания свойств четырехполюсника, так как в общем случае четырехполюсник характеризуется тремя независимыми параметрами. Необходимо ввести еще один параметр, связывающий процессы на входе и выходе.

Определим третий характеристический параметр из соотношения

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{\dot{U}_1\dot{I}_1}{\dot{U}_2\dot{I}_2}.$$

Величина Г называется мерой передачи четырехполюсника. В системе A-параметров, определив отношения $\dot{U}_1/\dot{U}_2$ и $\dot{I}_1/\dot{I}_2$ через характеристические сопротивления, путем простых преобразований можно получить

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2}\ln\left[\left(A_1 + \sqrt{\frac{B_1C_1A_1}{D_1}}\right)\left(D_1 + \sqrt{\frac{B_1C_1D_1}{A_1}}\right)\right] = \ln\left(\sqrt{A_1D_1} + \sqrt{B_1C_1}\right).$$

Для симметричных четырехполюсников вследствие равенства $A = D$ при наличии согласования имеют место соотношения:

$$\dot{U}_1/\dot{I}_1 = Z_c = \dot{U}_2/\dot{I}_2 \quad \text{и} \quad \Gamma_1 = \ln\left(A_1 + \sqrt{B_1C_1}\right).$$

Поэтому $\dot{U}_1/\dot{U}_2 = \dot{I}_1/\dot{I}_2 = e^{\Gamma_1}$ и

$$\Gamma_1 = \ln\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \ln\frac{U_1}{U_2}e^{j(\psi_{u_1}-\psi_{u_2})} = \ln\frac{U_1}{U_2} + j(\psi_{u_1} - \psi_{u_2}) = \alpha + j\beta.$$

Величина $\alpha = \ln\dfrac{U_1}{U_2}$ показывает, насколько изменяется по модулю при переходе через четырехполюсник напряжение (или ток), и носит название коэффициента затухания, так как $U_2/U_1 = I_2/I_1 = e^{-\alpha}$. Величина $\beta = \psi_{u_1} - \psi_{u_2}$ показывает, насколько изменяется фаза напряжения (или тока), и носит название коэффициента фазы. Безразмерные величины α и β измеряются: α — в *неперах* (Нп) и β — в *радианах* (рад). Если $\alpha = 1$ Нп, то это означает, что напряжение U_2 меньше напряжения U_1 в 2,718 раза.

На практике такая единица затухания часто оказывается слишком большой, и поэтому используется еще одна единица измерения затухания, называемая *децибел* (дБ). При этом надо писать $\alpha = 20\lg\dfrac{U_1}{U_2}$. Если $\alpha = 1$ дБ, то $U_1/U_2 = 10^{\frac{1}{20}} \approx 1{,}12$.

Очевидно, имеют место равенства:

$$1 \text{ Нп} = 8{,}686 \text{ дБ}; \; 1 \text{ дБ} = 0{,}115 \text{ Нп}.$$

Так как $e^{\Gamma_1} = \sqrt{A_1D_1} + \sqrt{B_1C_1}$ и $A_1D_1 - B_1C_1 = 1$, то легко заметить, что $e^{-\Gamma_1} = \sqrt{A_1D_1} - \sqrt{B_1C_1}$. Для гиперболических синуса и косинуса от аргумента Γ_1 найдем

$$\operatorname{ch}\Gamma_1 = \frac{1}{2}(e^{\Gamma_1} + e^{-\Gamma_1}) = \sqrt{A_1D_1};$$

$$\operatorname{sh}\Gamma_1 = \frac{1}{2}(e^{\Gamma_1} - e^{-\Gamma_1}) = \sqrt{B_1C_1};$$

$$\operatorname{cth}\Gamma_1 = \sqrt{\frac{A_1D_1}{B_1C_1}}.$$

Выразим A-параметры четырехполюсника через характеристические. Не приводя достаточно простых выкладок, можно записать

$$A_1 = \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}}\,\mathrm{ch}\,\Gamma_1; \qquad B_1 = \sqrt{Z_{1c}Z_{2c}}\,\mathrm{sh}\,\Gamma_1;$$

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{Z_{1c}Z_{2c}}}\mathrm{sh}\,\Gamma_1; \;\; D_1 = \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{1c}}}\,\mathrm{ch}\,\Gamma_1.$$

В частности, уравнения симметричного четырехполюсника в системе A-параметров можно записать в виде

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2\mathrm{ch}\,\Gamma_1 + \dot{I}_2 Z_c\mathrm{sh}\,\Gamma_1; \quad \dot{I}_1 = \dot{U}_2\frac{\mathrm{sh}\,\Gamma_1}{Z_c} + \dot{I}_2\mathrm{ch}\,\Gamma_1.$$

Наиболее простые выражения для характеристических сопротивлений можно получить, если выразить их через параметры холостого хода и короткого замыкания. Учитывая, что $A_1/C_1 = Z_{10}$; $B_1/D_1 = Z_{1к}$; $D_1/C_1 = Z_{20}$ и $B_1/A_1 = Z_{2к}$, имеем

$$Z_{1c} = \sqrt{Z_{10}Z_{1к}}; \quad Z_{2c} = \sqrt{Z_{20}Z_{2к}};$$

$$\mathrm{th}\,\Gamma_1 = \sqrt{\frac{Z_{1к}}{Z_{10}}} = \sqrt{\frac{Z_{2к}}{Z_{20}}}; \quad \mathrm{sh}\,\Gamma_1 = \sqrt{\frac{Z_{1к}}{Z_{10} - Z_{1к}}}.$$

Замещая симметричное звено эквивалентной Т- или П-образной схемой, введем для параметров этих схем обозначения, показанные на рис. 14.2, отличающие от ранее принятых, но более удобные для цепных схем и фильтров. При этом характеристические параметры запишутся через параметры эквивалентных схем в виде:

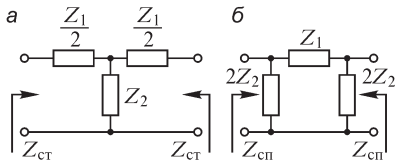


Рис. 14.2

для Т-схемы

$$Z_c = Z_{cт} = \sqrt{Z_1 Z_2\left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)}; \quad \mathrm{th}\,\Gamma_1 = \frac{\sqrt{Z_1 Z_2 + Z_1^2/4}}{Z_1/2 + Z_2};$$

для П-схемы

$$Z_c = Z_{cп} = \frac{\sqrt{Z_1 Z_2}}{\sqrt{1 + Z_1/(4Z_2)}}; \quad \mathrm{th}\,\Gamma_1 = \frac{\sqrt{Z_1 Z_2 + Z_1^2/4}}{Z_1/2 + Z_2}.$$

14.2. Передаточные функции согласованных цепных схем

В предыдущем параграфе мы дали определение цепных схем как последовательности каскадно соединенных четырехполюсников. При наличии характеристического согласования легко определить передаточные функции по напряжению и по току, если имеются характеристические параметры отдельных звеньев. Из определения меры передачи при характеристическом согласовании (см. рис. 14.1) для входящего в каскад k-го четырехполюсника имеем

$$\frac{\dot{U}_k\dot{I}_k}{\dot{U}_{k+1}\dot{I}_{k+1}} = e^{2\Gamma_k}; \quad \dot{U}_k = \dot{I}_k Z_{kc}; \quad \dot{U}_{k+1} = \dot{I}_{k+1}Z_{k+1,c},$$

и, следовательно, передаточные функции по напряжению и току k-го звена будут

$$K_U^{(k)} = \frac{\dot{U}_{k+1}}{\dot{U}_k} = \sqrt{\frac{Z_{k+1,c}}{Z_{kc}}}\, e^{-\Gamma_k},$$

$$K_I^{(k)} = \frac{\dot{I}_{k+1}}{\dot{I}_k} = \sqrt{\frac{Z_{kc}}{Z_{k+1,c}}}\, e^{-\Gamma_k}.$$

Передаточные функции всей цепной схемы будут

$$K_U = \frac{\dot{U}_{n+1}}{\dot{U}_1} = K_U^{(1)} K_U^{(2)} \ldots K_U^{(n)} = \sqrt{\frac{Z_{n+1,c}}{Z_{1c}}}\, e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\Gamma_k};$$

$$K_I = \frac{\dot{I}_{n+1}}{\dot{I}_1} = K_I^{(1)} K_I^{(2)} \ldots K_I^{(n)} = \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{n+1,c}}}\, e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\Gamma_k}.$$

Для *однородной цепной схемы,* составленной из одинаковых симметричных звеньев, имеем

$$K_U = K_I = e^{-n\Gamma_1},$$

так как при этом $Z_{n+1,\,c} = Z_{1c}$ и $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \ldots = \Gamma_n$.

14.3. Электрические фильтры

Четырехполюсники, частотные характеристики передаточных функций которых имеют резко выраженную избирательность для отдельных частот или полос частот, называют частотными электрическими фильтрами или, просто, электрическими фильтрами. Правильно сконструированный фильтр должен пропускать к приемнику сигналы практически без изменения их амплитуды в некотором диапазоне частот, называемом полосой пропускания или зоной прозрачности, и не пропускать сигналы, частоты которых лежат вне полосы пропускания, т. е. находятся в так называемой полосе задерживания. По виду полосы пропускания различают: фильтры нижних частот, полоса пропускания которых лежит в диапазоне от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_c$; фильтры верхних частот, полоса пропускания которых находится в диапазоне от $\omega = \omega_c$ до $\omega = \infty$; полосовые фильтры, полоса пропускания которых лежит в диапазоне от $\omega = \omega_1$ до $\omega = \omega_2$ и, наконец, заграждающие фильтры, полоса пропускания которых находится в диапазоне от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_1$ и от $\omega = \omega_2$ до $\omega = \infty$. Фильтры последнего типа не пропускают сигналы, частоты которых лежат в диапазоне от $\omega = \omega_1$ до $\omega = \omega_2$.

Вышеприведенная классификация фильтров не единственная, так как фильтры можно также классифицировать по характеру их элементов. Элементом в теории фильтров называют каждую индуктивную катушку, каждый конденсатор, каждый резистор или другие определяющие процесс детали, из которых собирается фильтр. В зависимости от вида элементов фильтры разделяются на следующие типы: реактивные, состоящие из реактивных катушек и конденсаторов;

безындукционные, состоящие из конденсаторов и резисторов; пьезоэлектрические, состоящие главным образом из кварцевых пластин, и др.

Классификация может быть осуществлена также по способу соединения элементов и по числу отдельных звеньев.

Далее рассмотрим фильтры, состоящие из реактивных элементов, собранных в цепные схемы. При этом сможем использовать соотношения, полученные в предыдущих главах, содержащих теорию четырехполюсников.

Воспользуемся характеристическими параметрами четырехполюсников для выработки некоторых общих положений, которым должны удовлетворять фильтры. Наиболее простой путь получения желаемой частотной характеристики передаточной функции заключается в том, что фильтр разделяется на отдельные четырехполюсники, которые соединяются между собой в виде характеристически согласованных цепных схем. При этом коэффициент затухания $\alpha(\omega)$ всей цепной схемы получается как сумма коэффициентов затухания отдельных четырехполюсников — отдельных звеньев. Наиболее простые выражения получаются для меры передачи Γ при характеристическом согласовании всей цепной схемы между ее звеньями и с сопротивлениями источника и приемника. Однако точное согласование возможно только для определенной частоты. Насколько это практически выполнимо в диапазоне частот, будет изложено в следующих параграфах. Рассмотрим, каким условиям должны удовлетворять элементы реактивного фильтра, чтобы в полосе пропускания было наименьшее искажение сигнала. В идеальном случае мы должны обеспечить нулевое затухание сигнала ($\alpha = 0$). Действительно, при полном характеристическом согласовании

$$\frac{\dot{U}_{\text{вх}}}{\dot{U}_{\text{вых}}} = e^{\alpha + j\beta} \quad \text{или} \quad \ln\frac{U_{\text{вх}}}{U_{\text{вых}}} = \alpha.$$

При $\alpha = 0$ имеем $U_{\text{вых}} = U_{\text{вх}}$.

Для меры передачи всей цепной схемы получаем

$$\operatorname{th}\Gamma = \operatorname{th}(\alpha + j\beta) = \frac{\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha + j\sin\beta\cos\beta}{\operatorname{sh}^2\alpha + \cos^2\beta} = \frac{\operatorname{sh}2\alpha}{\operatorname{ch}2\alpha + \cos 2\beta} + j\frac{\sin 2\beta}{\operatorname{ch}2\alpha + \cos 2\beta}.$$

Равенство $\alpha = 0$ означает, что $\operatorname{th}\Gamma$ является мнимой величиной. Но для $\operatorname{th}\Gamma$ имеем еще выражение:

$$\operatorname{th}\Gamma = \operatorname{th}(\alpha + j\beta) = \sqrt{\frac{Z_{1\text{к}}}{Z_{10}}}$$

и при $\alpha = 0$

$$\operatorname{th}\Gamma = j\operatorname{tg}\beta = \sqrt{\frac{Z_{1\text{к}}}{Z_{10}}}.$$

Отсюда вытекает, что отношение $Z_{1\text{к}}/Z_{10}$ должно быть величиной отрицательной. Если имеем частотные зависимости $Z_{1\text{к}}$ и Z_{10} для цепи, состоящей только из реактивных элементов, то, пользуясь ими, можем сразу же указать полосы пропускания и полосы задерживания. Например, для цепи, показанной на рис. 14.3, частотные зависимости $Z_{1\text{к}}$ и Z_{10}, которые были рассмотрены в § 6.3, 6.6, приведены на рис. 14.4.

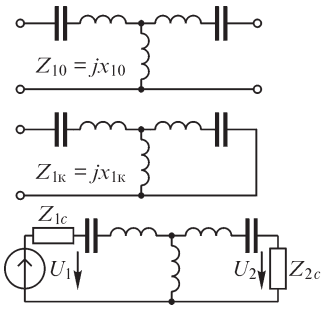


Рис. 14.3

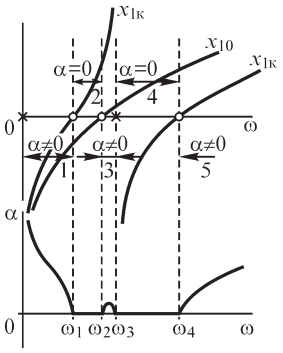


Рис. 14.4

Из рисунка видно, что для данной схемы при сопротивлении нагрузки, равном Z_{2c}, и сопротивлении источника Z_{1c} имеются две полосы пропускания (*2* и *4*), когда x_{10} и $x_{1к}$ имеют разные знаки, и три полосы задерживания (*1*, *3* и *5*), когда x_{10} и $x_{1к}$ имеют одинаковые знаки.

Нетрудно заметить, что в полосе пропускания коэффициент фазы β меняется, а в полосе задерживания он остается неизменным. Действительно, в полосе задерживания знаки x_{10} и $x_{1к}$ одинаковы, и поэтому th Γ — вещественная величина, т. е. $\sin\beta \cdot \cos\beta = 0$, и если $\alpha \neq 0$, то $\beta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi, 5\pi/2, 3\pi$...

На рис. 14.4 показана зависимость $\alpha(\omega)$ для рассматриваемой цепи (рис. 14.3).

Желательная частотная характеристика, которая в идеальном случае должна иметь диапазоны частот с нулевым затуханием и диапазоны частот с бесконечно большим затуханием, недостижима даже при полном согласовании звена из реактивных элементов с источником и нагрузкой. Как видно из рис. 14.4, коэффициент затухания в полосах задерживания не равен бесконечности. С целью получения больших значений коэффициентов затухания фильтр составляют из нескольких таких звеньев, соединенных каскадно, так как при этом при наличии характеристического согласования коэффициенты затухания отдельных звеньев суммируются.

Кроме того, трудность получения желаемых характеристик заключается еще и в том, что для полного согласования в диапазоне частот сопротивления приемника и генератора должны изменяться с изменением частоты по такому же закону, как и характеристические сопротивления фильтра. Последнее трудно осуществимо.

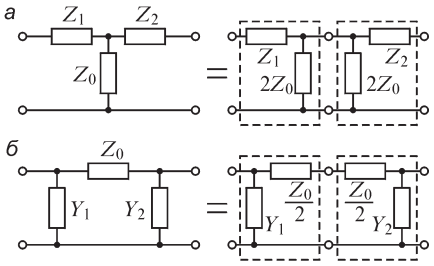


Рис. 14.5

Рассмотрим простейшие звенья, из которых можно получить составные многозвенные фильтры.

В § 13.2 было показано, что минимальное число ветвей эквивалентной схемы четырехполюсника в общем случае равно трем. Поэтому простейшей эквивалентной схемой звена являются эквивалентные Т-образные и П-образные схемы. Однако эти схемы, в свою очередь, можно представить в виде каскадного соединения двух еще более простых Г-образных схем (рис. 14.5).

Таким образом, исследование и конструирование сложных многозвенных фильтров при характеристическом согласовании сводится к исследованию про-

стейших Г-, П- и Т-образных звеньев, причем каждая ветвь этих звеньев, в свою очередь, может содержать несколько элементов. Для таких схем характеристические параметры можно определить особенно просто. Например, для Г-образной схемы (рис. 14.6) характеристическое сопротивление со стороны «П-входа», обозначаемое $Z_{c\,п}$, определится просто:

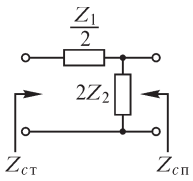


Рис. 14.6

$$Z_{c\,п} = \sqrt{Z_{10}Z_{1к}} = \sqrt{2Z_2\left(\frac{Z_1Z_2}{2Z_2 + Z_1/2}\right)} = \frac{(Z_1Z_2)^{1/2}}{[1 + Z_1/(4Z_2)]^{1/2}}.$$

Характеристическое сопротивление со стороны «Т-входа», обозначаемое $Z_{c\,т}$, определится в виде

$$Z_{c\,т} = \sqrt{\left(\frac{Z_1}{2} + 2Z_2\right)\frac{Z_1}{2}} = (Z_1Z_2)^{1/2}\left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2}\right)^{1/2}.$$

Для меры передачи имеем формулу

$$\operatorname{th}\Gamma = \operatorname{th}(\alpha + j\beta) = \sqrt{\frac{Z_{пк}}{Z_{п0}}} = \sqrt{\frac{Z_{тк}}{Z_{т0}}} = \sqrt{\frac{Z_1/2}{2Z_2 + Z_1/2}} = \sqrt{\frac{Z_1^2}{4(Z_1Z_2 + Z_1^2/4)}}.$$

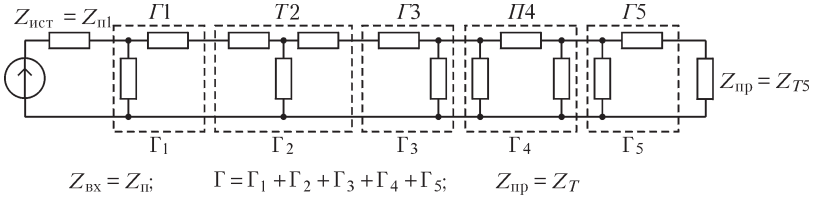


Рис. 14.7

Г-образные звенья используются для согласования сопротивлений нагрузки ($Z_{пр}$) и источника ($Z_{ист}$) и согласования Т- и П-образных звеньев между собой. Пример сложного составного фильтра приведен на рис. 14.7.

14.4. Электрические фильтры нижних частот типа *k*

В предыдущем параграфе для характеристических параметров мы получили выражения, куда входит произведение Z_1Z_2. Расчет существенно облегчается, если Z_1Z_2 — величина положительная, не зависящая от частоты, и вещественная, т. е. $Z_1Z_2 = k = R_0^2$. Фильтры, где есть это условие, называют ф и л ь т р а м и т и п а *k*.

Если рассмотреть Г-схему (см. рис. 14.6), то очевидные физические соображения подскажут, что при достаточно больших частотах напряжение U_2 будет при заданном U_1 мало в том случае, если на выходе (в ветвь Z_2) включен конденсатор, так как при этом с ростом частоты величина Z_2 будет стремиться к нулю. Ток в приемнике с ростом частоты будет тем меньше, чем больше сопротивление Z_1 при высоких частотах, т. е. если Z_1 является индуктивным сопротивлением. Таким образом, Г-образная схема, пока-

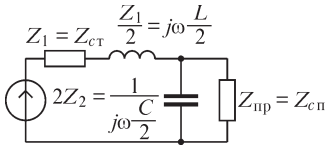


Рис. 14.8

занная на рис. 14.8, пропускает низкие частоты и задерживает высокие. Для этой схемы имеем

$$Z_1 Z_2 = j\omega \frac{L}{2} \frac{1}{j\omega C/2} = \frac{L}{C} = R_0^2.$$

Для Т- и П-схем это условие обеспечивается, если сопротивления Z_1 и Z_2 взяты равными: $Z_1 \quad j\omega L$ и $Z_2 = 1/(j\omega C)$. Характеристические сопротивления Г-схемы (см. рис. 14.6) со стороны «Т- и П-входов» и характеристические сопротивления симметричных Т- и П-схем (см. рис. 14.2) в данном случае равны, соответственно (см. § 14.1 и 14.3):

$$Z_{c\,\text{т}} = R_0 \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}} = R_0 \sqrt{1 + \frac{j\omega L}{4/(j\omega C)}} = R_0 \sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}};$$

$$Z_{c\,\text{п}} = \frac{R_0}{\sqrt{1 + Z_1/(4Z_2)}} = \frac{R_0}{\sqrt{1 - \omega^2 LC/4}}.$$

Мера передачи Г-образной схемы определится из формулы

$$\operatorname{th}\Gamma = \sqrt{\frac{-\omega^2 L^2}{4(R_0^2 - \omega^2 L^2/4)}}.$$

В предыдущем параграфе мы отметили, что $\alpha = 0$, если $\operatorname{th}\Gamma$ — мнимая величина, что имеет место, если $R_0^2 - \omega^2 L^2/4 > 0$, т. е. в пределах частот от $\omega = 0$ до $\omega_c = 2R_0/L$. При частотах выше ω_c величина $\operatorname{th}\Gamma$ является вещественной, и поэтому $\alpha \neq 0$. Зависимости затухания α и отношения U_2/U_1 от частоты в идеальном случае полного согласования приведены на рис. 14.9, *а*, *б*. Нетрудно видеть, что для Т- и П-образных схем величина ω_c будет такой же, как и для Г-образной схемы, но величина $\alpha(\omega)$ для них будет в два раза больше (штриховая кривая на рис. 14.9, *а*).

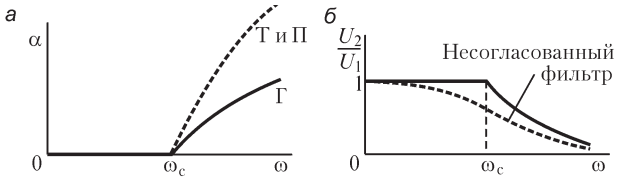


Рис. 14.9

Здесь необходимо отметить, что условие характеристического согласования требует, чтобы приемник и генератор обладали сопротивлениями, равными либо $Z_{c\,\text{т}}$, либо $Z_{c\,\text{п}}$ (смотря, какова схема), т. е. их частотные характеристики должны иметь вид, показанный на рис. 14.10.

В тех случаях, когда сопротивления приемника $r_{\text{пр}}$ и генератора r_1 являются постоянными величинами, их согласование производится с сопротивлениями $Z_{c\,\text{т}}$ и $Z_{c\,\text{п}}$ при низких частотах. Как видно из приведенных формул, при $\omega \to 0$ имеем $Z_{c\text{т}} \to R_0$ и $Z_{c\,\text{п}} \to R_0$. Поэтому величина $R_0 = \sqrt{L/C}$ должна быть принята

равной сопротивлению $r_{пр}$ приемника. Этой же величине $R_0 = r_{пр}$ необходимо сделать равным и сопротивление генератора r_1. Кроме того, обычно задана частота среза ω_c, равная $\omega_c = \frac{2R_0}{L} = 2\sqrt{\frac{1}{LC}}$. Из этих условий определяются значения L и C Г-образного звена. При согласовании только на самых низких частотах реальная частотная характеристика (штриховая кривая на рис. 14.9, *б*) рассматриваемого звена будет отличаться от частотной характеристики (сплошная кривая на рис. 14.9, *б)* в идеальном случае полного согласования во всем диапазоне частот. Число звеньев выбирают, исходя из условия получения желаемого коэффициента затухания.

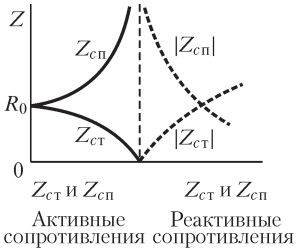


Рис. 14.10

14.5. Электрические фильтры нижних частот типа *m*

Электрические фильтры типа *k* имеют тот недостаток, что для получения большой крутизны роста $\alpha(\omega)$ в полосе задерживания необходимо применять соединение многих звеньев. Кроме того, характеристические сопротивления этих фильтров сильно меняются в полосе пропускания, что приводит к усложнению условий согласования, а при согласовании сопротивлений нагрузки и источника только при нулевой частоте — и к появлению затухания в полосе пропускания (см. рис. 14.9). Фильтры типа *m* не обладают этими недостатками. Как и прежде, весь ход рассуждений проведем для Г-образного звена фильтра нижних частот. Простые физические соображения помогают указать на два способа увеличения скорости роста $\alpha(\omega)$ в полосе задерживания. При первом из них в плече Z_2 осуществляется резонанс напряжений при частоте $\omega_\infty > \omega_c$, вследствие чего плечо при этой частоте окажется короткозамкнутым ($Z_2 = 0$ и $U_2 = 0$). Поэтому при частоте ω_∞ получим $\alpha = \infty$. Г-образное звено (рис. 14.11, *б*), основанное на этом принципе, и фильтр, составленный из таких звеньев, носят название п о с л е д о в а т е л ь н о - п р о и з в о д н ы х. Второй способ основан на том, что в плече Z_1 осуществляется резонанс токов при частоте $\omega_\infty > \omega_c$. Тогда при частоте ω_∞ имеем $\alpha = \infty$, так как $Z_1 = \infty$ и $U_2 = 0$. Г-образное звено, изображенное на рис. 14.11, *в*, а также и фильтр, составленный из таких звеньев, называют п а р а л л е л ь н о - п р о и з в о д н ы м и. Термины «параллельно-производный» и «последовательно-производный» показывают, что звенья типа *m* на рис. 14.11, *б* и *в* являются производными от звена типа *k* на рис. 14.11, *а,* называемого п р о т о т и п о м. Выбор частоты ω_∞ — частоты пика затухания — определяется по условиям задачи, т. е. из желаемой скорости роста $\alpha(\omega)$.

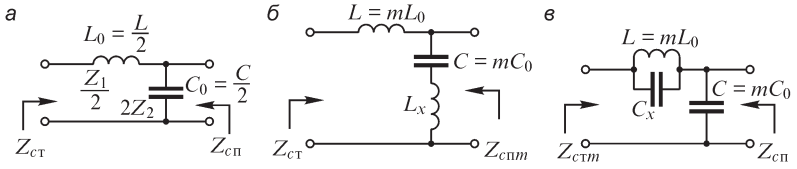


Рис. 14.11

Подчиним выбор параметров фильтра типа m условиям хорошего согласования его с постоянным сопротивлением и звеном фильтра типа k.

Пусть задано число

$$m = \sqrt{1 - \omega_c^2 / \omega_\infty^2},$$

где

$$\omega_\infty^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{и} \quad \omega_c^2 = \frac{1}{L_0 C_0}.$$

Здесь ω_c — частота среза прототипа — фильтра типа k (рис. 14.11, *а*); ω_∞ — частота пика затухания фильтра типа m (рис. 14.11, *б*, *в*). Нетрудно убедиться, что, связав параметры элементов последовательно-производного звена (рис. 14.11, *б*) с параметрами элементов прототипа (рис. 14.11, *а*) соотношениями

$$L = mL_0; \quad C = mC_0 \quad \text{и} \quad L_x = \frac{1 - m^2}{m} L_0,$$

получим равенство характеристического сопротивления $Z_{ст\,m}$ звена типа m со стороны «Т-входа» и соответствующего сопротивления $Z_{ст}$ прототипа:

$$Z_{стm} = Z_{ст}.$$

При этом характеристическое сопротивление звена типа m со стороны «П-входа» определится через соответствующее сопротивление прототипа в виде

$$Z_{спm} = Z_{сп}\left[1 - \frac{\omega^2 (1 - m^2)}{\omega_c^2}\right].$$

Определив параметры элементов параллельно-производного звена (рис. 14.11, *в*) из соотношений

$$L = mL_0; \quad C = mC_0 \quad \text{и} \quad C_x = \frac{1 - m^2}{m} C_0,$$

получим

$$Z_{спm} = Z_{сп} \quad \text{и} \quad Z_{стm} = \frac{Z_{ст}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_c^2}(1 - m^2)}.$$

Зависимости $Z_{спm}$ и $Z_{стm}$ от частоты для различных m приведены на рис. 14.12 и 14.13.

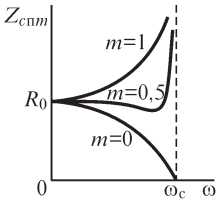


Рис. 14.12

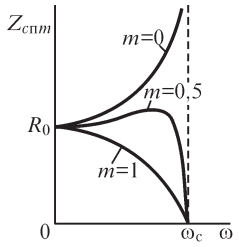


Рис. 14.13

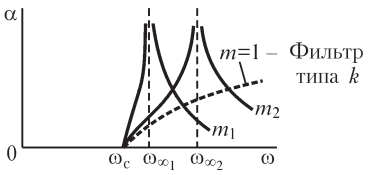


Рис. 14.14

Как видно из этих рисунков, характеристические сопротивления $Z_{c\,\text{п}\,m}$ и $Z_{c\,\text{т}\,m}$ близки к R_0 в более широком диапазоне частот, чем $Z_{c\,\text{п}}$ и $Z_{c\,\text{т}}$. Из рис. 14.14 видно, что для меньших значений m частота ω_∞ близка к ω_c и рост затухания происходит более резко. Однако выбор слишком малых значений m связан со значительным снижением затухания в полосе задерживания при больших ω, что нежелательно. По этой причине фильтры типа m обычно соединяют каскадно с фильтрами типа k, достигая тем самым желаемого коэффициента затухания в полосе задерживания при высоких частотах и большой крутизны роста $\alpha(\omega)$ около частоты среза. То обстоятельство, что фильтр типа m обладает характеристическим сопротивлением или $Z_{c\,\text{п}}$, или $Z_{c\,\text{т}}$, является очень полезным при согласовании звеньев типа k и m в многозвенном фильтре.

Порядок расчета фильтра можно принять, например, следующим: по сопротивлению нагрузки R_0 и частоте среза ω_c определяем исходные данные L_0 и C_0 для Г-образного прототипа по формулам

$$L_0 = \frac{L_1}{2} = \frac{R_0}{\omega_c} \quad \text{и} \quad C_0 = \frac{C_2}{2} = \frac{1}{R_0\omega_c}.$$

Затем по формуле для th Г (см. § 14.3) находим коэффициент затухания звена. По желаемому значению коэффициента затухания всего фильтра при высоких частотах определяем число звеньев в фильтре. По желаемой крутизне роста $\alpha(\omega)$ находим ω_∞ и, следовательно, параметры фильтра типа m.

Конечно, приведенная схема расчета является весьма приближенной, так как точный расчет фильтра связан с учетом влияния рассогласования, наличия активных сопротивлений в элементах фильтра и т. д. Поэтому после проведения приближенного расчета следует, если необходимо, произвести уточнение с учетом этих факторов. Для практических расчетов разработан ряд рекомендаций и получены серии кривых, которые дают возможность относительно просто и точно спроектировать фильтр с желаемыми характеристиками.

14.6. Метод преобразования частоты. Электрические фильтры верхних частот. Полосовые электрические фильтры

Фильтры нижних частот могут служить основой для расчета фильтров верхних частот и полосовых фильтров. Для этой цели применим метод преобразования частоты. Он заключается в том, что если имеется некоторая функция $F(p)$ комплексной частоты p, то можно получить другую функцию $F(s)$ комплексной частоты s, пользуясь связью $p(s)$ между этими частотами.

Пусть исследуемой функцией является операторное сопротивление $Z(p)$. Для цепи любой сложности $Z(p)$ зависит от сопротивлений в ветвях, имеющих в общем случае вид $Z_i(p) = pL_i + 1/(pC_i) + r_i$. Рассмотрим случай, когда r 0, т. е. когда цепь состоит из реактивных элементов. Преобразование частоты $p(s)$ для таких цепей можно представить так, что в первоначальной цепи каждое сопротивление $Z_i(p) = pL_i + 1/(pC_i)$ заменяется некоторым другим сопротивлением $Z_i(s)$ сложной конфигурации, определяемой видом функции $p(s)$. Пусть $p(s) = a/s$; тогда легко заметить, что в новых переменных $Z_i(s) = aL/s + s/(aC_i) = 1/(sC_i') + sL_i'$,

т. е. для переменной s можно получить новую цепь с сопротивлением $Z_i(s)$ из прежней цепи с сопротивлением $Z_i(p)$, заменив в последней все индуктивности L_i на емкости C'_i и все емкости C_i на индуктивности L'_i.

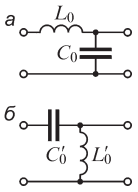


Рис. 14.15

Применительно к схеме Г-образного звена фильтра нижних частот (рис. 14.15, *а*) преобразование $p = a/s$ дает схему, приведенную на рис. 14.15, *б*. Нетрудно видеть, что для этой схемы частотные зависимости сопротивлений холостого хода и короткого замыкания $Z_{10}(s) = jx_{10}(s)$ и $Z_{1к}(s) = jx_{1к}(s)$ таковы, что полоса пропускания начинается с частоты ω'_c, т. е. фильтр с такой схемой пропускает только высокие частоты (рис. 14.16 и 14.17).

Таким образом, фильтр верхних частот можно получить из фильтра нижних частот, заменив в последнем все емкости на индуктивности и все индуктивности на емкости (см. рис. 14.15). Если взять частоту среза одинаковой для обоих фильтров ($\omega'_c = \omega_c$), то параметры фильтра верхних частот определятся через параметры фильтра нижних частот равенствами $C'_0 = C_0$ и $L'_0 = L_0$ с указанной заменой мест элементов в схеме рис. 14.15. Характеристические параметры при этом запишутся в виде

$$Z_{сп} = \frac{R_0}{\sqrt{1 + Z_1/(4Z_2)}} = \frac{R_0}{\sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2}};$$

$$Z_{ст} = R_0\sqrt{1 + Z_1/(4Z_2)} = R_0\sqrt{1 - \omega_c^2/\omega^2};$$

$$\operatorname{th}\Gamma = \sqrt{\frac{Z_{1к}}{Z_{10}}} = \sqrt{\frac{1/(j\omega C'_0)}{1/(j\omega C'_0) + j\omega L'_0}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \omega^2/\omega_c^2}}.$$

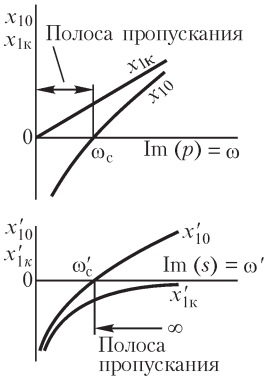


Рис. 14.16

Для получения характеристик полосового фильтра будем пользоваться методом преобразования частоты. Пусть $p(s) = bs + a/s$. Тогда

$$Z(p) = pL + \frac{1}{pC} = \left(bs + \frac{a}{s}\right)L + \frac{1}{(bs + a/s)C} =$$

$$= bsL + \frac{1}{s\dfrac{1}{aL}} + \frac{1}{\dfrac{aC}{s} + bsC}.$$

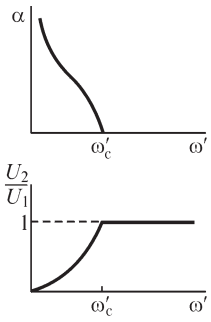


Рис. 14.17

Применение данного преобразования превращает индуктивность с сопротивлением pL в последовательно соединенные индуктивность и емкость с сопротивлением $bsL + 1/(sC')$, а емкость с проводимостью pC — в параллельно соединенные емкость и индуктивность с проводимостью $bsC + aC/s$ (рис. 14.18, *а*, *б*).

Рассмотрим, каким образом изменяется полоса пропускания фильтра нижних частот при использовании такого преобразования. Применяя соответствие $p = bs + a/s$

и частотную характеристику передаточной функции Г-образного звена фильтра нижних частот (рис. 14.19), получим соответствия:

$$\text{при } s = 0 \qquad p = \infty \text{ и } U_2/U_1 = 0;$$

$$\text{при } s = \infty \qquad p = \infty \text{ и } U_2/U_1 = 0;$$

$$\text{при } s^2 = -\frac{a}{b} \qquad p = 0 \text{ и } U_2/U_1 = 1.$$

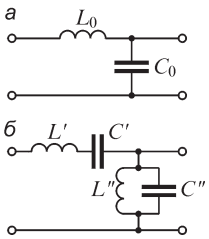


Рис. 14.18

Полагая комплексные частоты мнимыми: $p = j\omega$ и $s = j\omega'$, получим преобразование частотной характеристики передаточной функции. Частотам среза $\pm\omega_c$ фильтра нижних частот соответствуют две положительные частоты ω'_{1c} и ω'_{2c} (рис. 14.19) среза полосового фильтра, определяемые из уравнения

$$\pm j\omega_c = j\omega' b + \frac{a}{j\omega'} \quad \text{или} \quad \pm\omega_c = \omega' b - \frac{a}{\omega'}.$$

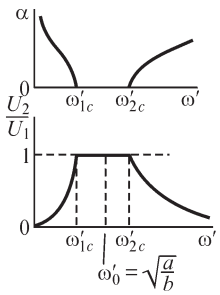


Рис. 14.19

Отсюда

$$\omega'_{2c;1c} = \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4b^2} + \frac{a}{b}} \pm \frac{\omega_c}{2b}$$

или

$$\omega'_{2c} - \omega'_{1c} = \omega_c/b \quad \text{и} \quad \omega'_{1c}\omega'_{2c} = a/b = \omega_0'^{\,2},$$

причем частота $\omega'_0 = \sqrt{a/b}$, т. е. $s^2 = -a/b$ соответствует $p = 0$.

Таким образом, если задана полоса пропускания полосового фильтра, лежащая между частотами среза ω'_{1c} и ω'_{2c}, то легко рассчитать коэффициенты a и b и тем самым параметры элементов преобразованной схемы, исходя из предварительно рассчитанного фильтра нижних частот типа k с заданной произвольно ω_c при известном R_0. Расчет сильно упрощается, если ширину полос пропускания полосового фильтра и фильтра нижних частот взять одинаковой, т. е. $\omega'_{2c} - \omega'_{1c} = \omega_0 - 0$. Тогда $b = 1$ и $a = \omega'_{1c}\omega'_{2c}$.

Метод преобразования частоты можно применить и по отношению к фильтрам типа m, получив таким образом фильтры типа m для верхних частот и соответствующие полосовые фильтры.

Если преобразование вида $p = bs + a/s$ применить по отношению к фильтру верхних частот, то можно получить также и заграждающий фильтр.

В качестве полосового фильтра могут служить и индуктивно-связанные контуры, содержащие конденсаторы, что видно из изложенного в § 6.8.

14.7. Структурные схемы

Сложность современных систем и устройств автоматики, радиотехники и электроизмерительной техники заставляет при анализе этих систем рассматривать укрупненно отдельные их участки и изучать в обобщенном виде свойства этих участков в отношении передачи через них сигналов и энергии. Эти свойства характеризуются передаточной функцией рассматриваемого участка системы.

Такие отдельные участки системы, содержащие в себе в общем случае комплексы элементов, соединенных в сложные электрические цепи, называют иногда б л о к а м и системы.

При рассмотрении передаточных функций четырехполюсников, представляющих собой как раз один из наиболее распространенных видов укрупненного блока электрической цепи, можно заметить, что эта функция в значительной степени зависит от значений сопротивлений, подключаемых к входу и выходу четырехполюсника. Однако если все блоки системы согласованы между собой, а также с сопротивлениями источника энергии и приемника, то каждый блок характеризуется одной определенной передаточной функцией. Согласование может быть осуществлено не только подбором свойств самих блоков, но и путем включения между ними тех или иных дополнительных элементов, например трансформаторов с характеристиками, близкими к идеальным, обладающих свойством преобразовывать значение сопротивления (см. § 5.19). При соблюдении этих условий блоки системы характеризуются определенными передаточными функциями.

Во многих случаях блоки системы характеризуются свойством односторонней направленности передачи сигнала или энергии от входных зажимов к выходным. Таковым является, например, транзисторный усилитель, в котором сигнал передается от входных зажимов базы к выходным зажимам коллекторной цепи, и передача сигнала в обратном направлении не происходит. Таковыми являются также различные блоки систем автоматики, в которых осуществляется воздействие только со стороны цепи управления на управляемую цепь. Подобные блоки называют б л о к а м и н а п р а в л е н н о г о д е й с т в и я.

Система, составленная из блоков направленного действия, условно изображается ее с т р у к т у р н о й с х е м о й. Каждый блок в этой схеме изображается в виде прямоугольника, внутри которого указывается его передаточная функция. Блоки соединяются между собой линиями со стрелками, указывающими направление передачи действия. Рядом с этими линиями помечаются величины, для которых определяется передаточная функция. Например, передаточные функции четырехполюсника могут быть определены как отношение операторных изображений, либо напряжений на выходе и входе, либо токов на выходе и входе, либо напряжения на выходе и тока на входе и, наконец, либо тока на выходе и напряжения на входе. Величины, операторные изображения которых входят в передаточную функцию, обозначаются на соединительных линиях между блоками.

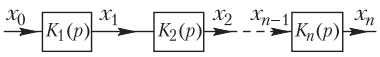


Рис. 14.20

Рассмотрим несколько простейших способов соединения блоков в структурных схемах.

Последовательное соединение в структурной схеме указано на рис. 14.20.

Передаточная функция при этом в общем виде имеет выражение

$$K(p) = \frac{X_n(p)}{X_0(p)} = \frac{X_1(p)X_2(p)X_3(p)}{X_0(p)X_1(p)X_2(p)} \cdots \frac{X_n(p)}{X_{n-1}(p)} = K_1(p)K_2(p)\ldots K_n(p) = \prod_{j=1}^{n} K_j(p).$$

Параллельное соединение в структурной схеме имеет некоторые особенности, связанные с направлением передачи действия. В этом смысле необходимо отличать в структурных схемах два вида узлов (точек), где происходит соединение нескольких блоков. На структурной схеме могут быть точки, где данная функция передается другим блокам без изменения. Назовем эти точки точками ответвления. На структурной схеме их изображают в виде сплошных кружков. В другом случае в данной точке происходит суммирование или вычитание различных функций. Назовем эти точки точками суммирования (сложения). Такие точки на структурной схеме обозначают либо в виде кружков с крестиком (рис. 14.21), либо в виде, показанном на рис. 14.22.

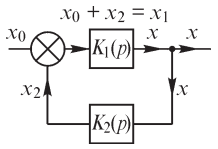


Рис. 14.21

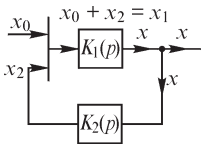


Рис. 14.22

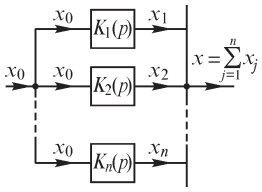


Рис. 14.23

Соединение, когда все входы блоков соединены в точке ответвления, а все выходы — в точке суммирования, называется параллельным соединением в структурной схеме (рис. 14.23). При этом передаточная функция всей схемы определится как сумма передаточных функций отдельных блоков:

$$K(p) = \frac{X(p)}{X_0(p)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j(p)}{X_0(p)} = \sum_{j=1}^{n} K_j(p).$$

Схему, в которой входы двух блоков с различными направленностями соединены в точке суммирования, а их выходы — в точке ответвления, называют схемой с обратной связью, такое соединение — антипараллельным. Пример такого соединения приведен на рис. 14.21 и 14.22. Нетрудно увидеть, что передаточная функция для схемы с обратной связью определится в виде

$$X(p) = K_1(p)X_1(p) = K_1(p)[X_0(p) + X_2(p)] = X_0(p)K_1(p) + X(p)K_2(p)K_1(p),$$

откуда

$$K(p) = \frac{X(p)}{X_0(p)} = \frac{K_1(p)}{1 - K_1(p)K_2(p)},$$

что соответствует выражению, приведенному в § 13.7.

Часть структурной схемы, в которой выходная функция при помощи обратной связи передается к началу этой части схемы, называют замкнутой. Часть структурной схемы, в которой обратная связь отсутствует, называют разомкнутой. Соответственно отличают *передаточную функцию замкнутой системы* от *передаточной функции разомкнутой системы*.

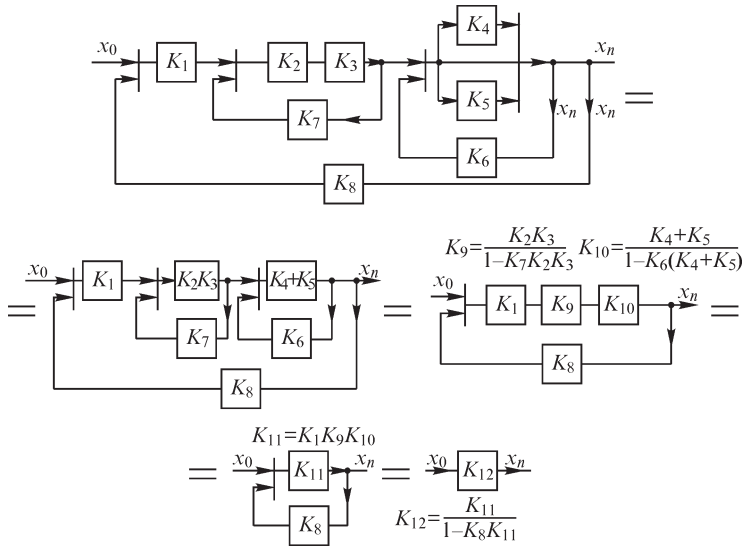


Рис. 14.24

Передаточную функцию всей сложной структурной схемы можно определить путем последовательного нахождения передаточных функций отдельных участков при помощи полученных выше формул для различных соединений. Например, передаточную функцию $K(p) = K_{12}(p)$ всей схемы, изображенной на рис. 14.24, можно найти, выполняя операции, указанные на этом рисунке.

14.8. К вопросу об устойчивости в электрических цепях

В линейных электрических цепях, содержащих источники энергии, при наличии обратных связей может возникнуть вопрос об *устойчивости процесса* в цепи.

Под устойчивостью будем понимать следующее. Если под влиянием некоторого кратковременного (импульсного) возмущения $x_0(t)$ система выйдет из состояния равновесия, то процесс в системе устойчив, когда возникшее отклонение $x(t)$ от состояния равновесия после окончания действия возмущения стремится к нулю или остается неизменным. Процесс в системе неустойчив, если это отклонение нарастает. Итак, пусть $x_0(t)$ является импульсной функцией, и, следовательно, ее операторное изображение есть постоянная величина, т. е. $X_0(p) = A$. Операторные изображения отклонения и возмущающей функции связаны через передаточную функцию $K(p) = \dfrac{X(p)}{X_0(p)}$, откуда

$$X(p) = X_0(p)K(p) = AK(p) = A\frac{Q(p)}{G(p)} = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{a_k}{p-p_k},$$

где $p_1, p_2, ..., p_n$ суть корни уравнения $G(p) = 0$, т. е. являются полюсами передаточной функции и, следовательно, полюсами величины $X(p)$. При этом имеем

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{p_k t} = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{(\sigma_k + j\omega_k)t}.$$

Система устойчива, если вещественные части σ_k всех корней p_k отрицательны, так как $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Система устойчива и в том случае, если пара сопряженных корней имеет $\sigma_k = 0$, так как при этом устанавливаются колебания с неизменной амплитудой. Система неустойчива, если хотя бы один из корней имеет положительную вещественную часть $\sigma_k > 0$, так как соответствующий член $e^{p_k t}$ будет неограниченно возрастать. Отсюда следует, что система устойчива, если все полюсы передаточной функции лежат в левой полуплоскости переменной $p = \sigma + j\omega$ или на мнимой оси. Система неустойчива, если хотя бы один полюс передаточной функции лежит в правой полуплоскости (рис. 14.25).

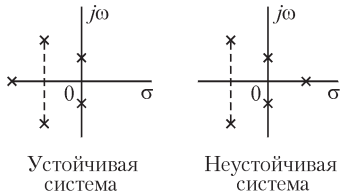


Рис. 14.25

Пусть в рассматриваемой линейной системе полностью отсутствуют обратные связи и она устойчива, т. е. передаточная функция $K_1(p)$ этой разомкнутой системы не имеет полюсов в правой полуплоскости. Замкнем систему с помощью обратной связи, передаточная функция $K_2(p)$ которой также не имеет полюсов в правой полуплоскости.

Передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$K_3(p) = \frac{K_1(p)}{1 - K_1(p)K_2(p)} = \frac{Q_1(p)/G_1(p)}{1 - \dfrac{Q_1(p)Q_2(p)}{G_1(p)G_2(p)}} =$$

$$= \frac{Q_1(p)G_2(p)}{G_1(p)G_2(p) - Q_1(p)Q_2(p)} = \frac{Q_1(p)G_2(p)}{b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \ldots + b_0}.$$

В знаменателе передаточной функции имеем разность двух полиномов от p $G_1(p)G_2(p) - Q_1(p)Q_2(p)$, и поэтому в результирующем полиноме $b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \ldots + b_0$ возможно появление корней в правой полуплоскости и система может оказаться неустойчивой. По этой причине возникает необходимость в исследовании вопроса об устойчивости замкнутой системы, если даже заведомо известно, что разомкнутая система является устойчивой.

Для того чтобы система была устойчивой, коэффициенты полинома знаменателя должны удовлетворять определенным условиям, известным в литературе под названием критериев устойчивости Рауса–Гурвица. Приведем без доказательства эти критерии. Составим вспомогательную матрицу коэффициентов полинома $b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \ldots + b_0$, состоящую из n строк и n столбцов, в следующем виде

$$\begin{Vmatrix} b_{n-1} & b_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & \dots & 0 & 0 \\ b_{n-5} & b_{n-4} & b_{n-3} & b_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \end{Vmatrix}.$$

По вертикали номера коэффициентов изменяются на две единицы, а по горизонтали идут по порядку. По виду матрицы очевиден способ ее построения. Гурвиц показал, что если все n диагональных миноров этой матрицы больше нуля, то полином не имеет корней в правой полуплоскости. Будем считать, что $b_n > 0$. Тогда первый минор этой таблицы будет b_{n-1}, второй минор есть определитель, составленный из членов двух первых строк-столбцов:

$$\Delta_1 = b_{n-1} > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_n \\ b_{n-3} & b_{n-2} \end{vmatrix},$$

третий минор

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_n & 0 \\ b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} \\ b_{n-5} & b_{n-4} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

и так далее.

Таким образом, критерием устойчивости служат неравенства

$$\Delta_1 > 0; \quad \Delta_2 > 0; \quad \Delta_3 > 0; \quad \dots; \quad \Delta_n > 0.$$

При анализе систем с отрицательной обратной связью находят применение также частотные критерии устойчивости.

Рассмотрим один из таких критериев, основанный на анализе годографа амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой системы.

При разрыве цепи обратной связи в месте прохождения сигнала X_2 (см. рис. 14.21) образуется разомкнутая система с двумя последовательно соединенными блоками с передаточной функцией

$$K(p) = \frac{X_2(p)}{X_0(p)} = K_1(p) \cdot K_2(p).$$

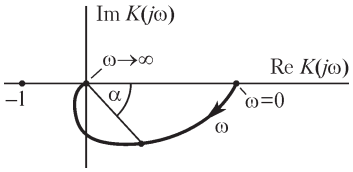


Рис. 14.26

По виду годографа амплитудно-фазовой частотной характеристики $K(j\omega) = K_1(j\omega) \cdot K_2(j\omega)$ можно судить о том, будет ли устойчивой замкнутая система.

Если при $\omega = 0$ разомкнутая система имеет коэффициент передачи, при котором влияние высокочастотных помех минимальное, равный $K(j0) = K_y$, а при $\omega \to \infty$ $K(j\omega) \to 0$, что характерно для систем управления и регулирования, то типичный годограф $K(j\omega)$ имеет показанный на рис. 14.26 вид.

Так как годограф проходит через четыре квадранта, то в рассматриваемом случае наивысшая степень полинома знаменателя передаточной функции $K(p)$ превышает на четыре наивысшую степень полинома числителя (см. § 13.5).

При частоте ω_1, соответствующей точке пересечения годографа $K(j\omega)$ с отрицательной частью оси вещественных, угол сдвига по фазе между сигналами X_0 и X_2 составляет 180°, так что, учитывая, что обратная связь отрицательная, при возникновении колебаний сигнала X_0 с частотой ω_1 и замыкании цепи обратной связи сигнал X_2 будет совпадать по фазе с сигналом X_0.

В результате обратная связь при $\omega = \omega_1$ становится положительной и система может стать неустойчивой, что будет иметь место, если коэффициент передачи системы при частоте ω_1 превышает 1.

Вопросы упражнения и задачи к главам 13 и 14

13.1. Уравнения и системы параметров четырехполюсников

ВОПРОСЫ

1. Могут ли все параметры четырехполюсника быть: *а*) вещественными; *б*) мнимыми; *в*) комплексными?

2. В каких случаях целесообразно выбирать условные положительные направления токов $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ так, как указано на рис. В13.1 и В13.2?

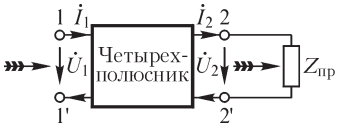


Рис. В13.1

Рис. В13.2

3. Сколько параметров четырехполюсника необходимо задать, чтобы записать уравнения, связывающие токи и напряжения на его входных и выходных зажимах, если известно, что четырехполюсник: *а*) симметричный, *б*) несимметричный?

4. Могут ли параметры *A*, *B*, *C*, *D* пассивного четырехполюсника быть все равными единице?

5. *A*-параметры четырехполюсника, содержащего реактивные элементы, рассчитаны при частоте напряжения $\rightarrow \omega_0$. Сохранят ли они свои значения при частоте $2\omega_0$?

6. Почему *H*-параметры четырехполюсника называют гибридными?

7. (О) Сколько можно предложить систем параметров пассивного четырехполюсника, связывающих его входные и выходные напряжения и токи?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Выразите недостающий в строках ①–④ таблиц параметр четырехполюсника через заданные:

$$\begin{matrix} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \end{matrix} \quad а)\begin{bmatrix} ? & B & C & D \\ A & ? & C & D \\ A & B & ? & D \\ A & B & C & ? \end{bmatrix};\ б)\begin{bmatrix} ? & H_{12} & H_{21} & H_{22} \\ H_{11} & ? & H_{21} & H_{22} \\ H_{11} & H_{12} & ? & H_{22} \\ H_{11} & H_{12} & H_{21} & ? \end{bmatrix};\ в)\begin{bmatrix} ? & Z_{12} & Z_{21} & Z_{22} \\ Z_{11} & ? & Z_{21} & Z_{22} \\ Z_{11} & Z_{12} & ? & Z_{22} \\ Z_{11} & Z_{12} & Z_{21} & ? \end{bmatrix}.$$

2. Выразите через *Z*-параметры симметричного четырехполюсника его *A*-, *Y*- и *H*-параметры при указанных на рис. В13.1 и В13.2 положительных направлениях токов и напряжений.

3. (Р) Выразите параметры четырехполюсников, показанных на рис. В13.3, через параметры *r*, *L*, *C* их элементов в установившемся синусоидальном режиме. Могут ли быть определены: *а*) *Z*-параметры четырехполюсников в строке *а*; *б*) *Y*-параметры четырехполюсников в строке *б*?

ЗАДАЧИ

1. (Р) Найдите *A*-, *Z*-, *Y*-параметры изображенных на рис. В13.4 четырехполюсников.

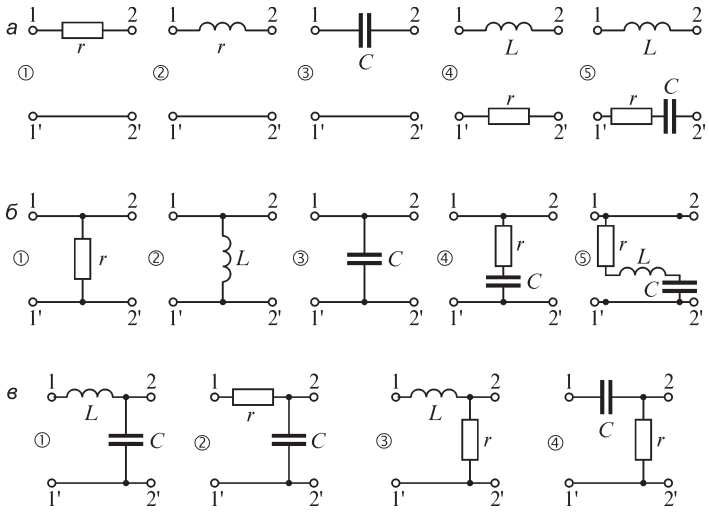


Рис. В13.3

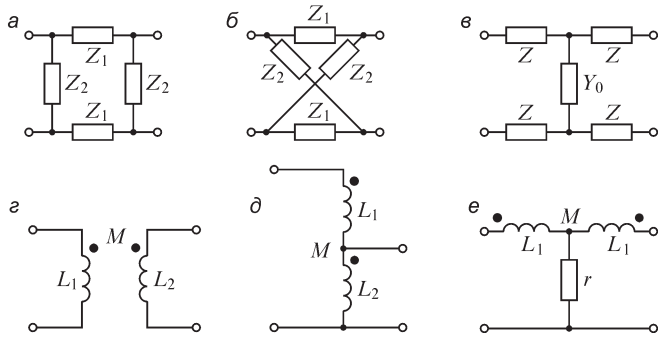


Рис. В13.4

2. (Р) Найдите Z-параметры четырехполюсника с входными зажимами *1–1′* и выходными *2–2′* (рис. В13.5) при заданных Z-параметрах четырехполюсника N.

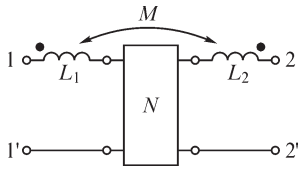


Рис. В13.5

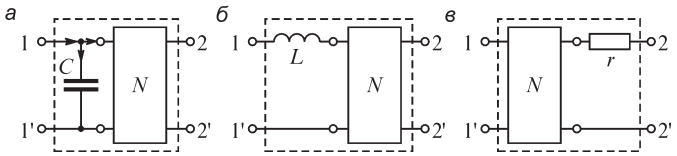


Рис. В13.6

3. (Р) A-параметры четырехполюсника N заданы. Найдите A-параметры изображенных на рис. В13.6 четырехполюсников.

13.2. Схемы, эквивалентные четырехполюснику

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) Можно ли утверждать, что число элементов простейшей эквивалентной схемы четырехполюсника всегда равно числу его независимых параметров?

2. Можно ли утверждать, что любой пассивный четырехполюсник имеет и Т-, и П-образную эквивалентные схемы?

3. Является ли симметричным четырехполюсник, если: *а*) в его Т-образной эквивалентной схеме $Y_0 = 0$ и $Z_1 \neq Z_2$; *б*) в его П-образной эквивалентной схеме $Z_0 = 0$ и $Y_1 \neq Y_2$.

4. Выразите параметры элементов Т- и П-образных эквивалентных схем четырехполюсников через заданные параметры четырехполюсников: *а*) $A = 0$, B, $C \neq 0$; *б*) $D = 0$, A, $C \neq 0$; *в*) $A = 0$, $D = 0$, $C \neq 0$; *г*) $B = 0$, A, $D \neq 0$; *д*) A, B, $C \neq 0$. Изобразите эти схемы.

5. (Р) Найдите параметры П-образной эквивалентной схемы изображенных на рис. В13.7 четырехполюсников при условии $\omega_0 L = 1/\omega_0 C$ (ω_0 — частота напряжения).

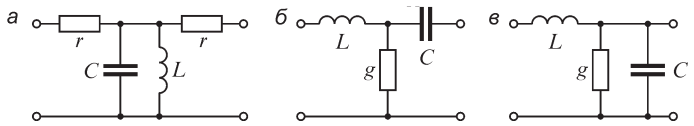


Рис. В13.7

6. (Р) Найдите параметры Т- и П-образных эквивалентных схем изображенных на рис. В13.8 четырехполюсников.

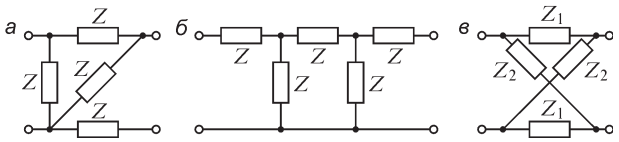


Рис. В13.8

7. (Р) Выразите параметры элементов Т- и П-образных эквивалентных схем симметричного четырехполюсника через его параметры B и C.

8. (Р) Постройте четырехполюсник, у которого при неизменном напряжении $\dot{U}_1$ на входе ток $\dot{I}_2$ на выходе сохраняется одним и тем же при любом сопротивлении $Z_{пр} \neq \infty$.

13.3. Экспериментальное определение параметров четырехполюсника

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) A-параметры двух различных четырехполюсников, найденные при частоте $\omega = \omega_0$, совпадают. Можно ли отличить четырехполюсники, *а*) выполняя опы-

ты холостого хода и (или) короткого замыкания на частоте $\omega = \omega_0$; *б*) выполняя те же опыты при частоте $\omega = 2\omega_0$?

2. Опыты определения параметров четырехполюсника производятся при напряжениях и токах, в 10 раз меньших номинальных. Можно ли использовать полученные результаты для анализа работы четырехполюсника в номинальном режиме?

3. Изобразите на рисунке четырехполюсник с подключеными к нему электроизмерительными приборами, необходимыми для определения его *A*-параметров.

4. (Р) Параметры *r*, *L*, *C* элементов изображенных на рис. В13.9 четырехполюсников заданы. Найдите их *A*-параметры при частоте $\omega = \omega_0$ по предварительно найденным сопротивлениям и проводимостям холостого хода и короткого замыкания.

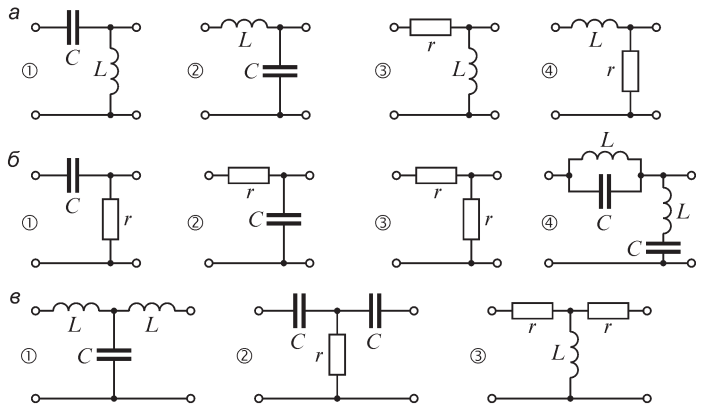


Рис. В13.9

5. (Р) При разомкнутых зажимах *2–2′* симметричного четырехполюсника *N* (рис. В13.10) показания приборов на его входе P_1, I_1, U_1, а при замкнутых накоротко — P_2, I_2, U_2. Найдите *A*-параметры четырехполюсника.

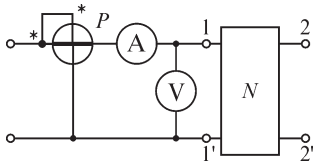


Рис. В13.10

6. (О) Предложите опыты для определения *A*-параметров четырехполюсника, отличные от опытов холостого хода и короткого замыкания.

7. Для некоторого четырехполюсника справедливо соотношение $Z_{11} = Z_{22} = 0$. Чему равны величины Z_{10} и Z_{20}?

13.4. Соединение четырехполюсников

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Возможно ли соединение четырехполюсников, не являющееся ни последовательным, ни каскадным, ни параллельным?

2. В какой системе параметров целесообразно записывать уравнения четырехполюсников при их *а*) каскадном; *б*) последовательном; *в*) параллельном соединениях?

3. Изобразите два четырехполюсника, которые на входе соединены последовательно, а на выходе — параллельно.

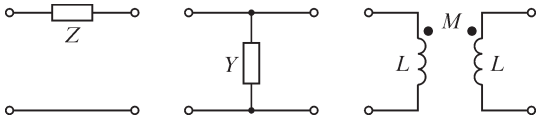


Рис. В13.11

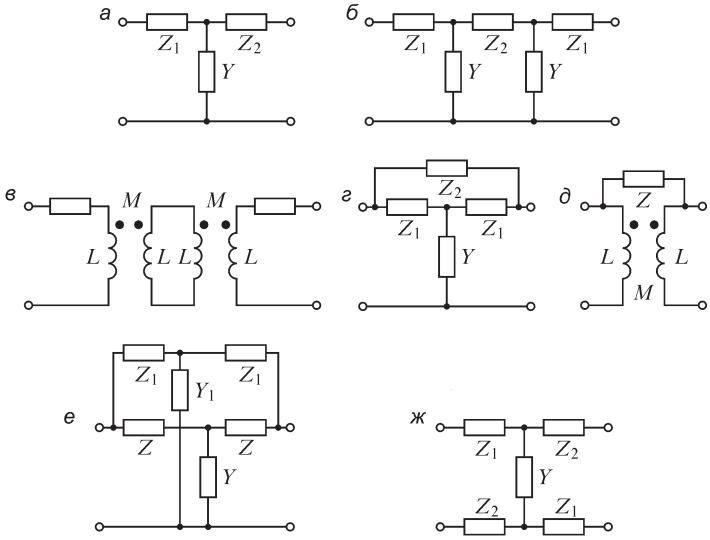


Рис. В13.12

4. (Р) Пользуясь тем, что параметры четырехполюсников (рис. В13.11) могут быть легко определены, найдите параметры четырехполюсников, изображенных на рис. В13.12: *A*-параметры для вариантов *а*, *б*, *в*; *Y*-параметры для вариантов *г*, *д*, *е*; *Z*-параметры для варианта *ж*.

13.5. Передаточные функции четырехполюсников

ВОПРОСЫ

1. Какими следует принимать начальные условия при нахождении передаточной функции четырехполюсника?

2. (О) Какие операции следует выполнить для получения передаточной функции $K(p) = X_2(p)/X_1(p)$ четырехполюсника при заданном дифференциальном уравнении, связывающем функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$?

3. Можно ли, имея выражение для передаточной функции $K(p) = X_2(p)/X_1(p)$ четырехполюсника, записать дифференциальное уравнение, связывающее функции $x_2(t)$ и $x_1(t)$?

4. (О) Передаточная функция цепи является операторным изображением характеристики цепи. Какой именно?

5. Зависит ли передаточная функция четырехполюсника от параметров подключенного к его выходу приемника?

6. (О) Передаточная функция симметричного четырехполюсника равна $K(p) = U_2(p)/U_1(p)$. Передаточная функция $K_1(p) = U_1(p)/U_2(p)$ этого же четырехполюсника, как следует из сопоставления $K(p)$ и $K_1(p)$, равна $K_1(p) = 1/K(p)$. Однако рассматриваемый четырехполюсник симметричен, и, следовательно, в силу симметрии должно выполняться равенство $K_1(p) = K(p)$. Как объяснить это противоречие?

7. (О) Порядок полинома числителя передаточной функции $K(p)$ пассивного четырехполюсника равен 4, знаменателя 5. Изменение аргумента функции $K(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до $+\infty$ составило $-5\pi/2$. Сколько нулей полинома числителя передаточной функции расположено в правой полуплоскости?

8. (О) Порядок полинома знаменателя передаточной функции $K(p)$ пассивного четырехполюсника $n = 9$, а его числителя $m = 3$. Изменение аргумента функции $K(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до $+\infty$ составило -4π. Является ли четырехполюсник минимально-фазовым?

9. (О) В чем заключается преимущество дифференцирующих и интегрирующих RC-цепей в сравнении с RL-цепями?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Найдите Z-параметры четырехполюсника, являющегося частью изображенных на рис. В13.13 схем. Получите выражения для передаточных функции $K(p) = U_2(p)/U_1(p)$.

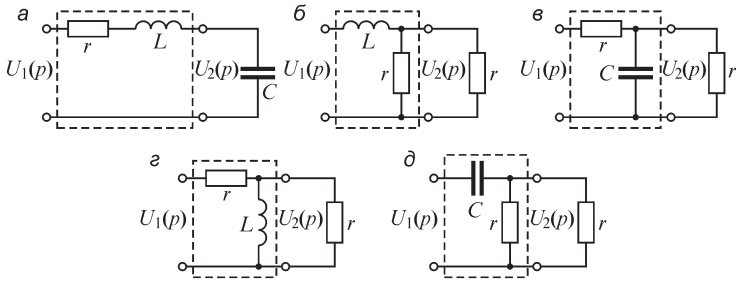


Рис. В13.13

2. (Р) Получите выражение для передаточных функций $K(p) = X_2(p)/X_1(p)$ четырехполюсников при *а*) $x_1(t) = u_1(t) = U_0$, $x_2(t) = i_2(t) = I_0\, e^{\alpha t}$; *б*) $x_1(t) = u_1(t) = U_0$, $x_2(t) = u_2(t) = U_0(1 - e^{\alpha t})$; *в*) $x_1(t) = i_1(t) = I_{m1} \sin \omega t$, $x_2(t) = i_2(t) = I_{m2} \cos \omega t$.

3. (Р) Получите амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики четырехполюсников, рассмотренных в предыдущей задаче.

4. Определите полюсы и нули передаточной функции $K(p) = U_2(p)/U_1(p)$ четырехполюсников (рис. В13.14) по предварительно вычисленным величинам $Z_{10}(p)$, $Z_{20}(p)$, $Z_{21}(p)$.

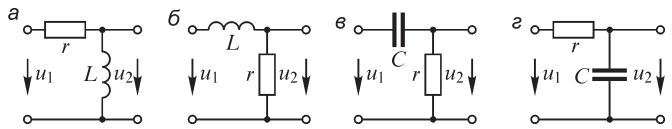


Рис. В13.14

5. (Р) Найдите передаточные функции $K(p) = U_2(p)/U_1(p)$ изображенных на рис. В13.15 четырехполюсников, содержащих усилитель напряжения с коэффициентом усиления k.

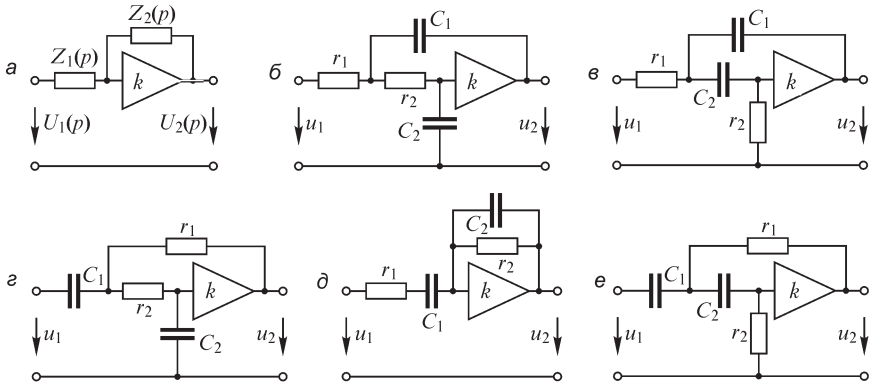


Рис. В13.15

6. (Р) Запишите выражения для передаточных функций $K(p) = U_2(p)/U_1(p)$ изображенных на рис. В13.16 четырехполюсников с операционным усилителем, принимая его коэффициент усиления бесконечным.

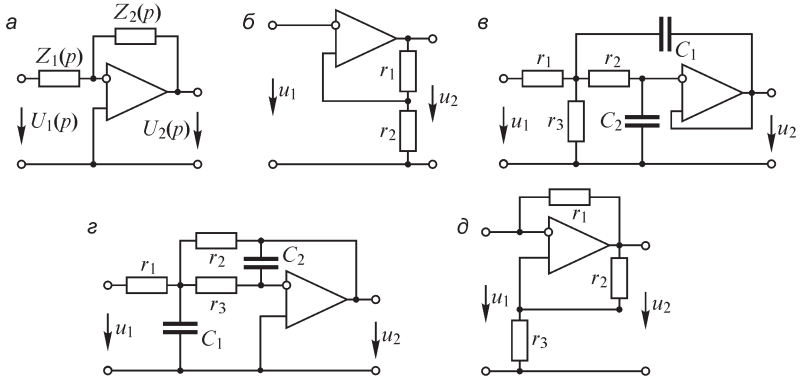


Рис. В13.16

ЗАДАЧИ

1. (Р) Найдите передаточные функции $K_U(p) = U_2(p)/U_1(p)$ и $K_I(p) = I_2(p)/I_1(p)$ изображенных на рис. В13.17 цепей. Покажите на комплексной плоскости их нули и полюсы, постройте качественные амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики.

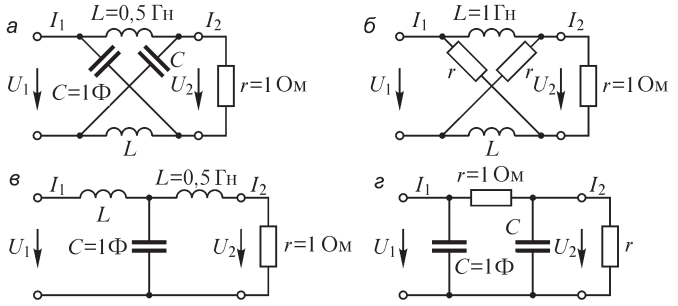


Рис. В13.17

2. (Р) Найдите передаточные функции $K(p) = U_2(p)/U_1(p)$ изображенных на рис. В13.18 цепей и постройте на комплексной плоскости с осями Re $K(j\omega)$, Im $K(j\omega)$ качественные кривые годографов их амплитудно-фазовых частотных характеристик $K(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞.

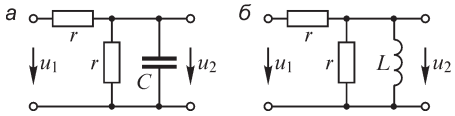


Рис. В13.18

3. (Р) Ко входу дифференцирующей rL цепи в момент времени $t = 0$ подключают источник ЭДС, напряжение которого изменяется по закону $u_{вх} = at$, где $a = \text{const}$. Определите момент времени t_1, начиная с которого $u_{вых}(t)$ будет отличаться от величины $\frac{L}{r}\frac{du_{вх}}{dt}$ не более, чем на 10 %.

4. (Р) Ко входу интегрирующей rC цепи в момент времени $t = 0$ подключают постоянное напряжение $u_{вх} = U_0$. Определите момент времени t_1, до которого напряжение на выходе будет отличаться от величины $\frac{1}{rC}\int_0^t u_{вх}(t)\,dt$ не более чем на 10 %.

13.6. Обратные связи

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Запишите передаточную функцию $K'(p)$ в виде отношения полиномов оператора p для системы, состоящей из основного устройства с передаточной функцией $K(p)$ и устройства обратной связи с передаточной функцией $W(p)$:

а) $K(p) = \frac{k}{p}$, $W(p) = \beta$; *б*) $K(p) = \frac{k}{1+Tp}$, $W(p) = \beta$; *в*) $K(p) = \frac{k}{1+Tp}$, $W(p) = \frac{\beta}{p}$;

г) $K(p) = \frac{k}{(1+T_1p)(1+T_2p)}$, $W(p) = \beta$; *д*) $K(p) = = \frac{k}{(1+T_1p)(1+T_2p)}$, $W(p) = \frac{\beta}{p}$.

2. (Р) Величина $\Delta k/k$ характеризует нестабильность коэффициента усиления усилителя (здесь Δk — изменение коэффициента усиления). Во сколько раз изменится эта величина при охвате усилителя обратной связью с коэффициентом

обратной связи β? Зависит ли нестабильность от вида обратной связи (положительная или отрицательная обратная связь)?

3. (Р) Во сколько раз изменяется величина T, характеризующая инерционность усилителя с передаточной функцией $K(p) = \dfrac{k}{Tp+1}$, при охвате его отрицательной обратной связью с передаточной функцией цепи обратной связи $W(p) = \beta$?

4. (Р) Найдите коэффициент T_1 передаточной функции $W(p) = T_1 p$ устройства, которое, будучи включенным в цепь обратной связи основного устройства с передаточной функцией $K(p) = \dfrac{k}{Tp+1}$, уменьшает величину T в n раз, сохраняя неизменным коэффициент k.

14.1. Характеристические параметры четырехполюсника

ВОПРОСЫ

1. Цепная схема содержит n согласованно соединенных симметричных четырехполюсников. При каком соотношении между сопротивлениями нагрузки $Z_н$ и генератора $Z_г$ цепная схема характеристически согласована?

2. (О) Как изменятся условия согласования звеньев цепной схемы при подключении ко входу первого звена источника тока с внутренней проводимостью Y вместо источника ЭДС?

3. Четырехполюсник используют для согласования источника и приемника. Может ли он быть симметричным?

4. Звеньями цепной схемы являются пассивные четырехполюсники. Может ли коэффициент затухания α схемы быть отрицательным?

5. (О) Четырехполюсник содержит один реактивный элемент и резисторы. Каковы максимально и минимально возможные значения коэффициента фазы?

6. Зависят ли от частоты: *а*) характеристические сопротивления четырехполюсника; *б*) коэффициенты затухания α и фазы β?

7. (О) Можно ли утверждать, что если при частоте ω входного напряжения соединение четырехполюсников является характеристически согласованным, то при любой другой частоте оно таким и сохранится? Какому требованию должны удовлетворять сопротивления $Z_г$, $Z_н$, а также сопротивления элементов четырехполюсников, чтобы условие характеристически согласованного соединения выполнялось при любой частоте?

8. (О) Можно ли рассчитать передаточные функции по напряжению и току неоднородной цепной схемы, используя выражения $K_U = \sqrt{\dfrac{Z_{n+1,с}}{Z_{1,с}}}\, e^{-\sum_{k=1}^{n}\Gamma_k}$, $K_I = \sqrt{\dfrac{Z_{1,с}}{Z_{n+1,с}}}\, e^{-\sum_{k=1}^{n}\Gamma_k}$, где $Z_{1,с}$, $Z_{n+1,с}$ — характеристические сопротивления, $_k$ — мера передачи при частоте напряжения источника, отличной от частоты, при которой соединение звеньев характеристически согласовано?

9. (О) Мера передачи цепной схемы равна сумме мер передач звеньев. При каком способе введения меры передачи Г взамен обычно принятого $\Gamma = \frac{1}{2}\ln\frac{\dot{U}_1\dot{I}_1}{\dot{U}_2\dot{I}_2}$ она будет равной произведению мер передачи звеньев?

10. (О) Четырехполюсники цепной схемы состоят из пассивных элементов. Могут ли величины K_U, K_I принимать значения: *а*) $|K_U| > 1$, $|K_I| < 1$; *б*) $|K_U| < 1$, $|K_I| > 1$; *в*) $|K_U| > 1$, $|K_I| > 1$; *г*) $|K_U| < 1$, $|K_I| < 1$?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Рассчитайте характеристические параметры четырехполюсников, схемы которых приведены на рис. В14.1. Сопротивления указаны в омах, индуктивности — в миллигенри, емкости — в микрофарадах. Частота f напряжения равна 50 Гц. Расчет выполните двумя способами: *а*) используя предварительно найденные A-параметры; *б*) вычисляя на первом этапе величины Z_{10}, $Z_{1к}$, Z_{20}.

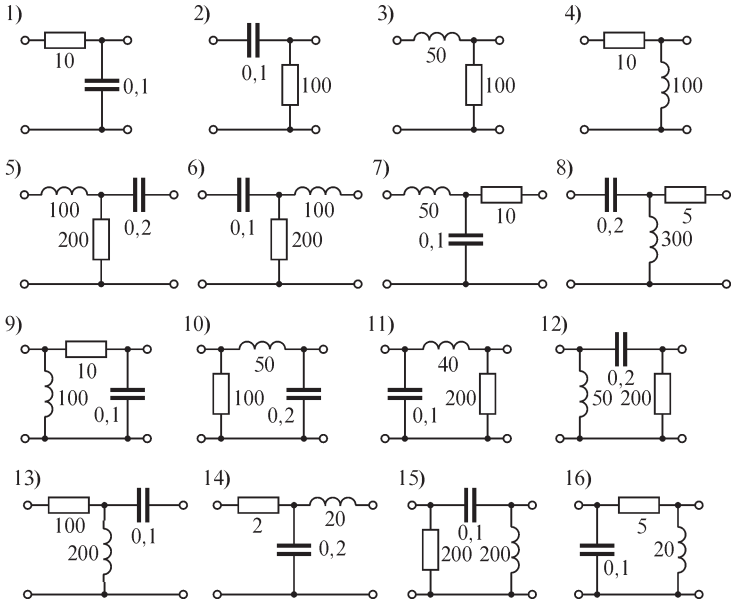


Рис. В14.1

2. (Р) Рассчитайте передаточные функции по напряжению и току четырехполюсников (при условии их согласования), схемы которых изображены на рис. В14.1, двумя способами: *а*) используя найденные в предыдущем упражнении характеристические параметры; *б*) вычисляя непосредственно отношения величин $\dot{U}_{вх}$ и $\dot{U}_{вых}$, $\dot{I}_{вх}$ и $\dot{I}_{вых}$.

3. Рассчитайте A-параметры, а также параметры эквивалентных Т- и П-схем четырехполюсника, включенного для согласования источника ЭДС с внутренним сопротивлением $Z_1 = (1 + j)$ Ом и приемника с сопротивлением $Z_{пр} = (1 - j)$ Ом при частоте ЭДС $f = 50$ Гц. Заданное значение меры передачи Г = 10 дБ.

4. (Р) Рассчитайте передаточные функции по напряжению согласованных цепных схем, изображенных на рис. В14.2. Сопротивления резисторов и конденсаторов указаны в омах.

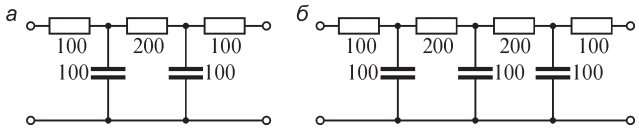


Рис. В14.2

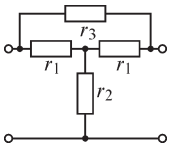


Рис. В14.3

5. (Р) Для ослабления напряжения на заданную величину применяют изображенную на рис. В14.3 электрическую цепь (называемую аттенюатором). Рассчитайте параметры r_1, r_2, r_3 цепи, обеспечивающей ослабление напряжения на 1 Нп при $Z_C = 100$ Ом и условии $r_1^2 = r_2 r_3$.

14.2. Электрические фильтры

ВОПРОСЫ

1. Какие значения принимают коэффициент затухания и модуль передаточной функции по напряжению идеального фильтра в полосе: *а*) пропускания; *б*) задерживания?

2. Почему при каскадном соединении звенья многозвенных фильтров должны быть характеристически согласованы?

3. К каким качественным изменениям характеристик $\alpha(\omega)$ приводит замена согласованной нагрузки фильтра на несогласованную?

4. (О) Обладают ли фильтрующими свойствами изображенные на рис. В14.4 цепи?

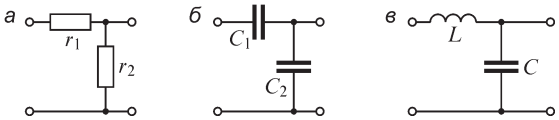


Рис. В14.4

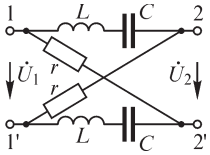


Рис. В14.5

5. У одного из фильтров характеристические сопротивления существенно зависят от частоты в полосе пропускания, а у другого — незначительно. Какой из них целесообразно использовать при прочих равных условиях (одинаковый коэффициент затухания, одинаковое число элементов фильтров)?

6. (О) Коэффициент затухания фильтра в полосе пропускания равен нулю. На его вход подается сигнал, спектр которого у́же полосы пропускания фильтра. При каком условии сигнал проходит через фильтр без искажения?

7. (О) Почему коэффициент фазы идеального фильтра линейно зависит от частоты в полосе пропускания?

8. (О) Одинаковы ли в ощем случае сигналы на входе и выходе цепи, изображенной на рис. В14.5, у которой коэффициент затухания $\alpha = 0$ при любой частоте?

9. (О) К чему приводит отклонение от линейной зависимости $\beta = k\omega$ коэффициента фазы при передаче сигнала через фильтр?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Изобразите зависимость коэффициента затухания $\alpha(\omega)$ идеальных фильтров: *а*) нижних частот; *б*) верхних частот; *в*) полосового; *г*) заграждающего от частоты ω.

2. (О) Получите выражения для характеристических параметров Z_{c1}, Z_{c2}, $\Gamma = \alpha + j\beta$ изображенных на рис. В14.6 фильтров, вычисляя предварительно их сопротивления в режимах холостого хода и короткого замыкания. Значения сопротивлений на схеме указаны в омах, индуктивностей — в миллигенри, емкостей конденсаторов — в микрофарадах, $f = 500$ Гц.

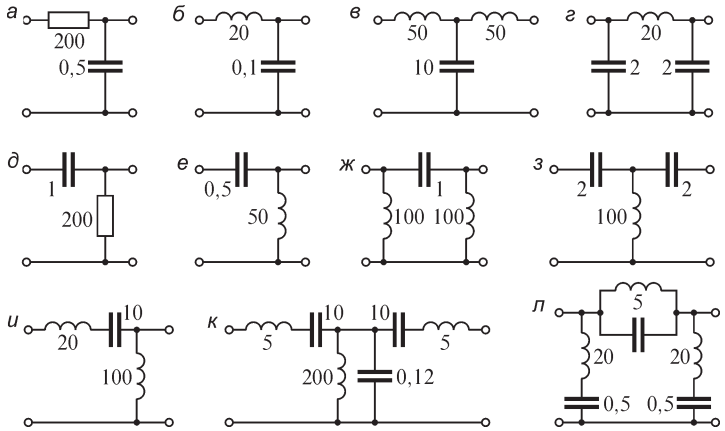


Рис. В14.6

3. (О) Рассчитайте и постройте зависимости коэффициента затухания $\alpha(\omega)$ и коэффициента фазы $\beta(\omega)$ фильтров, схемы которых изображены на рис. В14.6, при условии их согласования с сопротивлениями источника и приемника при всех частотах. Сравните построенные зависимости $\alpha(\omega)$ с аналогичными, полученными при питании фильтров от идеального источника ЭДС и сопротивлении приемника $r_{пр} = 200$ Ом.

4. (О) Найдите параметры Z_1 и Z_2 Г-образного фильтра, включенного между источником с внутренним сопротивлением $Z_и$ и приемником с сопротивлением $Z_{пр}$ и согласующего источник и приемник.

5. (Р) Получите выражения для амплитудно-частотной характеристики и постройте зависимость $K(\omega)$ для изображенных на рис. В14.7 фильтров: *а* — нижних частот; *б* — верхних частот. Примите следующие параметры элементов: *а*) $r_1 = 75$ кОм, $r_2 = 3{,}94$ кОм, $C_1 = 10^{-7}$ Ф, $C_2 = 9{,}5 \cdot 10^{-7}$ Ф, $k = 10$; *б*) $r_1 = 39{,}3$ кОм, $r_2 = 717$ Ом, $C_1 = C_2 = 10^{-7}$ Ф, $k = 100$.

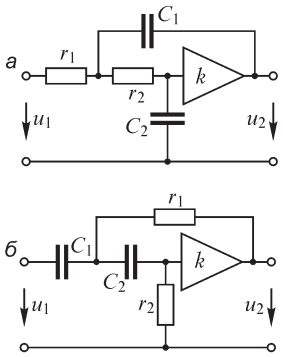


Рис. В14.7

14.3. Электрические фильтры нижних частот типов *k* и *m*

ВОПРОСЫ

1. Можно ли построить фильтр верхних частот типа *k*?

2. (О) К каким качественным изменениям зависимости $\alpha(\omega)$ Г-звена, изображенной на рис. В14.8, приведет соединение нескольких Г-звеньев, при условии согласования их между собой, с источником и нагрузкой?

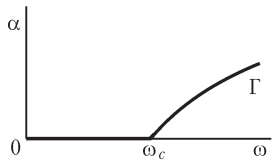


Рис. В14.8

3. Можно ли построить фильтр верхних частот типа *m*?

4. (О) Одинакова ли полоса пропускания звена-прототипа и производных от него звеньев?

5. (О) Какими положительными и отрицательными качествами характеризуется Г-образное звено фильтра нижних частот, содержащее как параллельный, так и последовательный *LC*-контуры одновременно?

6. Можно ли с помощью метода преобразования частоты построить фильтр нижних частот, имея схему фильтра верхних частот?

7. Можно ли применить метод преобразования частоты для получения фильтров, не принадлежащих к типам *k* и *m*?

8. (О) Как изменятся характеристики $\alpha(\omega)$, $\dfrac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)}$ фильтров нижних и верхних частот при преобразовании частоты в соответствие с формулой $p(s) = bs$?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (Р) Фильтр нижних частот типа *k* имеет параметры элементов $L = 0{,}1\cdot10^{-3}$ Гн, $C = 64\cdot10^{-8}$ Ф. Рассчитайте частоту среза ω_c, а также зависимости $Z_{c\,т}(\omega)$, $Z_{c\,п}(\omega)$. Постройте зависимости $\alpha = \alpha(\omega)$, $\beta = \beta(\omega)$ и найдите частоту, при которой: *а*) коэффициент затухания α равен 3 дБ; *б*) коэффициент фазы β равен $\pi/4$.

2. (Р) Рассчитайте параметры *LC*-фильтра нижних частот, нагруженного на приемник сопротивлением $r_{пр} = 10$ Ом и подключенного к источнику с внутренним сопротивлением $r_и = 10$ Ом. Частота среза фильтра $\omega_c = 10^3$ с$^{-1}$.

3. Рассчитайте частоты среза фильтров нижних частот, схемы которых изображены на рис. В14.6 (варианты *б*, *в*).

4. (Р) *LC*-фильтр нижних частот ($L = 0{,}2$ Гн, $C = 0{,}2$ мкФ) согласован с источником и приемником. На входе фильтра действует напряжение $u(t) = 2\sin 0{,}4\cdot10^4 t + 2\sin 1{,}5\cdot10^4 t$ В. Рассчитайте напряжение на выходе фильтра.

5. Рассчитайте параметры последовательно-производного фильтра нижних частот типа *m* и необходимое число звеньев при заданных частоте среза $\omega_c = 10$ с$^{-1}$, сопротивлении приемника $r_{пр} = 10$ Ом, коэффициента затухания $\alpha = 20$ дБ при $\omega = 1{,}2\omega_c$.

14.4. Электрические фильтры нижних частот

УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) При максимально плоской аппроксимации характеристики $K(\omega) = U_2/U_1$ идеального фильтра нижних частот используют функцию $f(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\omega_1^{2n}}}$, где ε — параметр, $\omega_1 = \omega/\omega_c$, ω_c — частота среза, $n = 1, 2, \ldots$ — порядок фильтра. Изобразите функцию $f(\omega)$ при $\varepsilon = 0{,}5$, $\varepsilon = 1$, $n = 1$, $n = 2$.

2. (Р) Рассчитайте значение параметра ε, входящего в выражение аппроксимирующей функции $f(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\omega^{2n}}}$, при котором неравномерность коэффициента затухания фильтра низкой частоты в полосе пропускания не превысит значения $\Delta\alpha = 3$ дБ.

3. (Р) Заданная неравномерность коэффициента затухания фильтра нижних частот в полосе пропускания составляет $\Delta\alpha = 2$ дБ. Найдите порядок фильтра при максимально плоской аппроксимации его характеристики $K(\omega)$, при котором коэффициент затухания при частоте сигнала $\omega \geq 2\omega_c$ превышает 10 дБ.

4. (Р) Найдите соотношение между параметрами rC-фильтра нижних частот при максимально плоской аппроксимации его характеристики $K(\omega)$ и неравномерности коэффициента затухания $\Delta\alpha = 3$ дБ в полосе пропускания. Рассчитайте значение коэффициента затухания при частоте сигнала $\omega = 2\omega_c$ ($r_{пр} = \infty$).

5. (Р) Найдите соотношение между параметрами r, L, C фильтра нижних частот второго порядка (рис. В14.9) при максимально плоской аппроксимации его характеристики $K(\omega)$ и неравномерности коэффициента затухания $\Delta\alpha = 3$ дБ в полосе пропускания ($r_{пр} = \infty$).

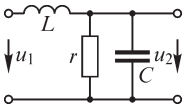


Рис. В14.9

6. (О) Запишите амплитудные и фазовые частотные характеристики фильтров (см. упр. 5, §13.5, схемы вариантов *б*, *в*, *г*, *д*, *е*), используя полученные выражения для их передаточных функций.

14.5. Устойчивость в электрических цепях

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) Может ли быть неустойчивой линейная *а*) пассивная электрическая цепь; *б*) электрическая цепь, не содержащая независимых источников; *в*) электрическая цепь с зависимыми источниками?

2. Может ли быть неустойчивой электрическая цепь, не содержащая реактивных элементов?

3. (Р) В цепи обратной связи усилителя с коэффициентом усиления $K(p) = k$ включено устройство с передаточной функцией $W(p) = 1/(Tp+1)$. Может ли эта система быть неустойчивой ($k > 0$)?

4. (Р) Усилитель с коэффициентом усиления k охвачен отрицательной обратной связью. Передаточная функция устройства обратной связи

$$а)\ W(p) = \frac{1}{a_0 p^2 + a_1 p + 1};\quad б)\ W(p) = \frac{1}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + 1}.$$

Может ли система быть неустойчивой? (a_0, a_1, $a_2 > 0$)

5. (Р) Усилитель с передаточной функцией $K' = k/(Tp + 1 - \beta k)$ неустойчив. Для стабилизации его охватывают отрицательной обратной связью, причем передаточная функция устройства обратной связи суть $W_{ос}(p) = \alpha$. При каких α он будет устойчивым? ($k > 0$)

6. (Р) Используя выражение для передаточной функции, полученное в упр. 5 § 13.5, найдите соотношение между параметрами электрической цепи (рис. В14.10), при выполнении которого цепь становится неустойчивой.

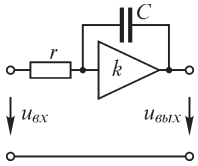


Рис. В14.10

7. (О) Определите соотношение параметров элементов электрических цепей, изображенных на рис. В13.15, при котором цепи устойчивы.

8. (Р) Характеристическое уравнение устойчивой системы имеет вид $b_6 p^6 + b_5 p^5 + b_4 p^4 + b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0 = 0$. Устойчива ли система, характеристическое уравнение которой $b_0 p^6 + b_1 p^5 + b_2 p^4 + b_3 p^3 + b_4 p^2 + b_5 p + b_6 = 0$?

9. (Р) Устойчивы ли системы, характеристические уравнения которых имеют вид:

а) $3p^3 + p^2 + 2p + 1 = 0$; *б*) $p^4 + p^3 + 3p^2 + 2p + 1 = 0$; *в*) $p^4 + 3p^3 + 2p + 1 = 0$;
г) $p^5 + 3p^4 + 2p^3 + p^2 + 4p + 1 = 0$; *д*) $p^5 + 3p^4 + 2p^3 + p^2 + 4p = 0$;
е) $p^5 + 3p^4 + p^2 + 4p + 1 = 0$; *ж*) $p^5 + 3p^4 + 3p^3 + 5p^2 + p + 1 = 0$;
з) $7p^7 + 6p^6 + 4p^5 + 5p^4 + p^3 + 2p^2 + 3p - 1 = 0$.

10. (Р) С помощью критерия Гурвица найдите соотношения между параметрами элементов и коэффициентом K усиления усилителя для схем (см. рис. В13.15), при которых цепи будут устойчивы.

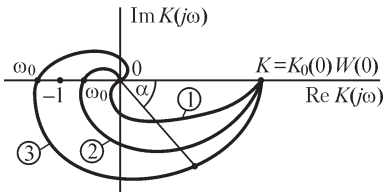


Рис. В14.11

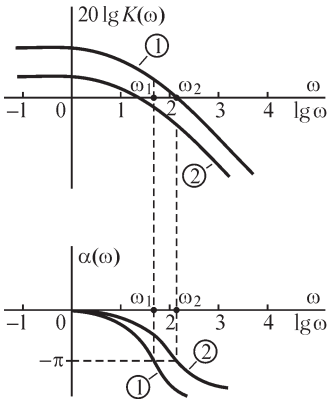


Рис. В14.12

11. (О) На рис. В14.11 изображены годографы $K(j\omega)$ амплитудно-фазовых частотных характеристик трех систем с разомкнутой цепью отрицательной обратной связи (передаточная функция разомкнутой системы суть $K(p) = K_0(p)W(p)$, где $K_0(p)$, $W(p)$ — передаточные функции основного устройства и устройства обратной связи). Какие из систем устойчивы при замыкании цепи обратной связи?

12. (О) На рис. В14.12 изображены логарифмические амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики двух систем с разомкнутыми цепями единичной отрицательной обратной связи. Какая из систем устойчива при замыкании цепи обратной связи?

Глава пятнадцатая

Синтез электрических цепей

15.1. Задача синтеза электрических цепей

Все изложенное ранее относилось к анализу процессов в электрических цепях, т. е. к исследованию изменений во времени токов и напряжений в заданной электрической цепи. Однако исключительное значение имеет обратная задача — построить такую электрическую цепь, процессы в которой будут протекать по заданному закону. Решение подобных задач, обратных задаче анализа, носит наименование с и н т е з а э л е к т р и ч е с к и х ц е п е й.

Пусть ставится задача создать цепь с требуемыми характеристиками из линейных элементов. Входная величина (напряжение или ток) является заданной функцией времени $x_1(t)$. Ее операторное изображение $X_1(p)$, следовательно, также известно. Задан также и требуемый закон изменения во времени выходной величины $x_2(t)$ (напряжения или тока), и, соответственно, известно ее операторное изображение $X_2(p)$.

Таким образом, имеем выражение $K(p) = X_2(p)/X_1(p)$ для передаточной функции, которой должна обладать создаваемая электрическая цепь, преобразующая $x_1(t)$ в $x_2(t)$.

Задача, следовательно, состоит в том, чтобы по заданному операторному выражению передаточной функции $K(p)$ цепи или, соответственно, по заданной частотной характеристике $K(j\omega)$ цепи построить конкретную цепь, обладающую такой характеристикой или хотя бы характеристикой, близкой к заданной.

Входные сопротивление или проводимость двухполюсника можно представить как частные случаи передаточной функции, если в качестве входной функции рассматривать одну из величин — ток или напряжение на входе, а в качестве выходной — другую из этих величин: напряжение или ток на входе. Нередко для общности и краткости входные и передаточные функции цепи называют просто ф у н к ц и я м и ц е п и и обозначают через $F(p)$.

Функции цепи для линейных цепей с сосредоточенными параметрами являются рациональными дробями комплексной частоты $p = \sigma + j\omega$. Их свойства, а следовательно, и свойства описываемых ими электрических цепей однозначно определяются распределением нулей и полюсов этих функций. Функции цепи могут быть представлены также в виде частотных характеристик.

При анализе электрических цепей мы видели, что различные электрические цепи могут иметь одинаковую по виду функцию цепи. Например, две различные цепи на рис. 13.13 являются дифференцирующими цепями и имеют одинаковый вид передаточной функции, а также две различные цепи на рис. 13.14 являются интегрирующими и обладают передаточными функциями одинакового вида. Уже отсюда видно, что одна и та же задача синтеза может иметь различные конкретные решения, т. е. решение ее неоднозначное.

В некоторых случаях, наоборот, конкретное решение задачи синтеза с помощью линейных пассивных цепей может отсутствовать, например, если для реа-

лизации заданной функции требуется иметь в цепи отрицательное активное сопротивление.

В связи с этим возникают следующие основные вопросы синтеза цепи по заданной функции цепи $F(p)$.

Первым вопросом является выяснение возможности физической реализации цепи, соответствующей заданной функции $F(p)$, с помощью обычных элементов — конденсаторов, катушек, резисторов.

Если функция задана графически в виде частотной характеристики или явной функции времени, то в связи с этим вопросом возникает задача ее аналитической аппроксимации таким образом, чтобы физическая реализация цепи была возможной.

Вторым вопросом синтеза является разработка метода конкретной реализации заданной функции сначала в виде схемы цепи, а затем и в виде физической электрической цепи. При этом важным представляется выбор рационального пути реализации ввиду указанной ранее многозначности решения задачи; в частности, оказываются возможными эквивалентные преобразования схемы цепи с целью уменьшения числа ее элементов.

Для выработки требований, предъявляемых к функции $F(p)$ в отношении ее реализуемости при помощи пассивных элементов электрических цепей, рассмотрим в следующем параграфе некоторые свойства входных функций $Z(p)$ и $Y(p)$ электрических цепей.

15.2. Свойства входных функций пассивных электрических цепей

В настоящем и в четырех последующих параграфах будем рассматривать входные операторные и комплексные сопротивления и проводимости, т. е. входные функции двухполюсников, так как для них можно наиболее легко уяснить условие физической реализации заданной функции $F(p)$ с целью синтеза двухполюсников. В последнем параграфе главы рассмотрим более сложный вопрос — о синтезе четырехполюсников по заданной передаточной функции.

Сформулируем основные свойства входных функций пассивных электрических цепей, установленные или же вытекающие из рассмотренного ранее.

Первым свойством входных операторных сопротивлений $Z(p)$ и проводимостей $Y(p)$ пассивных электрических цепей является то, что они будут вещественными при вещественных значениях p ($p = \sigma$). Действительно, коэффициенты полиномов от p в числителе и знаменателе величин $Z(p)$ и $Y(p)$ являются вещественными, так как они образуются суммами, разностями, произведениями и частными от деления вещественных параметров R, L, C участков цепи. Поэтому при p вещественном $Z(p)$ и $Y(p)$ будут вещественными.

Второе свойство величин $Z(p)$ и $Y(p)$, отмеченное в § 10.6, заключается в том, что их полюсы и нули располагаются только в левой полуплоскости комплексного оператора $p = \sigma + j\omega$ (комплексной частоты) или на оси мнимых, т. е. $\sigma_k \leq 0$, причем в случае $\sigma_k = 0$ полюсы и нули простые. При этом все коэффициенты полиномов от p, стоящих в числителе и в знаменателе рациональных дробей, выра-

жающих $Z(p)$ и $Y(p)$, положительны. Действительно, разложив полином на множители:

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_0 = a_n(p - p_n)(p - p_{n-1})\ldots(p - p_1),$$

будем иметь для каждой пары сопряженных комплексных корней $\dot{p}_k$ и $\dot{p}_{k+1} = \overset{*}{\dot{p}}_k$ произведения множителей вида

$$(p - \dot{p}_k)(p - \overset{*}{\dot{p}}_k) = (p - \sigma_k - j\omega_k)(p - \sigma_k + j\omega_k) = (p - \sigma_k)^2 + \omega_k^2$$

и для вещественных корней p_i множители вида $p - p_i = p - \sigma_i$. Отсюда видно, что если все $\sigma_k \le 0$ и $\sigma_i \le 0$, то множители, на которые разложен полином, не содержат отрицательных чисел и, следовательно, все коэффициенты a_n, a_{n-1}, ..., a_0 полинома положительны.

Третьим важным свойством рассматриваемых функций является то, что их вещественная часть положительна или равна нулю: $\mathrm{Re}\,[Z(p)] \ge 0$ и $\mathrm{Re}\,[Y(p)] \ge 0$, т. е. не отрицательна при условии, что $\sigma \ge 0$. Действительно, пусть $\sigma = 0$, т. е. $p = j\omega$. В этом случае $Z(j\omega)$ и $Y(j\omega)$, как было указано в § 10.3, являются обычными комплексными сопротивлением и проводимостью. При наличии отличающегося от нуля положительного активного сопротивления хотя бы в одной ветви двухполюсника активная мощность на входе двухполюсника положительна и, следовательно, активное сопротивление и активная проводимость всего двухполюсника также положительны, т. е. $\mathrm{Re}\,[Z(j\omega)] > 0$. Когда в цепи имеются только реактивные элементы, то $\mathrm{Re}\,[Z(j\omega)] = 0$. Покажем теперь, что $\mathrm{Re}\,[Z(p)] > 0$ даже для чисто реактивной цепи, если $\sigma > 0$. Например, для цепи на рис. 15.1, *а* имеем в этом случае выражение для операторного сопротивления:

$$Z(p) = pL + \frac{1}{pC} = (\sigma + j\omega)L + \frac{1}{(\sigma + j\omega)C} = \sigma L + j\omega L + \frac{1}{\sigma C + j\omega C}.$$

Это выражение по форме полностью совпадает с выражением для комплексного сопротивления $Z(j\omega) = r + j\omega L + 1/(g + j\omega C)$ цепи, изображенной на рис. 15.1, *б*. Последнее при $r > 0$ и $g > 0$ имеет вещественную часть больше нуля, точно так же и вещественная часть операторного сопротивления $Z(p)$ цепи на рис. 15.1, *а* при $\sigma > 0$ больше нуля. Для любой сложной цепи, состоящей только из реактивных элементов, аналогично может быть построена цепь, содержащая активные элементы, причем последовательно с каждой катушкой L_i добавляется сопротивление $r_i = \sigma L_i$ и параллельно каждому конденсатору C_i добавляется проводимость $g_i = \sigma C_i$. При этом операторное входное сопротивление $Z(p)$ реактивной цепи при $p = \sigma + j\omega$ и $\sigma > 0$ будет по форме совершенно аналогичным комплексному сопротивлению $Z(j\omega)$ всей цепи с добавленными активными элементами. Активное сопротивление последней цепи $r = \mathrm{Re}\,[Z(j\omega)]$ больше нуля из физических соображений, так как для нее активная мощность положительна. Следовательно, и $\mathrm{Re}\,[Z(p)] > 0$ при $\sigma > 0$ для реактивной цепи. Это условие и подавно имеет место для цепи, содержащей активные сопротивления и проводимости.

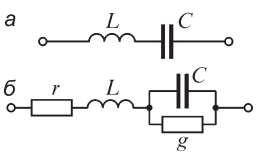


Рис. 15.1

Функции, обладающие указанными выше свойствами, называют положительными вещественными функциями.

Из изложенного вытекает, что для того чтобы рациональная дробь

$$F(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_0} = \frac{G(p)}{Q(p)}$$

представляла собой операторное выражение входной функции и могла быть реализована в виде конкретной электрической цепи, она должна удовлетворять перечисленным требованиям, т. е. числитель и знаменатель должны иметь нули в левой полуплоскости или на оси мнимых, все коэффициенты a_k и b_k должны быть вещественными и положительными и, наконец, должно быть $\mathrm{Re}\,[F(p)] \geq 0$ при $\mathrm{Re}\,(p) = \sigma \geq 0$.

Кроме того, в соответствии с изложенным в § 6.6 степени n и m полиномов числителя и знаменателя не должны отличаться друг от друга более чем на единицу.

15.3. Представление входных функций в виде простых дробей

Входную функцию $F(p)$, являющуюся рациональной дробью, можно представить в виде суммы двучлена $A_\infty p + A_0$ и простых дробей:

$$F(p) = \frac{G(p)}{Q(p)} = A_\infty p + A_0 + \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \ldots + \frac{A_m}{p - p_m},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_m$ — корни знаменателя $Q(p)$. При этом $A_\infty \neq 0$, если степень n числителя на единицу больше степени m знаменателя. Случай $A_\infty = 0$ и $A_0 \neq 0$ имеет место, если $n = m$. Когда $n = m - 1$, коэффициенты $A_\infty = 0$ и $A_0 = 0$. Индекс ∞ у первого коэффициента A_∞ имеет тот смысл, что этот коэффициент при $n = m + 1$ определяется из выражения для $F(p)$, приведенного в конце предыдущего параграфа в виде $A_\infty = \left|\frac{F(p)}{p}\right|_{p=\infty} = \frac{a_n}{b_m}$. Коэффициенты $A_1, \ldots, A_m$ определяются после выделения двучлена $A_\infty p + A_0$ по способу, изложенному в § 10.5.

Рассмотрим частный случай, когда корни знаменателя $Q(p)$ либо мнимые, либо вещественные.

Мнимые корни должны быть попарно сопряженными. Пусть, например, $p_k = j\omega_k$ и $p_{k+1} = -j\omega_k$. При этом $A_k = A'_k + jA''_k$ и A_{k+1} должны быть сопряженными величинами, т. е. $A_{k+1} = \overset{*}{A}_k = A'_k - jA''_k$. Объединяя соответствующую пару простых дробей, получаем

$$\frac{A_k}{p - p_k} + \frac{A_{k+1}}{p - p_{k+1}} = \frac{A_k(p + j\omega_k) + \overset{*}{A}_k(p - j\omega_k)}{(p - j\omega_k)(p + j\omega_k)} =$$

$$= \frac{(A_k + \overset{*}{A}_k)p + (A_k - \overset{*}{A}_k)j\omega_k}{p^2 + \omega_k^2} = \frac{2A'_k p}{p^2 + \omega_k^2} - \frac{2A''_k \omega_k}{p^2 + \omega_k^2}.$$

Убедимся, что если соблюдено условие $\mathrm{Re}\,[F(p)] \geq 0$ при $\sigma \geq 0$, то $A''_k = 0$. Пусть $p = \sigma \to 0$, тогда из этого условия следует, что $(-2A''_k/\omega_k) \geq 0$ и, следова-

тельно, $A''_k \le 0$. Пусть теперь $p = j\omega$ и $\omega > \omega_k$, т. е. $p^2 + \omega_k^2 = -\omega^2 + \omega_k^2 < 0$. Тогда из того же условия следует, что $\left(-\dfrac{2A''_k\omega_k}{-\omega^2 + \omega_k^2}\right) \ge 0$, т. е. $A''_k \ge 0$. Оба неравенства для A''_k удовлетворяются одновременно только при $A''_k = 0$. Учитывая это, имеем

$$\frac{A_k}{p - p_k} + \frac{A_{k+1}}{p - p_{k+1}} = \frac{2A'_k p}{p^2 + \omega_k^2} = \frac{B_k p}{p^2 + \omega_k^2},$$

где $B_k = 2A'_k = 2A_k$ — вещественное число.

Если корень $p_i = \sigma_i = -\delta_i$ вещественный, то соответствующая ему простая дробь имеет вид $\dfrac{A_i}{p - p_i} = \dfrac{A_i}{p + \delta_i}$.

Таким образом, разложение функции $F(p)$ при наличии только вещественных и мнимых корней можно записать в виде

$$F(p) = \frac{G(p)}{Q(p)} = A_\infty p + A_0 + \frac{B_1 p}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{B_3 p}{p^2 + \omega_3^2} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{p + \delta_{m-1}} + \frac{A_m}{p + \delta_m}. \qquad (*)$$

15.4. Реализация входных функций двухполюсника, имеющих вещественные и мнимые корни знаменателя, при помощи разложения этих функций на простые дроби

Пусть все коэффициенты в разложении (*) функции $F(p)$ вещественны и положительны. Рассмотрим, как могут быть реализованы отдельные члены этого разложения. Предположим, что функция $F(p)$ должна выражать входное операторное сопротивление цепи, т. е. $F(p) = Z(p)$.

Первое слагаемое $A_\infty p = Z_\infty(p)$ реализуется с помощью катушки с индуктивностью $L_\infty = A_\infty$, так как операторное сопротивление для нее равно $L_\infty p$.

Второе слагаемое $A_0 = Z_0(p)$ реализуется с помощью участка с активным сопротивлением $r_0 = A_0$.

Слагаемое, имеющее вид $\dfrac{B_k p}{p^2 + \omega_k^2} = \dfrac{1}{p/B_k + \omega_k^2/(pB_k)}$, реализуется с помощью участка цепи, состоящего из параллельно соединенных конденсатора с емкостью C_k и катушки с индуктивностью L_k (рис. 15.2). Действительно, операторное сопротивление такого участка имеет вид $Z_k(p) = \dfrac{1}{pC_k + 1/(pL_k)}$, и, следовательно, выбрав $C_k = 1/B_k$ и $L_k = B_k/\omega_k^2$, осуществим требуемую реализацию.

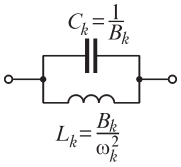


Рис. 15.2

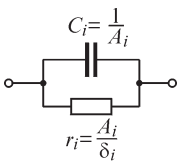


Рис. 15.3

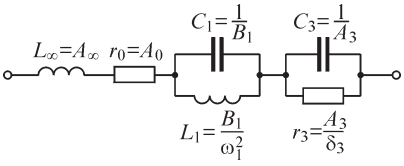


Рис. 15.4

Наконец, слагаемое вида $\frac{A_i}{p+\delta_i} = \frac{1}{p/A_i + \delta_i/A_i}$ реализуется с помощью участка цепи, состоящего из параллельно соединенных конденсатора с емкостью C_i и резистора с сопротивлением r_i (рис. 15.3). Действительно, операторное сопротивление такого участка имеет вид $Z_i(p) = \frac{1}{pC_i + 1/r_i}$, и, следовательно, выбрав $C_i = 1/A_i$ и $r_i = A_i/\delta_i$, осуществим требуемую реализацию.

Таким образом, в конкретном случае, когда входное сопротивление изображается функцией

$$Z(p) = A_\infty p + A_0 + \frac{B_1 p}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{A_3}{p+\delta_3},$$

схема электрической цепи, ее реализующей, будет иметь вид, показанный на рис. 15.4.

Предположим теперь, что функция $F(p)$ должна выражать входную операторную проводимость цепи, т. е. $F(p) = Y(p)$. При этом первое слагаемое, равное $A_\infty p = Y_\infty(p)$, реализуется с помощью конденсатора с емкостью $C_\infty = A_\infty$, так как операторная проводимость для него равна $C_\infty p$.

Второе слагаемое, равное $A_0 = Y_0(p)$, реализуется с помощью участка с активной проводимостью $g_0 = A_0$.

Слагаемое $\frac{B_k p}{p^2 + \omega_k^2} = \frac{1}{p/B_k + \omega_k^2/(pB_k)}$ реализуется участком цепи, состоящим из последовательно соединенных катушки с индуктивностью $L_k = 1/B_k$ и конденсатора с емкостью $C_k = B_k/\omega_k^2$ (рис. 15.5), так как операторная проводимость такого участка имеет вид

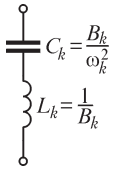


Рис. 15.5

$$Y_k(p) = \frac{1}{pL_k + 1/(pC_k)}.$$

Слагаемое вида $\frac{A_i}{p+\delta_i} = \frac{1}{p/A_i + \delta_i/A_i}$ реализуется участком цепи, состоящим из последовательно соединенных катушки с индуктивностью $L_i = 1/A_i$ и резистора с сопротивлением $r_i = \delta_i/A_i$ (рис. 15.6), так как операторная проводимость такого участка имеет вид

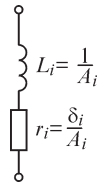


Рис. 15.6

$$Y_i(p) = \frac{1}{pL_i + r_i}.$$

Таким образом, в конкретном случае, когда входная проводимость изображается функцией

$$Y(p) = A_\infty p + A_0 + \frac{B_1 p}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{A_3}{p+\delta_3},$$

схема электрической цепи, ее реализующей, должна быть такой, как это показано на рис. 15.7.

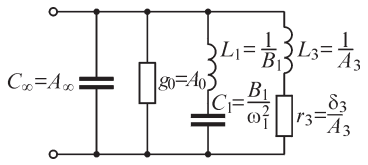


Рис. 15.7

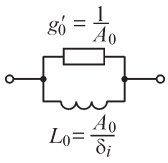


Рис. 15.8

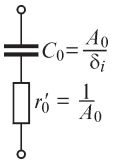


Рис. 15.9

Заметим, что в некоторых частных случаях при отрицательном коэффициенте A_i возможна реализация с помощью приведенного ранее разложения $F(p)$, если оно содержит достаточно большой член A_0. Рассмотрим сумму

$$A_0 + \frac{A_i}{p+\delta_i} = \frac{A_0 p}{p+\delta_i} + \frac{A_0\delta_i + A_i}{p+\delta_i}.$$

Если $A_0\delta_i + A_i > 0$, то вторая дробь реализуется либо в виде схемы на рис. 15.3, либо в виде схемы на рис. 15.6. Первая же дробь $\frac{A_0 p}{p+\delta_i} = \frac{1}{1/A_0 + \delta_i/(A_0 p)}$ реализуется в случае $F(p) = Z(p)$ в виде участка цепи, состоящего из параллельно соединенных резистора с проводимостью $g_0' = 1/A_0$ и катушки с индуктивностью $L_0 = A_0/\delta_i$ (рис. 15.8), так как при этом $Z(p) = \frac{1}{g_0' + 1/(pL_0)}$. В случае $F(p) = Y(p)$ эта дробь реализуется в виде участка цепи с последовательно соединенными резистором с сопротивлением $r_0' = 1/A_0$ и конденсатором с емкостью $C_0 = A_0/\delta_i$ (рис. 15.9).

Рассмотрим пример реализации заданной функции $F(p) = Z(p)$. Принято, чтобы не иметь дела с цифрами слишком большого или слишком малого порядка, оперировать с относительными сопротивлениями r^*, $\omega^* L^*$ и $1/(\omega^* C^*)$ и относительной частотой ω^*, которые являются отношениями действительных сопротивлений и частоты к базисному сопротивлению $R_б$ и базисной частоте $\omega_б$. Последние выбирают так, чтобы относительные величины в их рабочем диапазоне изменения были близки к единице. Будем опускать звездочку (*), понимая во всех последующих примерах числовые величины как относительные.

Рассмотрим реализацию функции

$$F(p) = Z(p) = \frac{p^5 + 6p^3 + 8p}{p^4 + 4p^2 + 3} = \frac{p^5 + 6p^3 + 8p}{(p^2+1)(p^2+3)} = A_\infty p + \frac{B_1 p}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{B_3 p}{p^2 + \omega_3^2}.$$

Здесь $\omega_1^2 = 1$; $\omega_3^2 = 3$.

Знаменатель функции $F(p)$ имеет только мнимые корни $p_{1,2} = \pm j1$ и $p_{3,4} = \pm j\sqrt{3}$, а поэтому отсутствуют простые дроби вида $A_i/(p + \delta_i)$. Кроме того, в данном примере $A_0 = 0$, в чем легко убедиться, приняв $p = 0$. Определим коэффициенты A_∞, B_1 и B_3. Для вычисления A_∞ разделим $Z(p)$ на p и примем $p = \infty$. Получим $A_\infty = \left|\frac{Z(p)}{p}\right|_{p=\infty} = 1$. Для определения коэффициента B_1 умножим $Z(p)$ на $\frac{p^2 + \omega_1^2}{p}$ и положим $p_2 = -\omega_1^2$. Получим

$$B_1 = \left|\frac{Z(p)(p^2+\omega_1^2)}{p}\right|_{p^2=-\omega_1^2} = \left|\frac{p^4+6p^2+8}{p^2+3}\right|_{p^2=-1} = \frac{1-6+8}{2} = \frac{3}{2}.$$

Аналогично найдем

$$B_3 = \left|\frac{Z(p)(p^2+\omega_3^2)}{p}\right|_{p^2=-\omega_3^2} = \left|\frac{p^4+6p^2+8}{p^2+1}\right|_{p^2=-3} = \frac{1}{2}.$$

Параметры схемы (рис. 15.10), реализующей данную функцию, соответственно, равны

$$L_\infty = 1;\ L_1 = \frac{B_1}{\omega_1^2} = \frac{3}{2};$$

$$C_1 = \frac{1}{B_1} = \frac{2}{3};\ L_3 = \frac{B_3}{\omega_3^2} = \frac{1}{6};\ C_3 = \frac{1}{B_3} = 2.$$

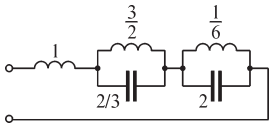


Рис. 15.10

Истинные значения параметров цепи определяются по известным $R_б$ и $\omega_б$ на основании формул:

$$\omega = \omega^* = \frac{\omega_{ист}}{\omega_б};\quad \omega L = \omega^* L^* = \frac{\omega_{ист} L_{ист}}{R_б};\quad \omega C = \omega^* C^* = \omega_{ист} C_{ист} R_б.$$

Рассмотрим теперь реализацию функции $Y(p) = 1/Z(p)$, где $Z(p)$ — *та же самая* функция от p, что и в только что рассмотренном примере, т. е.

$$Y(p) = \frac{p^4+4p^2+3}{p^5+6p^3+8p} = \frac{p^4+4p^2+3}{p(p^2+2)(p^2+4)} = \frac{B_1}{p} + \frac{B_3 p}{p^2+2} + \frac{B_5 p}{p^2+4}.$$

В данном случае $A_\infty = 0$ и $A_0 = 0$, так как дробь правильная и целая часть не выделяется. Определяя коэффициенты B_1 B_3 и B_5, получим

$$B_1 = \left|Y(p)p\right|_{p=0} = \frac{3}{8};\quad B_3 = \left|\frac{Y(p)(p^2+2)}{p}\right|_{p^2=-2} = \frac{1}{4};\quad B_5 = \left|\frac{Y(p)(p^2+4)}{p}\right|_{p^2=-4} = \frac{3}{8}$$

Параметры схемы (рис. 15.11), реализующей данную функцию, равны

$$L_1 = \frac{1}{B_1} = \frac{8}{3};\ L_3 = \frac{1}{B_3} = 4;\quad C_3 = \frac{B_3}{\omega_3^2} = \frac{1}{8};$$

$$L_5 = \frac{1}{B_5} = \frac{8}{3};\ C_5 = \frac{B_5}{\omega_5^2} = \frac{3}{32}.$$

Обе схемы на рис. 15.10 и 15.11 соответствуют одной и той же функции $Z(p)$. Точно так же они соответствуют одной и той же обратной функции $Y(p)$. Это означает, что обе эти схемы имеют совершенно одинаковые частотные характеристики $Z(j\omega)$. Структура же этих схем и числовые значения параметров различны. Это иллюстрирует высказанное ранее положение о многозначности решения задачи синтеза электрической цепи по заданной функции $F(p)$.

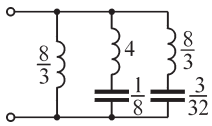


Рис. 15.11

15.5. Реализация входных функций двухполюсника, имеющих только мнимые корни знаменателя, при помощи представления этих функций в виде цепных дробей

Наличие только мнимых корней у входных функций $Z(p)$ и $Y(p)$ означает, что цепь, имеющая такие входные сопротивление и проводимость, не обладает затуханием, т. е. состоит только из реактивных элементов. Поэтому в разложении входных функций на простые дроби должны отсутствовать член A_0, а также члены вида $A_i/(p + \delta_i)$, так как при их реализации, как было видно в предыдущем параграфе, должны быть использованы активные сопротивления. Таким образом, функция $F(p)$, имеющая только мнимые корни и реализуемая при помощи только реактивных элементов, должна иметь вид

$$F(p) = \frac{G(p)}{Q(p)} = A_\infty p + \frac{B_1 p}{p^2 + \omega_1^2} + \frac{B_3 p}{p^2 + \omega_3^2} + \ldots = p\left(A_\infty + \sum_{k=1,3,\ldots} \frac{B_k}{p^2 + \omega_k^2}\right). \qquad (*)$$

Величина в скобках является функцией от p^2. Соответственно, после приведения к общему знаменателю получим в знаменателе полный полином $Q(p)$ от четных степеней p, если все ω_k не равны нулю, т. е. полином, содержащий все, без пропусков, четные показатели от нуля до m. При этом числитель будет полным полиномом $G(p)$ нечетных степеней p. Степень $G(p)$ на единицу выше степени $Q(p)$. Следовательно, $F(p)$ будет иметь вид

$$F(p) = \frac{G(p)}{Q(p)} = \frac{a_{m+1} p^{m+1} + a_{m-1} p^{m-1} + \ldots + a_1 p}{b_m p^m + b_{m-2} p^{m-2} + \ldots + b_0},$$

где m — четное.

В этом случае значение $p = 0$ является нулем функции $F(p)$. Если один из корней ω_k полинома $Q(p)$ равен нулю, то $b_0 = 0$, и, сокращая числитель и знаменатель на p, получим в числителе полином четных степеней, а в знаменателе — полином нечетных степеней от p. При этом значение $p = 0$ является полюсом $F(p)$.

Для возможности реализации функции $F(p)$ в виде электрической цепи, состоящей из реактивных элементов, необходимо, чтобы она удовлетворяла основным свойствам входных функции такой цепи, изложенным в § 6.6, а именно: степени полиномов $G(p)$ и $Q(p)$ должны отличаться друг от друга на единицу; нули и полюсы функции $F(p)$ должны чередоваться. В соответствии с первым свойством в написанном выше выражении степень числителя превышает степень знаменателя на единицу. Может быть также случай $a_{m+1} = 0$, когда степень знаменателя превышает степень числителя на единицу. Второе свойство — чередование нулей и полюсов $F(p)$ — означает, что чередуются корни числителя и знаменателя вдоль мнимой оси. Соответственно, если, разлагая на множители и числитель, и знаменатель, запишем $F(p)$ в виде

$$F(p) = \frac{G(p)}{Q(p)} = \frac{a_{m+1} p (p^2 + \omega_2^2)(p^2 + \omega_4^2)\ldots(p^2 + \omega_m^2)}{b_m (p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_3^2)\ldots(p^2 + \omega_{m-1}^2)},$$

то условие чередования нулей и полюсов можно записать так:

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \ldots < \omega_m.$$

В § 6.6 было показано, что свойство чередования полюсов и нулей вытекает из того, что для любой цепи, содержащей только реактивные элементы, входное реактивное сопротивление всегда растет с частотой, т. е. $dx_{вх}/d\omega > 0$. Условие $dx_{вх}/d\omega > 0$ не было доказано в § 6.6. Докажем его здесь. Входное сопротивление является функцией сопротивлении всех ветвей цепи:

$$x_{вх} = F(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_l), \quad \text{где} \quad x_i = \omega L_i - \frac{1}{\omega C_i}.$$

Имеем

$$\frac{dx_{вх}}{d\omega} = \sum_{i=1}^{i=l} \frac{\partial x_{вх}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{d\omega}, \text{ причем } \frac{dx_i}{d\omega} = L_i + \frac{1}{\omega^2 C_i} > 0.$$

Остается показать, что также $dx_{вх}/dx_i > 0$. С этой целью будем рассматривать ветвь x_i как приемник на выходе четырехполюсника. Этим четырехполюсником явится вся остальная цепь. Реактивное сопротивление на входе этого четырехполюсника и представляет собой $x_{вх}$. Подставив в уравнения этого четырехполюсника: $\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2$ и $\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2$ величины $Z_{вх} = jx_{вх} = \dot{U}_1/\dot{I}_1$ и $Z_{пр} = jx_i = \dot{U}_2/\dot{I}_2$, получим $jx_{вх} = \dfrac{Ajx_i + B}{Cjx_i + D}$. Взяв производную, находим

$$\frac{\partial x_{вх}}{\partial x_i} = -j\frac{Aj(Cjx_i + D) - Cj(Ajx_i + B)}{(Cjx_i + D)^2} = \frac{AD - BC}{(Cjx_i + D)^2} = \frac{1}{(Cjx_i + D)^2}.$$

В цепи, состоящей из одних реактивных элементов, напряжения на всех ветвях находятся друг с другом в фазе или в противофазе, а все токи в ветвях сдвинуты по отношению к этим напряжениям на угол $\pm\pi/2$, т. е. угол сдвига фаз между двумя любыми токами равен нулю или π. Эти положения справедливы при любом значении x_i. В частности, при $x_i = 0$ имеем $\dot{U}_2 = 0$ и $\dot{I}_1 = D\dot{I}_2$, следовательно, D — вещественное число. При $x_i = \infty$ имеем $\dot{I}_2 = 0$ и $\dot{I}_1 = C\dot{U}_2$, следовательно, C — мнимое число. Отсюда ясно, что $(Cjx_i + D)^2 > 0$ и

$$\frac{\partial x_{вх}}{\partial x_i} = \frac{1}{(Cjx_i + D)^2} > 0.$$

Таким образом, $dx_{вх}/d\omega > 0$, что и требовалось доказать.

Во всех случаях, прежде чем выполнять реализацию функции $F(p)$ в виде цепи из реактивных элементов, необходимо убедиться, что она удовлетворяет двум вышеуказанным основным свойствам.

Существуют различные методы реализации.

Один из них, разработанный Фостером, заключается в представлении функции $F(p)$ в виде формулы (*). Цепи, реализующие каждое слагаемое в выражении (*), были рассмотрены в предыдущем параграфе. Неудобство этого метода состоит в необходимости отыскания корней знаменателя, что при высокой степени полинома $Q(p)$ является трудной задачей.

Есть метод, предложенный Кауером, при использовании которого отсутствует необходимость в отыскании корней. Суть его заключается в поочередном выделении частей вида Ap или B/p сначала из функции $F(p)$, а затем из остатков

после выделения предыдущей части, с последовательной реализацией выделяемых частей в виде индуктивной катушки или конденсатора. Пусть функция $F(p)$ имеет полюс $p = \infty$. Это означает, что степень полинома числителя больше степени полинома знаменателя на единицу. Для определенности положим $F(p) = Z(p)$. Разделив числитель на знаменатель, выделяем целую часть $A_1 p$, соответствующую этому полюсу $Z(p)$. Получаем

$$Z(p) = A_1(p) + Z_1(p),$$

где $Z_1(p)$ — остаток от деления, представляющий собой правильную рациональную дробь, степень полинома в знаменателе которой на единицу больше степени полинома числителя. Это является следствием того, что показатели членов полиномов $G(p)$ и $Q(p)$ убывают от предыдущего к последующему на две единицы. Следовательно, обратная функция $Y_1(p) = 1/Z_1(p)$ имеет степень числителя, на единицу большую степени знаменателя; производя с ней аналогичную операцию выделения целой части $A_2 p$, соответствующей ее полюсу $p = \infty$, получим

$$Y_1(p) = \frac{1}{Z_1(p)} = A_2(p) + Y_2(p).$$

Продолжая действовать таким же образом, найдем

$$Z_2(p) = \frac{1}{Y_2(p)} = A_3(p) + Z_3(p).$$

Эту процедуру продолжаем до тех пор, пока остаток не будет равен нулю. Соответственно такой последовательности операций функцию $Z(p)$ можно представить в виде цепной дроби:

$$Z(p) = A_1 p + \cfrac{1}{A_2 p + \cfrac{1}{A_3 p + \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \\ A_{k-1} p + \cfrac{1}{A_k p + 0}}}.$$

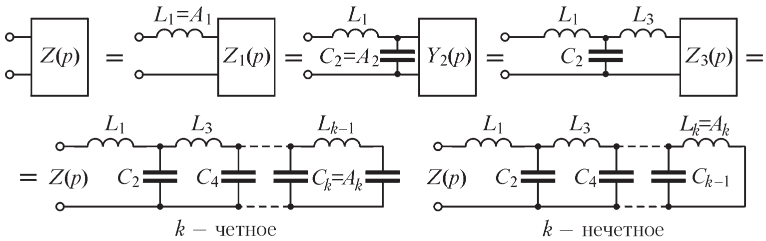


Рис. 15.12

Из изложенного видно, что функцию $F(p) = Z(p)$ можно реализовать с помощью схемы (рис. 15.12), в которой первым элементом, включенным последовательно остальной части схемы, является катушка с индуктивностью L_1 A_1; вторым элементом, включенным параллельно остальной за ним части схемы, —

конденсатор с емкостью $C_2 = A_2$; следующим элементом является вновь последовательно включенная катушка $L_3 = A_3$, далее — параллельно включенная емкость $C_4 = A_4$, и т. д. Если k — четное, то схема завершится конденсатором с емкостью $C_k = A_k$. Если k — нечетное, то последним элементом будет катушка с индуктивностью $L_k = A_k$. Нетрудно заметить, что в данном случае $k = n$, т. е. k равно степени числителя.

Для рассмотренного случая, когда степень полинома числителя $G(p)$ больше степени знаменателя $Q(p)$, при делении слагаемые полиномов следует располагать по убывающим степеням и выделяемые целые части Ap получаются как результат деления первого члена числителя на первый член знаменателя. При этих же условиях, если бы мы приняли $F(p) = Y(p)$, получили бы первый член Ap как операторную емкостную проводимость C_1p, т. е. схема начиналась бы с приключенного параллельно ко всей остальной цепи конденсатора C_1 (рис. 15.13). При этом в случае $k = n$ — четного схема заканчивается катушкой (рис. 15.13, *а*) и при k — нечетном — конденсатором (рис. 15.13, *б*)

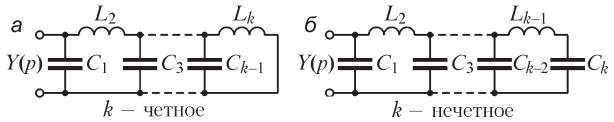


Рис. 15.13

Если степень числителя n меньше степени знаменателя на единицу, то можно воспользоваться тем же методом, формально добавив в полиноме числителя член $a_{n+2}p^{n+2}$ с $a_{n+2} = 0$. Соответственно, получим в первой выделенной части A_ip коэффициент $A_1 = 0$, т. е. в схемах на рис. 15.12 будем иметь $L_1 = 0$, а на рис. 15.13 — соответственно, $C_1 = 0$. Число реальных, отличных от нуля элементов в схеме будет равняться $n + 2 - 1 = m$, т. е. степени знаменателя. Таким образом, число реальных элементов равно наивысшей степени полиномов в рациональной дроби.

Можно было бы и не прибегать к искусственному приему добавления в числителе $F(p)$ слагаемого $a_{n+2}p^{n+2}$, имеющего $a_{n+2} = 0$, а начать операции по отношению к обратной величине $F(p)$.

Рассмотрим теперь случай, когда функция $F(p)$ имеет полюс $p = 0$. Это означает, полином знаменателя нечетной степени, т. е. m — нечетное. В этом случае можно осуществить реализацию тем же способом построения цепной дроби, но в другом порядке, а именно выделяя части соответственно полюсам при $p = 0$. Получаемая при этом цепная дробь имеет вид

$$F(p) = D_1/p + \cfrac{1}{D_2/p + \cfrac{1}{D_3/p + \cdots \cdots \cfrac{1}{D_{k-1}/p + \cfrac{1}{D_k/p + 0}}}}.$$

Член D_1/p получается делением первого члена полинома в числителе на первый член полинома в знаменателе, если слагаемые этих полиномов расположить по возрастающим степеням. Если степень m знаменателя функции $F(p)$ — четная, а степень n числителя — нечетная, то такой же порядок образования цепной дроби можно применить для функции $1/F(p)$.

Проиллюстрируем изложенное выше на том же примере, который был рассмотрен в конце предыдущего параграфа.

Пусть

$$F(p) = Z(p) = \frac{p^5 + 6p^3 + 8p}{p^4 + 4p^2 + 3}.$$

Выделим часть $Z(p)$, соответствующую ее полюсу $p = \infty$, т. е. представим $Z(p)$ в виде $F(p) = A_1 p + Z_1(p)$. Здесь

$$A_1 = \frac{a_n}{b_m} = 1, \quad \text{а} \quad Z_1(p) = \frac{2p^3 + 5p}{p^4 + 4p^2 + 3}.$$

Обратная остатку $Z_1(p)$ функция

$$Y_1(p) = \frac{1}{Z_1(p)} = \frac{p^4 + 4p^2 + 3}{2p^3 + 5p}$$

имеет полюс $p = \infty$. Выделяя соответствующую ему часть, получим

$$Y_1(p) = \frac{1}{2}p + Y_2(p), \text{ где } Y_2(p) = \frac{\frac{3}{2}p^2 + 3}{2p^3 + 5p}.$$

Теперь уже функция

$$Z_2(p) = \frac{1}{Y_2(p)} = \frac{2p^3 + 5p}{\frac{3}{2}p^2 + 3}$$

имеет полюс $p = \infty$.

Выделяя соответствующую ему часть, находим

$$Z_2(p) = \frac{4}{3}p + Z_3(p), \quad \text{где} \quad Z_3(p) = \frac{p}{\frac{3}{2}p^2 + 3}.$$

Аналогично определяем

$$Y_3(p) = \frac{1}{Z_3(p)} = \frac{\frac{3}{2}p^2 + 3}{p} = \frac{3}{2}p + \frac{3}{p}.$$

Таким образом, получаем следующие параметры схемы:

$$L_1 = 1; \; C_2 = \frac{1}{2}; \; L_3 = \frac{4}{3}; \; C_4 = \frac{3}{2}; \; L_5 = \frac{1}{3}.$$

Процедуру выделения отдельных частей функции можно записать следующим образом:

$$
\begin{array}{l|l}
 & -\,p^5+6p^3+8p \quad\quad p^4+4p^2+3 \\
 & \quad\;\; p^5+4p^3+3p \quad\quad \overline{p \to L_1 = 1} \\
\hline
 & p^4+4p^2+3 \quad\quad 2p^3+5p \\
 & -\,p^4+\frac{5}{2}p^2 \quad\quad \overline{\frac{1}{2}p \to C_2 = \frac{1}{2}} \\
\hline
 & -\,2p^3+5p \quad\quad \frac{3}{2}p^2+3 \\
 & \quad\;\; 2p^3+4p \quad\quad \overline{\frac{4}{3}p \to L_3 = \frac{4}{3}} \\
\hline
 & \frac{3}{2}p^2+3 \quad\quad p \\
 & -\,\frac{3}{2}p^2 \quad\quad \overline{\frac{3}{2}p \to C_4 = \frac{3}{2}} \\
\hline
 & -\,p \quad\quad 3 \\
 & \quad\;\; p \quad\quad \overline{\frac{1}{3}p \to L_5 = \frac{1}{3}} \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Схема, соответствующая данному порядку реализации, приведена на рис. 15.14. Этот порядок соответствует цепной дроби с членами вида Ap.

Рассмотрим другой порядок реализации, когда цепная дробь имеет члены вида D/p. Функция $Z(p)$ не имеет полюса $p = 0$, поэтому рассмотрим обратную ей функцию

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{p^4 + 4p^2 + 3}{p^5 + 6p^3 + 8p}.$$

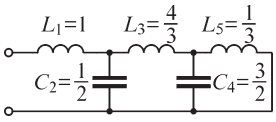


Рис. 15.14

Операцию выделения соответствующих полюсу $p = 0$ отдельных частей приведена на следующей странице.

Схема, соответствующая данному порядку реализации, приведена на рис. 15.15.

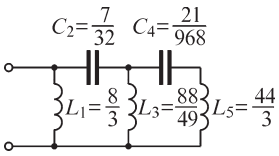


Рис. 15.15

Все четыре схемы, изображенные на рис. 15.10, 15.11, 15.14 и 15.15, реализуют одну и ту же функцию $Z(p)$, и их частотные характеристики одинаковы. Однако их структура и значения параметров различны, что связано с отмеченной выше многозначностью решения задачи синтеза.

Обратим внимание, что во всех этих схемах число элементов одинаково и является минимально необходимым. Выбор той или иной схемы определяется удобством физического осуществления элементов цепи — катушек и конденсаторов с теми или иными параметрами. В одних схемах получаются катушки

с большей индуктивностью, чем в других. В некоторых схемах конденсаторы оказываются с большей емкостью, чем в других.

$$\begin{array}{r|l}
 & 3+4p^2+p^4 \quad \Big| \quad \dfrac{8p+6p^3+p^5}{\dfrac{3}{8}\dfrac{1}{p} \to L_1 = \dfrac{8}{3}} \\
 & -\,3+\dfrac{9}{4}p^2+\dfrac{3}{8}p^4 \\
\hline
 & 8p+6p^3+p^5 \quad \Big| \quad \dfrac{\dfrac{7}{4}p^2+\dfrac{5}{8}p^4}{\dfrac{32}{7p} \to C_2 = \dfrac{7}{32}} \\
 & -\,8p+\dfrac{20}{7}p^3 \\
\hline
 & \dfrac{7}{4}p^2+\dfrac{5}{8}p^4 \quad \Big| \quad \dfrac{\dfrac{22}{7}p^3+p^5}{\dfrac{49}{88p} \to L_3 = \dfrac{88}{49}} \\
 & -\,\dfrac{7}{4}p^2+\dfrac{49}{88}p^4 \\
\hline
 & \dfrac{22}{7}p^3+p^5 \quad \Big| \quad \dfrac{\dfrac{3}{44}p^4}{\dfrac{22\cdot 44}{3\cdot 7p} \to C_4 = \dfrac{21}{968}} \\
 & -\,\dfrac{22}{7}p^3 \\
\hline
 & p^5 \quad \Big| \quad \dfrac{3}{44p} \to L_5 = \dfrac{44}{3} \\
 & -\,\dfrac{3}{44}p^4 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

15.6. Синтез входной функции двухполюсника в общем случае. Проверка отсутствия нулей и полюсов в правой полуплоскости

В § 15.2 было отмечено, что функции, реализуемые в виде пассивной линейной электрической цепи, должны быть вещественными и положительными. В общем случае перед тем, как приступить к реализации, следует проверить, удовлетворяет ли этим условиям данная функция. Функция вещественна, если все коэффициенты полиномов числителя и знаменателя вещественны. Необходима проверка положительности функции. В настоящем и в двух следующих параграфах приведены без доказательств некоторые методы такой проверки и дан один из способов реализации функции с комплексными корнями. Рассмотрим это на примере конкретной функции

$$F(p) = \frac{10p^6 + 8p^5 + 20p^4 + 11p^3 + 12p^2 + 3p + 2}{8p^6 + 12p^5 + 22p^4 + 13p^3 + 10p^2 + 3p + 1}.$$

Эта функция вещественна, так как все коэффициенты вещественны. Чтобы она была вещественной положительной функцией, прежде всего корни числителя и знаменателя должны лежать в левой полуплоскости. Осуществим в настоящем параграфе проверку отсутствия корней в правой полуплоскости по методу Гурвица. Полином Гурвица есть полином, все нули которого находятся в левой полуплоско-

сти или на оси $j\omega$. Если полином является полиномом Гурвица, то отношение четной его части к нечетной (или наоборот) является вещественной положительной функцией, т. е. входной функцией некоторой чисто реактивной цепи.

Четную часть числителя $Z(p)$, т. е. часть полинома с четными показателями, обозначим $N_1(p)$, нечетную часть числителя $Z(p)$, т. е. часть полинома с нечетными показателями, обозначим $M_1(p)$. Соответственно, для знаменателя обозначим через $N_2(p)$ четную и через $M_2(p)$ нечетную части. Тогда имеем

$$N_1(p) = 10p^6 + 20p^4 + 12p^2 + 2; \quad M_1(p) = 8p^5 + 11p^3 + 3p;$$

$$N_2(p) = 8p^6 + 22p^4 + 10p^2 + 1; \quad M_2(p) = 12p^5 + 13p^3 + 3p.$$

Проверим, являются ли числитель и знаменатель $Z(p)$ полиномами Гурвица:

$$\frac{N_1(p)}{M_1(p)} = \frac{10p^6 + 20p^4 + 12p^2 + 2}{8p^5 + 11p^3 + 3p} = S_1(p);$$

$$\frac{N_2(p)}{M_2(p)} = \frac{8p^6 + 22p^4 + 10p^2 + 1}{12p^5 + 13p^3 + 3p} = S_2(p).$$

Знаменатели обеих функций легко разделить на множители:

$$M_1(p) = p(8p^4 + 11p^2 + 3) = 8p(p^2 + 1)\left(p^2 + \frac{3}{8}\right);$$

$$M_2(p) = p(12p^4 + 13p^2 + 3) = 12p\left(p^2 + \frac{1}{3}\right)\left(p^2 + \frac{3}{4}\right).$$

Обе функции, $S_1(p)$ и $S_2(p)$, разлагаются на простые дроби:

$$S_1(p) = A_\infty p + \frac{A_0}{p} + \frac{A_1 p}{p^2 + 1} + \frac{A_2 p}{p^2 + \frac{3}{8}};$$

$$A_\infty = \left| \frac{S_1(p)}{p} \right|_{p=\infty} = \frac{10}{8};$$

$$A_0 = \left| S_1(p) \cdot p \right|_{p=0} = \frac{2}{3};$$

$$A_1 = \left| S_1(p) \frac{p^2 + 1}{p} \right|_{p^2=-1} = 0;$$

$$A_2 = \left| S_1(p) \frac{p^2 + \frac{3}{8}}{p} \right|_{p^2=-\frac{3}{8}} = \frac{11}{96}.$$

Равенство $A_1 = 0$ означает, что корень $p^2 + 1$ является общим для числителя и знаменателя. Таким образом, $S_1(p)$ реализуема

$$S_2(p) = A_\infty p + \frac{A_0}{p} + \frac{A_1 p}{p^2 + \frac{1}{3}} + \frac{A_2 p}{p^2 + \frac{3}{4}};$$

$$A_\infty = \left| \frac{S_2(p)}{p} \right|_{p=\infty} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3};$$

$$A_0 = \left| S_2(p) \cdot p \right|_{p=0} = \frac{1}{3};$$

$$A_1 = \left| S_2(p) \frac{p^2 + \frac{1}{3}}{p} \right|_{p^2=-\frac{1}{3}} = \frac{1}{9};$$

$$A_2 = \left| S_2(p) \frac{p^2 + \frac{3}{4}}{p} \right|_{p^2=-\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, $S_2(p)$ реализуема

Так как $S_1(p)$ и $S_2(p)$ реализуемы, то, следовательно, числитель и знаменатель $F(p)$ являются полиномами Гурвица, т. е. не имеют нулей в правой полуплоско-

сти. Таким образом, выполненная в настоящем параграфе проверка показывает, что рассматриваемая функция $F(p)$ не имеет нулей и полюсов в правой полуплоскости.

15.7. Синтез входной функции двухполюсника в общем случае. Проверка условия положительности функции Re [$F(p)$] ≥ 0 при Re (p) = σ ≥ 0

Проверим другое условие положительности функции $Z(p)$ а именно Re $[F(p)] \geq 0$ при $\sigma \geq 0$. Пусть $\sigma = 0$, т. е. $p = j\omega$. Эта проверка сводится к применению следующей процедуры. Выделим вещественную часть рациональной дроби $F(p)$ при $p = j\omega$, т. е. Re $[F(j\omega)]$. Нетрудно заметить, что эта часть, как рациональная дробь, должна иметь члены с четными показателями относительно $j\omega$, так как только в этом случае при $p = j\omega$ функция будет вещественной. Поэтому представим $F(p)$ в виде суммы рациональных дробей, состоящих из членов с четными и нечетными показателями:

$$F(p) = N(p) + M(p).$$

Так как

$$F(p) = \frac{N_1(p) + M_1(p)}{N_2(p) + M_2(p)},$$

то, перемножив знаменатель и числитель на $N_2(p) - M_2(p)$, получим

$$F(p) = \frac{N_1(p)N_2(p) - M_1(p)M_2(p)}{N_2^2(p) - M_2^2(p)} + \frac{N_2(p)M_1(p) - N_1(p)M_2(p)}{N_2^2(p) - M_2^2(p)}. \qquad (*)$$

При $p = j\omega$ первый член и окажется вещественной частью $N(p) = N(j\omega)$ функции $F(p) = F(j\omega)$, т. е. он равен величине Re $[F(j\omega)]$, которая должна быть положительной. Знаменатель ее всегда положителен. Поэтому проверка положительности функции $N(j\omega)$ = Re $[F(j\omega)]$ сведется к проверке положительности ее числителя.

Если выполнить операцию $N_1(j\omega)\ N_2(j\omega) - M_1(j\omega)\ M_2(j\omega)$, то получим полином от ω^2. При изменении ω^2 от нуля до бесконечности значение этого полинома также будет меняться.

Возможны случаи, когда полином при некоторых частотах $\omega^2 = \omega_k^2$ примет значение, равное нулю. В окрестностях этих точек полином можно представить в виде

$$P_0(\omega^2) = N_1(j\omega)N_2(j\omega) - M_1(j\omega)M_2(j\omega) = (\omega^2 - \omega_k^2)^m f(\omega^2),$$

где $f(\omega^2)$ — некоторый полином, не равный нулю при $\omega^2 = \omega_k^2$. Нетрудно заметить, что при $\omega^2 = \omega_k^2$ происходит изменение знака $P_0(\omega^2)$, если m — *нечетное*. Таким образом, если имеется нуль полинома нечетной кратности, в том числе простой ($m = 1$), то в этой точке полином $P_0(\omega^2)$ меняет знак. Если полином $P_0(\omega^2)$ меняет знак, то это означает, что либо при $\omega^2 < \omega_k^2$, либо при $\omega^2 > \omega_k^2$ величина $P_0(\omega^2)$ имеет отрицательное значение и, следовательно, функция $F(p)$ не является положительной.

Таким образом, проверка условия Re $[F(j\omega)] > 0$ сводится к определению нулей функции $P_0(\omega^2)$. Если эта функция имеет нули четной кратности или вообще не имеет нулей для всех значений ω^2 от нуля до бесконечности, то такая функция является положительной. В курсе высшей алгебры имеются различные способы отыскания вещественных корней (нулей) полиномов. Приведем без доказательства один из них. Для проверки наличия вещественных нулей в определенном диапазоне значений $P_0(\omega^2) = P_0(x)$ (обозначим для краткости записи $\omega^2 = x$) используется теория Штурма. Прежде всего введем в употребление некоторые вспомогательные функции, носящие название ф у н к ц и й Ш т у р м а.

Первой функцией Штурма является сама исследуемая функция $P_0(x)$. Второй функцией Штурма $P_1(x)$ является производная исследуемой функции $P_1(x) = P_0'(x)$. Третью функцию Штурма $P_2(x)$ определяют в виде остатка с обратным знаком от деления первой функции Штурма на вторую, причем процесс деления останавливается, когда наивысшая степень остатка будет на единицу меньше наивысшей степени второй функции. Четвертую функцию Штурма $P_3(x)$ можно найти в виде остатка (с обратным знаком) от деления второй функции Штурма на третью, когда наивысшая степень остатка на единицу меньше наивысшей степени третьей функции, и т. д. Эта процедура должна производиться до получения постоянной величины. Если это удается, то все корни $P_0(x)$ — простые. Итак, процесс отыскания функций Штурма имеет вид

$$\frac{P_0(x)}{P_1(x)} = f_1(x) + \frac{\text{ост.}(1)}{P_1(x)}; \quad P_2(x) = -\text{ост.}(1);$$

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = f_2(x) + \frac{\text{ост.}(2)}{P_2(x)}; \quad P_3(x) = -\text{ост.}(2);$$

. . . . . .

$$\frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = f_n(x) + \frac{\text{ост.}(n)}{P_n(x)}; \quad P_{n+1}(x) = -\text{ост.}(n) = \text{const}.$$

При произвольном задании $\omega^2 = \omega_1^2$ и $\omega^2 = \omega_2^2$; или $x = x_1$ и $x = x_2$ функции Штурма могут принять различные значения — положительные (обозначаемые знаком +) и отрицательные (обозначаемые знаком –), например, как это показано в таблице, составленной для шести функций Штурма.

x	$P(x)$						
	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	W
$x = x_1$	+	–	+	–	+	–	5
$x = x_2$	+	+	–	0	+	–	3

Определим число W изменений знаков функций Штурма при $x = x_1$ и $x = x_2$. Если соседние по номерам функции Штурма имеют одинаковый знак, то будем считать число изменений знака равным нулю. Если функции Штурма равны

нулю, то они отбрасываются из рассмотрении. В примере, приведенном в таблице, изменение знаков при $x = x_1$ происходит пять раз, т. е. число изменений знаков $W(x_1) = 5$. Изменение знаков при $x = x_2$ происходит три раза, т. е. $W(x_2) = 3$.

Теорема Штурма гласит: *если действительные числа* x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) *не являются корнями полинома* $P_0(x)$, *не имеющего кратных корней, то* $W(x_1)$ $W(x_2)$ *и разность* $W(x_1) - W(x_2)$ *равна числу вещественных корней* (нулей) $P_0(x)$, *заключенных между* x_1 и x_2.

Полином $P_0(x)$, функции Штурма которого принимают знаки, приведенные в таблице, имеет два нуля в интервале $x_1 < x < x_2$, и поэтому такой полином не может быть положительным при всех значениях x в этом интервале, т. е. он нереализуем. Полином реализуем только при $W(x_1) - W(x_2) = 0$.

Подвергнем проверке по этому методу положительность конкретной функции $F(p)$, приведенной в начале предыдущего параграфа.

Числитель вещественной части $N(x)$ этой функции равен

$$N_1(p)N_2(p) - M_1(p)M_2(p) = 80p^{12} + 284p^{10} + 400p^8 + 287p^6 + 112p^4 + 23p^2 + 2.$$

При $p = j\omega$ имеем $p^2 = -\omega^2$, $p^4 = \omega^4$, $p^6 = -\omega^6$, $p^8 = \omega^8$, $p^{10} = -\omega^{10}$, $p^{12} = \omega^{12}$.

Обозначив $\omega^2 = x$, получим

$$P_0(x) = 80x^6 - 284x^5 + 400x^4 - 287x^3 + 112x^2 - 23x + 2.$$

Это выражение и будет первой функцией Штурма. Вторая функция Штурма $P_1(x) = P_0'(x)$ равна $P_1(x) = 480x^5 - 1420x^4 + 1600x^3 - 861x^2 + 224x - 23$.

Разделим $P_0(x)$ на $P_1(x)$, заканчивая процесс деления, как было сказано выше. Получим

$$\frac{P_0(x)}{P_1(x)} = 0{,}1667x - 0{,}09861 + \frac{-6{,}694x^4 + 14{,}28x^3 - 10{,}24x^2 + 2{,}922x - 0{,}2681}{480x^5 - 1420x^4 + 1600x^3 - 861x^2 + 224x - 23}.$$

Здесь и далее все результаты деления округлены до четвертой значащей цифры.

Третья функция Штурма равна остатку с обратным знаком:

$$P_2(x) = 6{,}694x^4 - 14{,}28x^3 + 10{,}24x^2 - 2{,}922x + 0{,}2681.$$

Четвертую функцию Штурма находим как остаток с обратным знаком при делении $P_1(x)$ на $P_2(x)$:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = 71{,}70x - 59{,}19 + \frac{20{,}81x^3 - 45{,}48x^2 + 31{,}80x - 7{,}133}{P_2(x)};$$

$$P_3(x) = -20{,}81x^3 + 45{,}48x^2 - 31{,}80x + 7{,}133.$$

Пятую и шестую функции Штурма определим аналогично:

$$\frac{P_2(x)}{P_3(x)} = -0{,}3217x - 0{,}01696 + \frac{0{,}7780x^2 - 1{,}167x + 0{,}3890}{P_3(x)};$$

$$P_4(x) = -0{,}7780x^2 + 1{,}167x - 0{,}3890;$$

$$\frac{P_3(x)}{P_4(x)} = 26{,}75x - 18{,}34 + \frac{0}{P_4(x)},$$

т. е. шестая функция Штурма тождественно равна нулю и может быть исключена из рассмотрения.

Нас интересует положительность функции во всем диапазоне частот, т. е. для $0 \le \omega^2 \le \infty$. Поэтому возьмем $x_1 = 0$ и $x_2 = \infty$. Тогда знаки функций Штурма будут:

x	$P(x)$					
	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	W
$x_2 = \infty$	+	+	+	–	–	1
$x_1 = 0$	+	–	+	+	–	3

Как видно из таблицы, $W(x_1) = 3$, а $W(x_2) = 1$, т. е. $W(x_1) - W(x_2) = 2$. Поэтому $P_0(x)$ имеет на оси x пару корней. Однако это еще не означает, что $P_0(x)$ меняет знак. Воспользовавшись известными из алгебры приемами, можно получить

$$P_0(x) = 80x^6 - 284x^5 + 400x^4 - 287x^3 + 112x^2 - 23x + 2 =$$
$$= (x-1)^2(2x-1)^2(20x^2 - 11x + 2),$$

откуда видно, что вещественные корни (нули) этого выражения имеют четную кратность и, следовательно, сама функция $P_0(x)$ является положительной, так как при $x = 0$ она положительна. Таким образом, $\mathrm{Re}\,[Z(p)]_{p=j\omega} \ge 0$ для всех значений ω.

Заметим, что в случае, когда существует равенство $W(x_1) = W(x_2)$, получается $W(x_1) - W(x_2) = 0$. Это указывает на то, что в интервале $x_1 \le x \le x_2$ рассматриваемая функция не имеет нулей и, следовательно, не меняет знака. В этом случае достаточно установить, что функция положительна в какой-либо одной точке рассматриваемого интервала, чтобы считать ее положительной во всем интервале.

Проверки, приведенные в этом и предыдущем параграфах, показывают, что данная функция $F(p)$ является вещественной и положительной и поэтому реализуема в виде электрической схемы, т. е. можно принять $F(p) = Z(p)$ или $F(p) = Y(p)$.

15.8. Синтез входной функции двухполюсника в общем случае. Реализация заданных функций, имеющих вещественные, мнимые и комплексные корни

В предыдущих параграфах мы убедились, что конкретная функция $F(p)$, приведенная в начале § 15.6, является вещественной и положительной и, следовательно, может быть реализована. Осуществим эту реализацию.

Прежде всего выделим ее части, соответствующие мнимым и вещественным корням числителя и знаменателя, если таковые имеются. Эти выделенные части функции реализуем методами, изложенными в § 15.4 и 15.5. Операцию такого выделения будем производить до тех пор, пока не встретим комплексные корни. При этом придется воспользоваться другим методом реализации, который будет изложен ниже.

Приступая к реализации, прежде всего выделим нули и полюсы функции на оси $j\omega$. При проверке отсутствия нулей и полюсов функции $F(p)$ в правой полуплоскости мы заметили, что функция $F(p)$ имеет нули в точках $\pm j$. Пусть $F(p) = Z(p)$, следовательно, обратная ей функция $Y(p) = 1/Z(p) = 1/F(p)$ имеет полюсы в этих точках. Выделим часть от $Y(p)$, соответствующую полюсу:

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{8p^6 + 12p^5 + 22p^4 + 13p^3 + 10p^2 + 3p + 1}{(p^2+1)(10p^4 + 8p^3 + 10p^2 + 3p + 2)} =$$

$$= \frac{A_1 p}{p^2+1} + \frac{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{10p^4 + 8p^3 + 10p^2 + 3p + 2}.$$

Определим коэффициенты A_1, a_4, a_3, ..., a_0. Имеем $\left| Y(p)\frac{p^2+1}{p} \right|_{p^2=-1} = A_1$, откуда $A_1 = 1$. Зная $A_1 = 1$, можно найти остальные коэффициенты хотя бы методом неопределенных коэффициентов, приравнивая справа и слева в числителях коэффициенты при одинаковых степенях p. Получаем $a_4 = 8$, $a_3 = 2$, $a_2 = 6$, $a_1 = 1$, $a_0 = 1$. Таким образом,

$$Y(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{8p^4 + 2p^3 + 6p^2 + p + 1}{10p^4 + 8p^3 + 10p^2 + 3p + 2} = Y_1(p) + Y_2(p).$$

Реализация функции $Y_1(p) = \dfrac{p}{p^2+1}$ электрической цепью имеет вид, показанный на рис. 15.16, *а*, так как

$$Y_1(p) = \frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{pL_1 + \dfrac{1}{C_1 p}} = \frac{\dfrac{1}{L_1}p}{p^2 + \dfrac{1}{L_1 C_1}},$$

причем $L_1 = 1$; $C_1 = 1$.

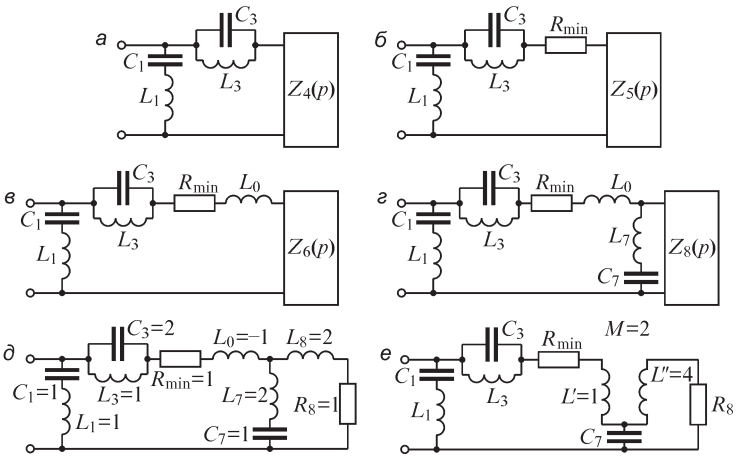


Рис. 15.16

Исследуем числитель функции $Y_2(p)$ в отношении определения нулей на оси $j\omega$. Легко заметить, что при наличии нуля на оси $j\omega$ ($p = j\omega$) должны быть равны нулю и вещественная, и мнимая части этого числителя, т. е.

$$8p^4 + 6p^2 + 1 = 0 \quad \text{и} \quad 2p^3 + p = p(2p^2 + 1) = 0.$$

Оба уравнения удовлетворяются только при $p^2 = -\frac{1}{2}$. Так как $Y_2(p)$ имеет нуль $p^2 = -\frac{1}{2}$, то $Z_2(p) = 1/Y_2(p)$ имеет полюс в этой точке. Выделим часть от $Z_2(p)$, соответствующую этому полюсу:

$$Z_2(p) = \frac{1}{Y_2(p)} = \frac{10p^4 + 8p^3 + 10p^2 + 3p + 2}{(2p^2 + 1)(4p^2 + p + 1)} = \frac{A_2 p}{2p^2 + 1} + \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{4p^2 + p + 1},$$

где

$$A_2 = \left| Z_2(p) \frac{2p^2 + 1}{p} \right|_{p^2 = -\frac{1}{2}} = 1.$$

Определяя коэффициенты a_2, a_1, a_0, как и в первом случае, получаем в числителе $a_2 = 5$, $a_1 = 2$, $a_0 = 2$. Таким образом,

$$Z_2(p) = \frac{p}{2p^2 + 1} + \frac{5p^2 + 2p + 2}{4p^2 + p + 1} = Z_3(p) + Z_4(p).$$

Функцию $Z_3(p) = \dfrac{p}{2p^2 + 1} = \dfrac{p/2}{p^2 + \frac{1}{2}}$ можно реализовать в виде цепи, показанной на рис. 15.16, *а*, так как

$$Z_3(p) = \frac{p/2}{p^2 + \frac{1}{2}} = \frac{p/C_3}{p^2 + \frac{1}{L_3 C_3}} = \frac{L_3/C_3}{pL_3 + \frac{1}{pC_3}},$$

причем $C_3 = 2$, $L_3 = 1$.

Числитель и знаменатель функции $Z_4(p)$ имеют комплексные корни, и поэтому реализация $Z_4(p)$ изложенными ранее методами, применимыми, если корни вещественные или мнимые, неосуществима.

Для реализации функции $Z_4(p)$ воспользуемся методикой, предложенной Бруне. Прежде всего приведем эту функцию к виду минимального активного сопротивления, т. е. к функции, которая имеет $\mathrm{Re}\,[Z(j\omega)] = 0$ при некоторой частоте $\omega = \omega_0$. Для этого определим минимальное значение $R_{\min} = \mathrm{Re}\,[Z_4(j\omega_0)]$, вычитая которое из $Z_4(p)$, получим искомую функцию минимального активного сопротивления, где $\mathrm{Re}\,[Z_4(j\omega_0)] - R_{\min} = 0$. Ясно, что нельзя вычесть произвольное активное сопротивление, так как при этом можем нарушить условие положительности вещественной части $Z_4(j\omega)$, т. е. получить $\mathrm{Re}\,[Z_4(j\omega_0)] - R < 0$ (если вычесть $R > R_{\min}$) или не получить минимальное активное сопротивление (если $R < R_{\min}$), так как при этом ни в одной точке оси $j\omega$ величина $\mathrm{Re}\,[Z_4(j\omega_0)] - R$ не примет нулевого значения.

Для определения частоты ω_0, при которой Re $[Z_4(j\omega)]$ = min, найдем вещественную часть $Z_4(j\omega)$, используя первый член в правой части формулы (*) в § 15.7:

$$\mathrm{Re}[Z_4(j\omega)] = \left|\frac{(5p^2+2)(4p^2+1)-2p\cdot p}{(4p^2+1)^2-p^2}\right|_{p=j\omega} =$$

$$= \left|\frac{20p^4+11p^2+2}{16p^4+7p^2+1}\right|_{p=j\omega} = \frac{20\omega^4-11\omega^2+2}{16\omega^4-7\omega^2+1}.$$

Определим минимумы этой величины:

$$\frac{d}{d\omega}\{\mathrm{Re}[Z_4(j\omega)]\} = \frac{(80\omega^3-22\omega)(16\omega^4-7\omega^2+1)-(64\omega^3-14\omega)(20\omega^4-11\omega^2+2)}{(16\omega^4-7\omega^2+1)^2} = 0.$$

Решение этого уравнения с целью отыскания его действительных корней можно произвести многими методами. Для данного уравнения имеем решение $\omega_0 = \pm 1/\sqrt{2}$, при котором Re $[Z_4(j\omega_0)] = 1$ (рис. 5.16, *б*). Вычитая $R_{\min} = 1$ из $Z_4(p)$, не нарушим условие положительности. Находим

$$Z_4(p) - R_{\min} = \frac{5p^2+2p+2}{4p^2+p+1} - 1 = \frac{p^2+p+1}{4p^2+p+1} = Z_5(p).$$

При $p = j\omega_0 = j\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ сопротивление $Z_5(j\omega_0) = -j\dfrac{1}{\sqrt{2}} = j\omega_0 L_0$, где $L_0 = -1$ (см. рис. 15.16, *в*). Тогда $Z_5(p)$ можно представить в виде $Z_5(p) = pL_0 + Z_6(p)$, где

$$Z_6(p) = Z_5(p) - pL_0 = \frac{p^2+p+1}{4p^2+p+1} + p = \frac{4p^3+2p^2+2p+1}{4p^2+p+1}.$$

Особенность $Z_6(p)$ заключается в том, что эта функция равна нулю при $p = j\omega_0$, т. е. имеется возможность для обратной функции выделить часть, соответствующую полюсу $j\omega_0$:

$$Y_6(p) = \frac{1}{Z_6(p)} = \frac{4p^2+p+1}{(p^2+\omega_0^2)(4p+2)} = \frac{A_6 p}{p^2+1/2} + \frac{a_0}{4p+2}.$$

Учитывая, что $A_6 = \left|Y_6(p)\dfrac{p^2+1/2}{p}\right|_{p^2=-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$ и $a_0 = 2$, имеем

$$Y_6(p) = \frac{\frac{1}{2}p}{p^2+1/2} + \frac{2}{4p+2} = Y_7(p) + Y_8(p).$$

Реализация $Y_7(p)$ производится ранее изложенным методом аналогично $Y_1(p)$ в виде последовательной цепочки из $L_7 = 2$ и $C_7 = 1$ (рис. 15.16, *г*), а реализацию $Y_8(p)$ можно осуществить в виде цепочки из последовательно соединенных L_8 и R_8, где $L_8 = 2$, $R_8 = 1$, так как $Y_8(p) = \dfrac{1}{2p+1}$.

Итак, реализующая всю функцию $F(p)$ цепь имеет вид, представленный на рис. 15.16, *д*.

При данном способе реализации функции вида $Z_5(p)$, которая не имеет ни нулей, ни полюсов на оси $j\omega$ и имеет равную нулю вещественную часть Re $[Z_5(j\omega_0)]$ при частоте ω_0, мы получили на одном этапе реализации отрицательное значение индуктивности $L_0 = -1$. Это обстоятельство не должно нас смущать, так как в конечном счете эту отрицательную индуктивность можно реализовать введением в реальную цепь трансформатора, приближающегося по своим свойствам к совершенному трансформатору, т. е. с коэффициентом связи, равным единице ($k = 1$). Параметры трансформатора в соответствии со значениями величин L_0, L_7 и L_8 (рис. 15.16, *д*) будут равны $L' = L_0 + L_7 = -1 + 2 = 1$; $L'' = L_8 + L_7 = 2 + 2 = 4$; $M = L_7 = 2$ и, следовательно, $k = \dfrac{M}{\sqrt{L'L''}} = 1$. Это обстоятельство несколько снижает практическую ценность метода, так как условие $k = 1$ можно осуществить только приближенно, хотя и с большой точностью.

Окончательная цепь, реализующая заданную конкретную функцию $F(p)$, изображена на рис. 15.16, *е*.

15.9. О синтезе передаточных функций четырехполюсника

Проблема синтеза передаточной функции произвольного вида весьма сложна. Поэтому пример синтеза четырехполюсника с заданной передаточной функцией приведем для случая, когда эта функция задана для четырехполюсника, представленного на рис. 15.17. Этот четырехполюсник питается от источника тока , и на его выходе включен приемник с весьма большим сопротивлением (например, цепь затвора полевого транзистора). При этом в уравнениях четырехполюсника, записанных в системе Z-параметров:

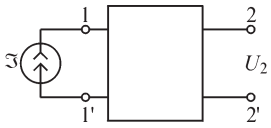


Рис. 15.17

$$U_1(p) = Z_{11}(p)I_1(p) + Z_{12}(p)I_2(p);$$
$$U_2(p) = Z_{21}(p)I_1(p) + Z_{22}(p)I_2(p),$$

можно принять $I_2(p) \approx 0$, т. е. положить $U_1(p) = Z_{11}(p)I_1(p)$ и $U_2(p) = Z_{21}(p)I_1(p)$. В таком случае передаточная функция оказывается равной параметру $Z_{21}(p)$ четырехполюсника, так как

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{I_1(p)} = Z_{21}(p).$$

Рассмотрим свойства такой передаточной функции, причем ограничимся случаем, когда четырехполюсник, реализующий эту функцию, состоит только из реактивных элементов. В этом случае величины $Z_{11}(p)$ и $Z_{22}(p)$ как входные сопротивления со сторон зажимов *1–1'* и *2–2'* холостого хода четырехполюсника, состоящего из реактивных элементов, имеют простые чередующиеся нули и полюсы, расположенные на оси $j\omega$. Коэффициенты в разложении этих функций на простые дроби вещественны и положительны (см. § 15.5). Величина $Z_{21}(p)$ не является входным сопротивлением, и поэтому ее нули могут быть расположены в любой части комплексной плоскости, однако симметрично относительно оси

вещественных (см. § 13.5). Полюсы функции $Z_{21}(p)$, как и полюсы функций $Z_{11}(p)$ и $Z_{22}(p)$, должны лежать на оси $j\omega$. Функция $Z_{21}(j\omega)$ должна быть мнимой величиной, так как четырехполюсник состоит из реактивных элементов. Поэтому она должна быть нечетной рациональной функцией p.

При синтезе цепи, в которой необходимо обеспечивать только заданное значение передаточной функции $K(p) = Z_{21}(p)$, не ставится никаких ограничений для величин $Z_{11}(p)$ и $Z_{22}(p)$. Поэтому проще всего брать их равными друг другу. В этом случае полюсы $Z_{11}(p) = Z_{22}(p)$ одновременно будут также и полюсами $Z_{21}(p)$ (см. § 13.5). Простые соотношения, связывающие параметры эквивалентной схемы четырехполюсника с параметрами $Z_{11}(p)$ и $Z_{21}(p)$, имеют место для мостовой эквивалентной схемы (рис. 15.18), для которой

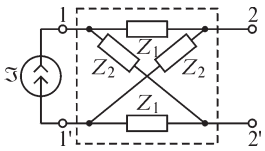


Рис. 15.18

$$Z_{11}(p) = Z_{22}(p) = \frac{1}{2}[Z_1(p) + Z_2(p)]$$

и

$$Z_{12}(p) = Z_{21}(p) = \frac{1}{2}[Z_2(p) - Z_1(p)],$$

откуда

$$Z_1(p) = Z_{11}(p) - Z_{12}(p) \quad \text{и} \quad Z_2(p) = Z_{11}(p) + Z_{21}(p).$$

В связи с этим будем осуществлять реализацию при помощи мостовой схемы.

Если $Z_{21}(p)$ задано в виде рациональной дроби, то, разлагая последнюю на простые дроби, в общем случае будем иметь некоторые простые дроби с положительными коэффициентами и некоторые — с отрицательными. Обозначим сумму дробей с положительными коэффициентами через $Z_{21(+)}(p)$, а взятую со знаком «минус» сумму дробей с отрицательными коэффициентами — через $Z_{21(-)}(p)$. Будем иметь

$$Z_{21}(p) = Z_{21(+)}(p) - Z_{21(-)}(p).$$

В выражениях $Z_{21(+)}(p)$ и $Z_{21(-)}(p)$ коэффициенты положительны. Наиболее простые выражения для $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ получим, если положим $Z_{11}(p) = Z_{22}(p) = Z_{21(+)}(p) + Z_{21(-)}(p)$. Тогда

$$Z_1(p) = 2Z_{21(-)}(p) \quad \text{и} \quad Z_2(p) = 2Z_{21(+)}(p).$$

В качестве примера рассмотрим реализацию передаточной функции

$$Z_{21}(p) = \frac{p^5 + 5p^3 + 4{,}5p}{(p^2 + 0{,}5)(p^2 + 1)(p^2 + 2)} = \frac{3p}{p^2 + 0{,}5} - \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{p}{p^2 + 2} =$$
$$= Z_{21(+)}(p) - Z_{21(-)}(p);$$

$$Z_{21(+)}(p) = \frac{3p}{p^2 + 0{,}5}; \quad Z_{21(-)}(p) = \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{p}{p^2 + 2}.$$

Нетрудно убедиться, что числитель $(p^5 + 5p^3 + 4{,}5p)$ имеет нули, расположенные на оси $j\omega$ плоскости p симметрично относительно оси σ и в начале координат.

Таким образом, параметры мостовой схемы четырехполюсника в данном случае равны

$$Z_1(p) = 2Z_{21(-)}(p) = \frac{2p}{p^2+1} + \frac{2p}{p^2+2}$$

и

$$Z_2(p) = 2Z_{21(+)}(p) = \frac{6p}{p^2+0{,}5}\ .$$

Реализация $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ приводит к схемам на рис. 15.19 со следующими значениями параметров:

$$C_1 = \frac{1}{2};\ L_1 = 2;\ C_3 = \frac{1}{2};\ L_3 = 1;\ C_2 = \frac{1}{6};\ L_2 = \frac{6}{0{,}5} = 12.$$

Полученная мостовая схема (рис. 15.20) содержит много элементов. Желательно, если это возможно, преобразовать ее с целью уменьшения числа элементов. Решение этой задачи является предметом раздела теории синтеза, посвященного эквивалентным преобразованиям, и его здесь не будем касаться.

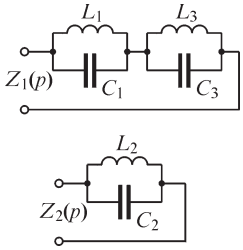


Рис. 15.19

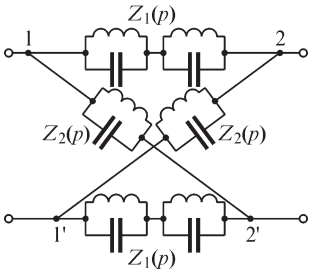


Рис. 15.20

Приведенный метод синтеза передаточной функции является одним из простейших. Существует ряд способов синтеза четырехполюсников для решения более сложных задач.

Синтез передаточных функций играет важную роль в автоматике, радиотехнике, измерительной технике. При помощи синтеза передаточной функции можно конструировать цепи, которые в сочетании с уже имеющимися цепями должны обеспечить желаемые передаточные функции всей системы в целом. На основе синтеза передаточных функций возможно конструирование корректирующих, фазовращающих, фильтрующих и других электрических цепей.

Глава шестнадцатая

Диагностика электрических цепей

16.1. Задачи и методы диагностики электрических цепей

Под диагностикой электрической цепи понимается процесс определения ее параметров по данным измерений реакций цепи на определенные воздействия при сохранении цельности объектов диагностирования в процессе проведения экспериментов. Этот процесс состоит из двух этапов — экспериментального, на котором исследователь имеет дело с реальным физическим устройством (цепью), и расчетного, на котором исследователь имеет дело со схемой замещения цепи. По возможностям организации экспериментального этапа работы диагностику подразделяют на тестовую и функциональную. При тестовой диагностике исследователь задает режимы работы диагностируемого устройства и проводит измерения реакций, которые представляются ему наиболее информативными и/или обеспечивают простоту выполнения расчетного этапа диагностики. Часто в качестве таких режимов выбирают различные «экстремальные» режимы работы диагностируемого устройства, например режимы холостого хода и короткого замыкания. Тестовая диагностика проводится, как правило, на специальных стендах, оборудованных высокоточной измерительной аппаратурой. Функциональная диагностика проводится на работающих устройствах при наличии воздействий (вибрационных, тепловых, электромагнитных и т. д.) внешней среды, использовании стандартной измерительной аппаратуры в условиях ограниченности вариаций исследуемых режимов и, следовательно, повышенной сложности выполнения расчетного этапа работы. Ценность функциональной диагностики в ее оперативности, особенно если ее организация позволяет вести непрерывное наблюдение за параметрами схем и их изменением, что исключительно важно для прогнозирования надежности, работоспособности электротехнических устройств и систем, управления режимами их работы и т. д. Достоверность результатов тестовой диагностики выше, чем функциональной.

Расчетный этап диагностики занимает промежуточное положение между анализом и синтезом электрических цепей. Поэтому здесь в большой мере проявляется и незавершенность методов синтеза, особенно сложных цепей и цепей с нелинейными элементами, и несовершенство вычислительных методов и средств анализа высокоразмерных многоэлементных систем. С математической точки зрения основные проблемы расчетного этапа связаны, во-первых, с возможной некорректностью задачи диагностики, когда неполнота либо противоречивость исходных данных затрудняет получение единственного, устойчивого решения, во-вторых, с вычислительными трудностями обеспечения приемлемой точности расчета при обработке высокоразмерных и часто плохо обусловленных систем уравнений, в-третьих, с оценкой достоверности результатов решения задачи при использовании экспериментальных данных ограниченной точности.

Задачи диагностики, в отличие от задач анализа и синтеза, в прикладном отношении больше связаны с эксплуатацией, чем с проектированием электро-

технических устройств. Однако при проектировании также приходится рассматривать вопросы диагностики, например такие, как рациональное размещение измерительных приборов, позволяющих контролировать процесс эксплуатации проектируемых устройств. Следует отметить, что диагностика электрических цепей в настоящее время является одним из интенсивно развиваемых и востребованных практикой разделов теории электрических цепей.

Рассмотрим далее методы решения задач диагностики пассивных линейных резистивных цепей в условиях относительной свободы проведения диагностических экспериментов.

При диагностике электрической цепи важна доступность ее узлов и ветвей для выполнения экспериментального этапа решения задачи диагностики, иначе говоря, наблюдаемость цепи. Будем говорить, что цепь наблюдаема по току, если экспериментальные данные достаточны для расчета токов всех ее ветвей, и наблюдаема по напряжению, если экспериментальные данные достаточны для расчета напряжений всех ветвей цепи. Очевидно, что цепь, в которой измерены токи ветвей всех связей (ветвей дополнения дерева), наблюдаема по току, а цепь, в которой измерены напряжения ветвей некоторого дерева, — наблюдаема по напряжению. В самом деле, из матричной записи законов Кирхгофа

$$\mathbf{D}\cdot\begin{Vmatrix}\mathbf{I}_{\text{д}}\\ \mathbf{I}_{\text{с}}\end{Vmatrix}=\mathbf{0},\quad \mathbf{C}\cdot\begin{Vmatrix}\mathbf{U}_{\text{д}}\\ \mathbf{U}_{\text{с}}\end{Vmatrix}=\mathbf{0},$$

где $\mathbf{D}=\begin{Vmatrix}\mathbf{1}, & -\mathbf{F}^t\end{Vmatrix}=\mathbf{0}$ и $\mathbf{C}=\begin{Vmatrix}\mathbf{F}, & \mathbf{1}\end{Vmatrix}$ — соответственно, матрицы сечений и контуров, следует, что токи ветвей дерева $\mathbf{I}_{\text{д}}$ и напряжения связей $\mathbf{U}_{\text{с}}$ могут быть рассчитаны из следующих соотношений:

$$\mathbf{I}_{\text{д}}=\mathbf{F}^t\cdot\mathbf{I}_{\text{с}},\quad \mathbf{U}_{\text{с}}=-\mathbf{F}\cdot\mathbf{U}_{\text{д}}.$$

Дальнейшее определение параметров (сопротивлений, проводимостей) резисторов наблюдаемой по току и напряжению цепи не представляет сложности и выполняется по закону Ома.

Рассмотрим решение задачи диагностики цепи, изображенной на рис. 16.1, *а*, наблюдаемой по току и напряжению. К ветвям *1*, *2*, *3*, входящим в дерево цепи, подсоединены вольтметры, а в ветви связей *4*, *5* включены амперметры. Тогда элементы вектора напряжений дерева $\mathbf{U}_{\text{д}}=\begin{Vmatrix}U_1\,U_2\,U_3\end{Vmatrix}^t$ и элементы вектора токов связей дерева $\mathbf{I}_{\text{с}}=\begin{Vmatrix}I_4\;\;I_5\end{Vmatrix}^t$ определяются (измеряются) на экспериментальном этапе, а элементы вектора токов ветвей дерева $\mathbf{I}_{\text{д}}=\begin{Vmatrix}I_1\;I_2\;I_3\end{Vmatrix}^t$ и вектора напряжений ветвей связей $\mathbf{U}_{\text{с}}=\begin{Vmatrix}U_4\;U_5\end{Vmatrix}^t$ рассчитываются как

$$\begin{Vmatrix}I_1\\ I_2\\ I_3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0 & -1\\ +1 & -1\\ -1 & +1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}I_4\\ I_5\end{Vmatrix},\qquad \begin{Vmatrix}U_4\\ U_5\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0 & -1 & +1\\ +1 & +1 & -1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\end{Vmatrix}.$$

При этом найдены величины источников $E=U_2$, $\mathfrak{I}=I_4$, а параметры резисторов могут быть рассчитаны по закону Ома $r_1=U_1/I_1$, $r_3=U_3/I_3$, $r_5=U_5/I_5$. Отметим,

что цепь будет наблюдаема по току и напряжению и в том случае, когда амперметры включены в ветви связей одного дерева, а вольтметры подсоединены к ветвям другого дерева. В качестве такого другого дерева может быть использовано так называемое фундаментальное дерево, ветви которого связывают каждый

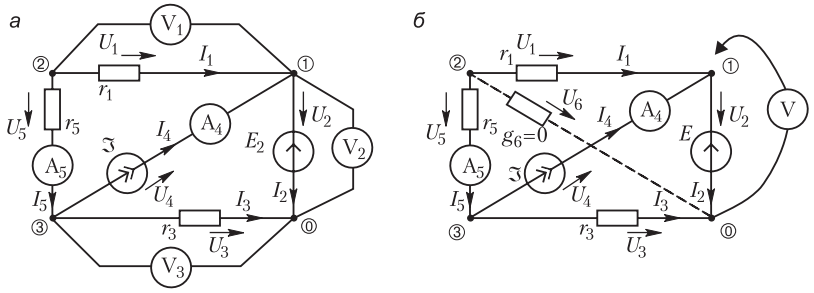


Рис. 16.1

из узлов схемы с базисным узлом. Если между некоторым узлом и базисным узлом нет ветви, то можно ввести фиктивную — сингулярную ветвь с нулевой проводимостью — ветвь *6* в схеме, представленной на рис. 16.1, *б*, здесь фундаментальное дерево образуют ветви *2*, *3*, *6*. Измерив напряжения U_2, U_3, U_6 ветвей фундаментального дерева, равные соответствующим узловым напряжениям, найдем напряжения остальных ветвей как разности напряжений ветвей фундаментального дерева: $U_1 = U_6 - U_2$, $U_4 = U_3 - U_2$, $U_5 = U_6 - U_3$. Поэтому для наблюдаемости цепи по напряжению необходима и достаточна доступность для измерений всех узлов цепи. В общем случае для цепи с q узлами и p ветвями для наблюдаемости по напряжению необходима возможность выполнения не менее $(q - 1)$-го измерения напряжений, а для наблюдаемости по току — не менее $(p - q + 1)$-го измерения токов.

16.2. Диагностика пассивных цепей методом узловых сопротивлений

В тех случаях, когда цепь не полностью наблюдаема по току или напряжению или когда в рассматриваемом режиме токи (напряжения) некоторых ветвей равны нулю и значения сопротивлений (проводимостей) резисторов не удается рассчитать по закону Ома, необходимо рассматривать другие режимы, иногда объединяя результаты их наблюдения на расчетном этапе диагностики. Покажем, как это можно сделать при тестовой диагностике наблюдаемого по напряжению пассивного многополюсника П, изображенного на рис. 16.2, *а*, топологическая структура которого неизвестна. При ограничениях, которые будут оговорены ниже, задачу тестовой диагностики можно считать решенной, если найдена матрица узловых проводимостей цепи **Y**:

$$\mathbf{Y} = \{Y_{ij}\}_{n,n} = \begin{Vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nn} \end{Vmatrix},$$

где $n + 1$ — число узлов цепи. Для нахождения матрицы **Y** сформируем по данным диагностических экспериментов матрицу $\mathbf{Y}^{-1} = \mathbf{Z} = \{Z_{ij}\}_{n,n}$, называемую матрицей узловых сопротивлений. Метод диагностики пассивных электрических цепей, основанный на экспериментальном определении узловых сопротивлений Z_{ij}, $i, j = 1, 2, ..., n$, и последующем числовом расчете матрицы $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$, назовем методом узловых сопротивлений.

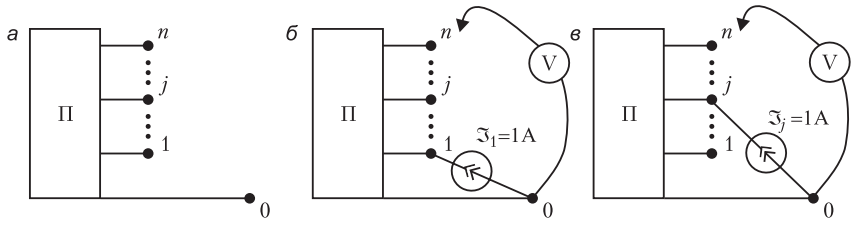


Рис. 16.2

Для реализации метода узловых сопротивлений между узлами 0 и 1 многополюсника П (рис. 16.2, *б*) включим источник тока равный 1 А (в общем случае — одной относительной единице тока). Измеренные при первом диагностическом эксперименте узловые напряжения U_i^1, $i = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют системе уравнений, составленной для этой схемы по методу узловых напряжений,

$$\begin{Vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \ldots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \ldots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \ldots & Y_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ \vdots \\ U_n^1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \Im_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix},$$

в которой неизвестными являются коэффициенты матрицы **Y**. Из полученного уравнения нельзя однозначно найти коэффициенты матрицы узловых проводимостей, так как число неизвестных в системе, равное n^2, больше числа уравнений n. Для однозначного определения коэффициентов матрицы **Y** можно провести еще $n - 1$ эксперимент. В каждом j-м эксперименте ($j = 2, 3, ..., n$) источник тока подключают между узлами 0 и j (рис. 16.2, *в*), что обеспечивает задающий ток j-го узла равным 1 А. После этого измеряют n узловых напряжений U_i^j, $i = 1, 2, \ldots, n$. Соответствующая система уравнений для j-го эксперимента имеет вид

$$\begin{Vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \ldots & Y_{1j} & \ldots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \ldots & Y_{2j} & \ldots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Y_{j1} & Y_{j2} & \ldots & Y_{jj} & \ldots & Y_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \ldots & Y_{nj} & \ldots & Y_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} U_1^j \\ U_2^j \\ \vdots \\ U_j^j \\ \vdots \\ U_n^j \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \Im_j \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix},$$

где U_i^j, $i = 1, 2, \ldots, n$ — узловые напряжения, измеренные в j-м эксперименте, а $_j = 1$ А. Полученные системы уравнений можно объединить в одну:

$$\begin{Vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} U_1^1 & U_1^2 & \dots & U_1^n \\ U_2^1 & U_2^2 & \dots & U_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n^1 & U_n^2 & \cdots & U_n^n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{I}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathfrak{I}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{I}_n \end{Vmatrix} \text{ или } \mathbf{Y} \cdot \mathbf{U} = \mathfrak{I}.$$

Умножим правую и левую части последнего уравнения на $\mathfrak{I}^{-1}$, тогда

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathfrak{I}^{-1} = \mathbf{1} \quad \text{или} \quad \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{1}.$$

Для упрощения записи дальнейших математических выкладок введем безразмерные величины $Y_{ij*}, U_{i*}^j, \mathfrak{I}_{j*}$, связанные с соответствующими узловыми проводимостями, напряжениями и задающими токами соотношениями

$$Y_{ij} \quad Y_0 Y_{ij*}; \; U_i^j = U_0 U_{i*}^j; \; \mathfrak{I}_i = \mathfrak{I}_0 \mathfrak{I}_{i*}; \; i, j \quad 1, 2, ..., n,$$

где $Y_0 = 1$ См; $U_0 = 1$ В; $\mathfrak{I}_0 = 1$ А (в общем случае Y_0, U_0 и $\mathfrak{I}_0$ равны любым заданным единицам проводимости, напряжения, тока, соответственно). Тогда систему уравнений $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{U} = \mathfrak{I}$ можно представить в виде

$$\begin{Vmatrix} Y_{11*} & Y_{12*} & \dots & Y_{1n*} \\ Y_{21*} & Y_{22*} & \dots & Y_{2n*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1*} & Y_{n2*} & \dots & Y_{nn*} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} U_{1*}^1 & U_{1*}^2 & \dots & U_{1*}^n \\ U_{2*}^1 & U_{2*}^2 & \dots & U_{2*}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{n*}^1 & U_{n*}^2 & \cdots & U_{n*}^n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{Y} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{1}.$$

Если при этом не возникает путаницы, то индекс * будем опускать, оговаривая размерность используемых величин. При достаточно точных измерениях напряжений во всех экспериментах значения этих напряжений численно совпадают с соответствующими значениями узловых сопротивлений, т. е. $U_i^j = Z_{ij}$. Тогда решение рассматриваемой задачи диагностики имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} U_1^1 & U_1^2 & \dots & U_1^n \\ U_2^1 & U_2^2 & \dots & U_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n^1 & U_n^2 & \cdots & U_n^n \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{Vmatrix}^{-1}.$$

Здесь и далее имеются в виду численные равенства для соответствующих безразмерных величин. Если известно, что диагностируется взаимная электрическая цепь, обладающая симметричными матрицами **Y** и **Z**, то для построения системы $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{1}$ можно вместо n^2 измерений напряжений выполнить только $n(n + 1)/2$ измерений, необходимых для воссоздания нижней (верхней) треугольной части матрицы **U** (матрицы **Z**). Для верхней части матрицы напряжений (матрицы узловых сопротивлений) можно положить $U_j^k = U_k^j (Z_{jk} = Z_{kj}$; $j < k \le n$; $j = 1, 2, ..., n - 1$).

На практике измерения проводятся с погрешностью, а иногда не исключается возможность и грубых ошибок. В этой ситуации и для взаимной электрической цепи целесообразно провести все измерения. Тогда значение невязки $\varepsilon_{jk} = |U_j^k - U_k^j|$, $j \ne k$, можно использовать как индикатор грубых ошибок изме-

рений. Если невязка ε_{jk} больше некоторого наперед заданного значения ε, характеризуемого, например, классом точности измерительной аппаратуры, то измерения напряжений U_j^k, U_k^j следует произвести заново. Если невязка ε_{jk} достаточно мала, т. е. $\varepsilon_{jk} \ll \varepsilon$, то в качестве значения узлового сопротивления Z_{jk} Z_{kj} можно принять среднеарифметическое значение Z_{jk} $Z_{kj} = (U_j^k + U_k^j)/2$, как ближайшее к измеренным значениям. Таким образом, взаимной электрической цепи в результате подобной обработки данных экспериментов соответствует симметричная матрица узловых сопротивлений

$$\mathbf{Z} = \{Z_{ij}\}_{nn} = \{(U_j^k + U_k^j)/2\}_{nn} = (\mathbf{U} + \mathbf{U}^t)/2,$$

как более достоверная.

Таким образом, сформировав по данным диагностических экспериментов матрицу узловых сопротивлений $\mathbf{Z}$, симметричную для взаимной и несимметричную для невзаимной цепи, можно рассчитать искомую матрицу $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$. Если при этом диагностируется взаимная электрическая цепь, а из-за вычислительных ошибок, допущенных при обращении матрицы $\mathbf{Z}$, матрица $\mathbf{Z}^{-1}$ окажется несимметричной, то в качестве искомой матрицы следует принять симметричную матрицу

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{Z}^{-1} + (\mathbf{Z}^{-1})^t]/2.$$

Как отмечалось в начале параграфа, по матрице $\mathbf{Y}$ можно вычислить проводимости ветвей диагностируемой цепи, если последняя удовлетворяет определенным ограничениям. Здесь предполагается отсутствие в цепи параллельно соединенных ветвей и ветвей, замкнутых в петли. В этом случае проводимость, соединяющая узлы i и j ($i \neq j$),

$$g_{ij} = \begin{cases} |Y_{ij}|, & \text{если} \quad i, j \neq 0; \\ \sum_{k=1}^{n} Y_{ik}, & \text{если} \quad i \neq j = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 16.3. Проводимости ветвей цепи, так же как и матрица ее узловых проводимостей

$$\mathbf{Y} = \begin{Vmatrix} 0{,}75 & -0{,}25 & 0 \\ -0{,}25 & 0{,}775 & -0{,}125 \\ 0 & -0{,}125 & 0{,}225 \end{Vmatrix},$$

подлежат определению. Положим, что в диагностических экспериментах узловые напряжения измерены с погрешностью 10^{-4} В (0,01 %). По данным этих экспериментов была получена матрица напряжений

$$\mathbf{U} = \begin{Vmatrix} 1{,}512 & 0{,}5357 & 0{,}2976 \\ 0{,}5357 & 1{,}607 & 0{,}8930 \\ 0{,}2976 & 0{,}8928 & 4{,}941 \end{Vmatrix},$$

в которой $U_{32} \neq U_{23}$. Так как диагностируется взаимная цепь, то в качестве матрицы узловых сопротивлений $\mathbf{Z}$ целесообразно принять симметричную матрицу

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{U} + \mathbf{U}^t}{2} = \begin{Vmatrix} 1{,}512 & 0{,}5357 & 0{,}2976 \\ 0{,}5357 & 1{,}607 & 0{,}8929 \\ 0{,}2976 & 0{,}8929 & 4{,}941 \end{Vmatrix},$$

ближайшую к матрице **U**, обратив которую, получим матрицу узловых сопротивлений

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} = \begin{Vmatrix} 0{,}75 & -0{,}25 & -3{,}1483 \cdot 10^{-12} \\ -0{,}25 & 0{,}775 & -0{,}125 \\ -2{,}7878 \cdot 10^{-11} & -0{,}125 & 0{,}225 \end{Vmatrix} \cong \begin{Vmatrix} 0{,}75 & -0{,}25 & 0 \\ -0{,}25 & 0{,}775 & -0{,}125 \\ 0 & -0{,}125 & 0{,}225 \end{Vmatrix}.$$

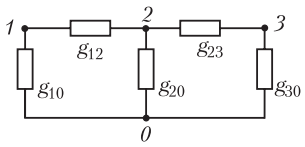


Рис. 16.3

При этом элементы Y_{13} и Y_{31} можно принять равными нулю, считая, что их отличие от нуля вызвано ошибками численного обращения матрицы **Z**. Полученная матрица **Y** совпадает с истинной матрицей диагностируемой цепи. Таким образом, удается точно определить искомые проводимости ветвей:

$$g_{10} = Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} = 0{,}75 - 0{,}25 = 0{,}5 \text{ См},$$
$$g_{20} = Y_{21} + Y_{22} + Y_{23} = -0{,}25 + 0{,}775 - 0{,}125 = 0{,}4 \text{ См},$$
$$g_{30} = Y_{31} + Y_{32} + Y_{33} = -0{,}125 + 0{,}225 = 0{,}1 \text{ См},$$
$$g_{12} = |Y_{12}| = 0{,}25 \text{ См},$$
$$g_{23} = |Y_{23}| = 0{,}125 \text{ См}.$$

На практике трудно обеспечить такую высокую точность проведения экспериментов. Рассмотрим, как изменится решение задачи диагностики при менее точном проведении измерений в диагностических экспериментах. Пусть по экспериментальным данным сформирована матрица узловых сопротивлений, элементы которой вычислены с погрешностью $\approx 3\,\%$,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{U} = \begin{Vmatrix} 1{,}51 & 0{,}53 & 0{,}29 \\ 0{,}53 & 1{,}6 & 0{,}88 \\ 0{,}29 & 0{,}89 & 4{,}94 \end{Vmatrix} \Rightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} = \begin{Vmatrix} 0{,}7494 & -0{,}2487 & -0{,}0008 \\ -0{,}2487 & 0{,}7711 & -0{,}1254 \\ -0{,}0008 & -0{,}1254 & 0{,}225 \end{Vmatrix},$$

откуда получим: $g_{10} = 0{,}4999$ См, $g_{20} = 0{,}397$ См, $g_{30} = 0{,}0988$ См, $g_{12} = 0{,}2487$ См, $g_{23} = 0{,}1254$ См, $g_{13} = 0{,}0008$ См.

Как видно, погрешность определения проводимостей ветвей близка к погрешности задания исходной информации и составляет $\approx 3\,\%$. Однако в этом случае элементы Y_{13} и Y_{31} нельзя считать равными нулю только по виду полученной матрицы **Y**, так как их величины сопоставимы с погрешностью решения задачи. Если топологическая структура диагностируемой цепи заранее не известна и цепь рассматривается как «черный ящик», то решить вопрос о том, соединены или нет узлы *1* и *3* ветвью с малой (порядка 10^{-3} См) проводимостью, не представляется возможным. Произвольный же выбор одного из альтернативных вариантов может привести к неправильной интерпретации результатов.

Пусть элементы матрицы **Z** определены с погрешностью $\approx 7\,\%$, тогда

$$\mathbf{Z} = \mathbf{U} = \begin{Vmatrix} 1{,}5 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 1{,}6 & 0{,}9 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 4{,}9 \end{Vmatrix} \Rightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} = \begin{Vmatrix} 0{,}7442 & -0{,}2308 & -0{,}0032 \\ -0{,}2308 & 0{,}7686 & -0{,}127 \\ -0{,}0032 & -0{,}127 & 0{,}2276 \end{Vmatrix}.$$

Проводимости ветвей, определенные по матрице **Y**, будут: g_{10} = 0,5102 См, g_{20} = 0,4108 См, g_{30} = 0,0974 См, g_{12} = 0,2308 См, g_{23} = 0,127 См, g_{13} = 0,0032 См. При этом погрешность определения проводимостей ветвей, за исключением проводимости g_{13} сопоставима с погрешностью исходных данных ≈ 8 %.

Анализ решения рассмотренных задач диагностики показывает, что при достаточно малых значениях погрешностей измерений (0,01 и 3 %) диагностику рассматриваемой цепи удается осуществить достаточно точно. С ростом погрешностей измерений ухудшается и точность решения задачи, причем при достаточно больших погрешностях измерений (7 %) по полученным результатам уже невозможно идентифицировать структуру диагностируемой цепи с априори неизвестной топологией.

Рассмотренные примеры показывают, что решения задачи диагностики чувствительны к точности проведения соответствующих экспериментов. Аналитическая оценка влияния погрешностей измерений на результат диагностирования представляет собой самостоятельную задачу, которую можно, например, решить в рамках линейной теории погрешностей.

Имеется возможность косвенной оценки точности решения задачи диагностики цепей с априори заданной топологической структурой. Для подобных цепей известно, когда в расчете должны появляться нулевые значения проводимостей. Если узлы k и l (в частности, узлы *1* и *3* для цепи, изображенной на рис. 16.3) в диагностируемой цепи непосредственно не соединены, то при расчете проводимости g_{kl} получают значение, близкое к нулю, причем возможное отличие от нуля обусловлено ошибками измерений и вычислений. По значению проводимостей, по их отличию от нуля, можно судить о точности решения задачи диагностики. Так, при диагностике цепи, изображенной на рис. 16.3 при выполнении измерений с различной погрешностью вместо значения $Y_{13} = Y_{31} = 0$ были получены, соответственно, значения $\approx -10^{-11}$, –0,0008, –0,0032, которые хорошо иллюстрируют точность решения этих задач. Кроме того, возможность косвенной оценки точности решения задачи диагностики цепей с априори известной топологической структурой связана с проверкой условия равенства нулю сумм элементов каждой k-й строки $\left(\sum_{l=1}^{l=n} Y_{kl} = 0\right)$ и каждого k-го столбца $\left(\sum_{l=1}^{l=n} Y_{lk} = 0\right)$ матрицы **Y**, номера k которых соответствуют узлам, не инцидентным базисному (нулевому) узлу диагностируемой цепи.

Достоинством рассмотренного метода узловых сопротивлений является простота его экспериментальной части, что позволяет сравнительно просто автоматизировать процесс диагностики многополюсников, причем в том случае, когда диагностируются резистивные цепи, требуется лишь два измерительных прибора: вольтметр (рис. 16.2, *б*, *в*) и амперметр, необходимый для установления еди-

ничных токов с помощью одного регулируемого источника. Последний обычно представляет собой источник ЭДС с последовательно включенным резистором, который помимо регулировочных функций выполняет функции защиты цепи, источника ЭДС и амперметра, ограничивая токи в первые моменты присоединения источника к узлам диагностируемой цепи. Изложенный метод применим и для определения комплексных проводимостей.

16.3. Диагностика пассивных цепей обобщенным методом узловых сопротивлений

В случае функциональной диагностики резистивного многополюсника, входящего в состав сложной цепи (рис. 16.4, *а*), внешняя по отношению к многополюснику ее часть А в каждом j-м режиме может быть заменена соответствующим многомерным генератором тока (рис. 16.4, *б*). Если при этом имеется возможность рассмотрения n независимых режимов $j = 1, 2, ..., n$, то по результатам измерений в них задающих токов узлов $\mathfrak{I}_k^j$ и соответствующих узловых напряжений $U_k^j, k = 1, 2, \ldots, n$ может быть составлена следующая система уравнений

$$\begin{Vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \ldots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \ldots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \ldots & Y_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} U_1^1 & U_1^2 & \ldots & U_1^n \\ U_2^1 & U_2^2 & \ldots & U_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n^1 & U_n^2 & \cdots & U_n^n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{I}_1^1 & \mathfrak{I}_1^2 & \ldots & \mathfrak{I}_1^n \\ \mathfrak{I}_2^1 & \mathfrak{I}_2^2 & \ldots & \mathfrak{I}_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{I}_n^1 & \mathfrak{I}_n^2 & \ldots & \mathfrak{I}_n^n \end{Vmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{Y} \cdot \mathbf{U} = \mathfrak{I}.$$

Если матрица узловых напряжений $\mathbf{U}$ не вырождена, то искомую матрицу узловых проводимостей можно найти как $\mathbf{Y} = \mathfrak{I} \cdot \mathbf{U}^{-1}$.

Для обеспечения невырожденности матрицы $\mathbf{U}$ необходимо, чтобы векторы задающих токов $\left\| \mathfrak{I}_1^j \ \mathfrak{I}_2^j \ \ldots \ \mathfrak{I}_n^j \right\|^t, j = 1, 2, ..., n$, были линейно независимы. Последующее определение параметров ветвей электрической цепи производят так же, как и при использовании метода узловых сопротивлений.

При тестовой диагностике цепи обобщенным методом узловых сопротивлений не обязательно подсоединять к каждому узлу многополюсника регулируемый источник питания. Некоторые узлы можно соединять с базисным или любым другим узлом через регулируемый резистор (рис. 16.4, *в*), изменение которого обеспечивает изменение задающих токов. Эти возможности ценны для инженерной практики, где вопросы рациональной организации экспериментальной части работы приобретают первостепенное значение.

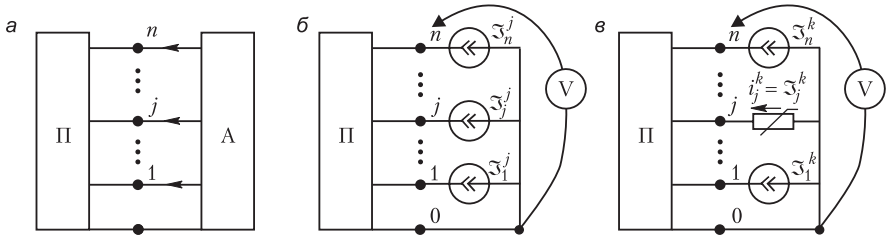


Рис. 16.4

Рассмотрим решение задачи диагностики параметров П-образного четырехполюсника обобщенным методом узловых сопротивлений в том случае, когда варьируемая проводимость между узлами *2* и *0* принимает предельные значения (0 и ∞), что соответствует опытам холостого хода (рис. 16.5, *а*) и короткого замыкания (рис. 16.5, *б*).

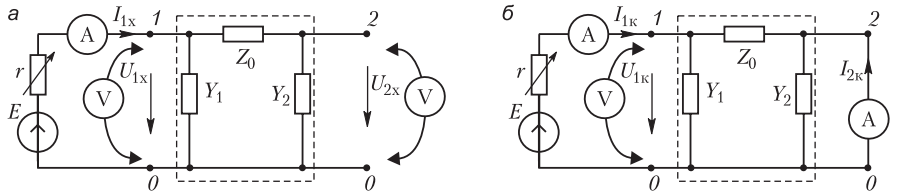


Рис. 16.5

В первом диагностическом эксперименте, когда узел *2* не соединен с базисным узлом (рис. 16.5, *а*), измеряются напряжения $U_1^1 = U_{1x}$, $U_2^1 = U_{2x}$ и ток $\mathfrak{I}_1^1 = I_{1x}$, ток $\mathfrak{I}_2^1$ при этом равен нулю.

Во втором диагностическом эксперименте, когда узлы *2* и *0* замкнуты накоротко, измеряются токи $\mathfrak{I}_1^2 = I_{1к}$, $\mathfrak{I}_2^2 = I_{2к}$ и напряжение $U_1^2 = U_{1к}$, напряжение U_2^2 при этом равно нулю. Индексы «х» и «к» соответствуют опытам холостого хода и короткого замыкания.

По данным диагностических экспериментов формируется система уравнений

$$\begin{Vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} U_1^1 & U_1^2 \\ U_2^1 & U_2^2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{I}_1^1 & \mathfrak{I}_1^2 \\ \mathfrak{I}_2^1 & \mathfrak{I}_2^2 \end{Vmatrix},$$

$$U_1^1 = U_{1x},\ U_2^1 = U_{2x},\ U_1^2 = U_{1к},\ U_2^2 = 0,\ \mathfrak{I}_1^1 = I_{1x},\ \mathfrak{I}_2^1 = 0,\ \mathfrak{I}_1^2 = I_{1к},\ \mathfrak{I}_2^2 = I_{2к}.$$

Решение полученной системы уравнений имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} I_{1x} & I_{1к} \\ 0 & I_{2к} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & \dfrac{1}{U_{2x}} \\ \dfrac{1}{U_{1к}} & -\dfrac{U_{1x}}{U_{1к}U_{2x}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dfrac{I_{1к}}{U_{1к}} & \dfrac{I_{1x}}{U_{2x}} - \dfrac{I_{1к}U_{1x}}{U_{1к}U_{2x}} \\ \dfrac{I_{2к}}{U_{1к}} & -\dfrac{I_{2к}U_{1x}}{U_{1к}U_{2x}} \end{Vmatrix}.$$

Искомые параметры четырехполюсника определим с учетом равенства $Y_{12} = Y_{21} = I_{2к}/U_{1к}$ из соотношений

$$Z_x = 1/|Y_{21}| = U_{1к}/I_{2к},\quad Y_1 = Y_{11} + Y_{12} = (I_{1к} + I_{2к})/U_{1к},\quad Y_2 = Y_{22} + Y_{21} = \frac{I_{2к}}{U_{1к}}\left(1 - \frac{U_{1x}}{U_{2x}}\right).$$

Полученные выражения совпадают с аналогичными выражениями из теории четырехполюсников. Но здесь проведение опытов холостого хода и короткого замыкания для определения параметров четырехполюсника является лишь одной из множества возможных реализаций обобщенного метода узловых сопротивлений.

Основное достоинство рассмотренного метода диагностики связано с возможностью выбора различных способов реализации экспериментальной части работы, что равно важно как для тестовой, так и для функциональной диагностики.

В случае тестовой диагностики эта возможность позволяет оптимизировать выполнение экспериментальной и/или расчетной части работы, повысить точность определения параметров и т. д. Для функциональной же диагностики, где выбор режима не произволен, эта возможность позволяет сформировать необходимые для однозначного определения искомых параметров уравнения $\mathbf{Y}\cdot\mathbf{U}=\mathfrak{I}$.

16.4. Использование метода узловых сопротивлений для диагностики активных электрических цепей

В данном параграфе будет рассмотрена задача определения проводимостей ветвей активной цепи (элементов матрицы узловых проводимостей $\mathbf{Y}$) в том случае, когда отсутствует возможность отключения ее внутренних источников. Для решения этой задачи проведем серию измерений, первым в которой будет измерение напряжений всех узлов активного многополюсника A_n (рис. 16.6) без подключения к ним каких-либо дополнительных элементов. Данному опыту соответствует следующая система уравнений, составленная по методу узловых напряжений:

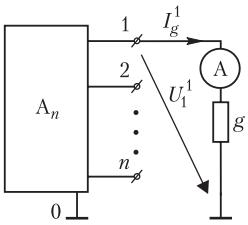


Рис. 16.6

$$\mathbf{Y}\cdot\mathbf{U}_0 = \mathfrak{I}_{\text{внутр}},$$

где $\mathfrak{I}_{\text{внутр}}$ – вектор задающих источников многополюсника A_n, а $\mathbf{U}_0$ — столбец измеренных узловых напряжений.

Следующий опыт состоит в измерении напряжений $\mathbf{U}^{(1)} = \left\| U_1^1 U_2^1 \ldots U_n^1 \right\|^t$, всех узлов многополюсника, присоединенных через проводимость g его первого и нулевого узлов (рис. 16.6). Ток I_g^1, протекающий через проводимость g, измеряется с помощью амперметра.

Система уравнений, соответствующая данному опыту, имеет вид

$$\tilde{\mathbf{Y}}\cdot\mathbf{U}^{(1)} = \mathfrak{I}_{\text{внутр}}.$$

Матрицы $\tilde{\mathbf{Y}}$и $\mathbf{Y}$ различаются только элементом с индексами (1,1):

$$\tilde{Y}_{1,1} = Y_{1,1} + g,$$

где $Y_{1,1}$, $\tilde{Y}_{1,1}$ — элементы матриц $\mathbf{Y}$ и $\tilde{\mathbf{Y}}$, соответственно.

Тогда систему уравнений, описывающую данный опыт, можно преобразовать следующим образом

$$(\mathbf{Y}+g\cdot\mathbf{e}_1^t\cdot\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{U}^{(1)} = \mathfrak{I}_{\text{внутр}} \Rightarrow \mathbf{Y}\cdot\mathbf{U}^{(1)} = \mathfrak{I}_{\text{внутр}} - g\cdot\mathbf{e}_1^t\cdot\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{U}^{(1)}$$

где $\mathbf{e}_1$ – строка, первый элемент которой равен единице, а остальные нули. Правая часть последнего уравнения может быть записана в виде:

$$\mathbf{Y}\cdot\mathbf{U}^{(1)} = \mathfrak{I}_{\text{внутр}} - g\cdot U_1^1\cdot\mathbf{e}_1^t \Rightarrow \mathbf{Y}\cdot\mathbf{U}^{(1)} = \mathfrak{I}_{\text{внутр}} - I_g^1\cdot\mathbf{e}_1^t,$$

U_1^1– напряжение первого узла, I_g^1– ток, протекающий через проводимость g, соединяющую первый и нулевой узлы, измеряемый амперметром А. Принимая во внимание, что $\tilde{\mathbf{Y}}\cdot\mathbf{U}_0 = \mathfrak{I}_{\text{внутр}}$, преобразуем последнее уравнение к виду

$$\mathbf{Y}\cdot\tilde{\mathbf{U}}^{(1)} = I_g^1\cdot\mathbf{e}_1^t, \text{ где } \tilde{\mathbf{U}}^{(1)} = \mathbf{U}_0 - \mathbf{U}^{(1)}.$$

Продолжая серию опытов, соединяя поочередно узлы многополюсника с нулевым узлом через проводимость g и измеряя токи I_g^k $(k = 2, 3, ..., n)$ через g и напряжения узлов многополюсника, получим n систем уравнений вида

$$\mathbf{Y} \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{(k)} = I_g^k \cdot \mathbf{e}_k^t, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

где $\tilde{\mathbf{U}} = \left\| \mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)}, \ldots, \mathbf{U}^{(n)} \right\|$, I_g^k — ток, протекающий через проводимость g, соединяющую k-й и нулевой узлы, $\mathbf{e}_k^t$ — вектор, k-й элемент которого равен единице, а остальные нули. Аналогично тому, как это делалось в методе узловых сопротивлений, объединим n систем уравнений в одно уравнение вида

$$\mathbf{Y} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{I}_g,$$

где $\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{U}^1, \ldots, \tilde{U}^n)$, $\mathbf{I}_g = \mathrm{diag}\{I_g^k\}$, $k = 1, 2, ..., n$. Тогда решение задачи диагностики имеет вид

$$\mathbf{Y} = \mathbf{I}_g \cdot \tilde{\mathbf{U}}^{-1}.$$

Таким образом, диагностика активной цепи методом узловых сопротивлений мало отличается от диагностики пассивной цепи. Число опытов увеличивается на единицу, однако сами опыты несколько проще, так как не требуют дополнительного источника энергии.

16.5. Диагностика электрических цепей в условиях неполноты и противоречивости исходных данных

В предыдущих параграфах рассматривались ситуации, когда экспериментальные данные позволяли сформировать на расчетном этапе работы систему уравнений, имеющую единственное и устойчивое решение, т. е. корректно поставить соответствующую математическую задачу определения искомых параметров диагностируемой цепи. На практике же вследствие ограниченности свободы в вариации режимов, особенно при функциональной диагностике, недоступности целых подцепей для измерений (при неполной наблюдаемости цепи), неточности, а подчас и явной грубости результатов измерений, экспериментальные данные зачастую отличаются неполнотой и противоречивостью. Ситуация может усугубиться и вследствие неверной информации о топологической структуре цепи. В современных электротехнических устройствах и системах, как правило, используется большое количество элементов ключевой природы, изменение состояния которых (открыт, закрыт), по сути, меняет топологию цепи. Ложная информация о реальном состоянии таких элементов приводит к неверным выводам о структуре и даже о размерности математической модели, формируемой на расчетном этапе диагностики. При этом задача обработки такой модели может оказаться некорректной (некорректно поставленной), т. е. решение соответствующей системы уравнений может не существовать, быть не единственным или неустойчивым. Все это существенно осложняет выполнение расчетной части диагностической задачи, так как многообразие возможных ситуаций, неполнота или противоречивость экспериментальных данных затрудняют выработку единого алгоритма для формирования и решения некорректно поставленной задачи

математической обработки экспериментальных данных. Сформулируем ряд общих рекомендаций по формированию математических моделей для расчетных этапов диагностики цепей в этих случаях. Суть этих рекомендаций сводится, во-первых, к способам учета всей полноты информации о диагностируемом объекте, а также условиях и средствах осуществления экспериментального этапа работы и, во-вторых, к формированию математической модели не в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), а в виде задачи минимизации функционала с ограничениями для СЛАУ. В этом случае корректность постановки достигается тем, что вместо поиска решения СЛАУ, которое может не существовать или быть не единственным, на расчетном этапе задачи диагностики находят единственное псевдорешение СЛАУ.

Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 16.7. Показания амперметров A_1–A_3 обозначим как $\tilde{I}_1$, $\tilde{I}_2$, $\tilde{I}_3$, а вольтметров V_1, V_2 — соответственно как $\tilde{U}_1$, $\tilde{U}_2$. Цепь наблюдаема по току и не полностью наблюдаема по напряжению (не известны напряжения на сопротивлениях r_3, r_4). Для практики довольно типична ситуация, когда показания приборов не удовлетворяют соответствующим законам Кирхгофа, поэтому положим, что здесь $\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 \neq \tilde{I}_3$.

Таким образом, экспериментальная информация в рассматриваемой задаче диагностики неполна (ее недостаточно для определения r_3, r_4) и противоречива ($\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 \neq \tilde{I}_3$). Для однозначного решения этой задачи и корректной постановки ее расчетного этапа, привлечем дополнительную информацию, которая всегда есть у исследователя. Это могут быть паспортные значения искомых параметров элементов, соотношения между параметрами элементов, обусловленные их природой, результаты предшествующих тестовых испытаний.

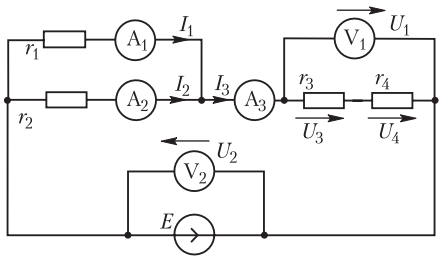


Рис. 16.7

Пусть в нашем случае известно, что амперметр A_3 – высокоточный, а амперметры A_1, A_2 одинаковы и показания их гораздо менее достоверны. Тогда может быть составлена следующая переопределенная система уравнений для определения токов I_1, I_2.

$$\left\| 1\ 1 \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix} \right\| = \tilde{I}_3,$$

дополненная условием минимизации отклонения искомых решений I_1, I_2 от их экспериментально полученных значений $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2$

$$(I_1 - \tilde{I}_1)^2 + (I_2 - \tilde{I}_2)^2 \to \min.$$

Тогда искомые псевдорешения равны

$$\left\| \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} \tilde{I}_1 - \tilde{I}_2 + \tilde{I}_3 \\ -\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + \tilde{I}_3 \end{matrix} \right\|$$

Тогда $r_1 = -(\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2)/I_1$, $r_2 = -(\tilde{U}_1 + \tilde{U}_2)/I_2$.

Положим, что нам известны паспортные значения сопротивлений r_3, r_4, равные $\bar{r}_3$, $\bar{r}_4$, а также то обстоятельство, что по типу исполнения резисторов, условиям эксплуатации, соотношениям номиналов r_3, r_4 возможности отклонения параметров резисторов от номиналов были одинаковы. Тогда недоопределенную систему уравнений

$$\| 1\ 1 \| \cdot \left\| \begin{matrix} r_3 \\ r_4 \end{matrix} \right\| = \tilde{r}, \quad \tilde{r} = \frac{\tilde{U}_1}{\tilde{I}_3}$$

можно доопределить условием $(r_3 - \bar{r}_3)^2 + (r_4 - \bar{r}_4)^2 \to \min$, совместное решение которых дает

$$r_3 = \frac{\tilde{r} + \bar{r}_3 - \bar{r}_4}{2}, \quad r_4 = \frac{\tilde{r} - \bar{r}_3 + \bar{r}_4}{2}.$$

В заключении заметим, что достоверность решения задач рассматриваемого типа зависит от объема и качества привлекаемой дополнительной информации, которая всегда есть у исследователя, главное — правильно ее формализовать.

16.6. Диагностики электрических цепей, обладающих жесткими математическими моделями

При диагностике цепей методом узловых сопротивлений могут возникать ситуации, когда решение является неустойчивым и сильно зависит от погрешности в измерениях узловых напряжений. Такие ситуации возникают, когда в цепи, диагностируемой методом узловых сопротивлений, есть сечения, проходящие только по ветвям с проводимостью, малой по отношению к проводимостям остальных ветвей. Таким образом, в схеме цепи может быть выделена подсхема, отделенная от остальной схемы ветвями с малой проводимостью. Сечения, проходящие по ветвям с малой проводимостью, будем называть далее особыми.

Наличие в цепи особых сечений приводит к так называемым плохо обусловленным математическим моделям цепи. В частности, при применении метода узловых сопротивлений плохо обусловленными будут матрица **Y** узловых проводимостей цепи и соответствующая ей матрица **Z** узловых сопротивлений. Матрица плохо обусловлена, если соответствующая ей обратная матрица неустойчива, т. е. малым изменениям параметров исходной матрицы соответствуют большие изменения в обратной матрице.

Решение системы линейных уравнений с плохо обусловленной матрицей сильно изменяется при малых изменениях элементов матрицы или вектора правых частей. Такие системы уравнений носят название жестких.

Для обусловленности матрицы **A** предложены различные количественные характеристики, называемые числами обусловленности, одним из них является число Тодда (спектральное число обусловленности):

$$\Theta = \frac{\max|\lambda_i(\mathbf{A})|}{\min|\lambda_i(\mathbf{A})|},$$

где λ_i – собственные значения матрицы **A**. Чем больше число обусловленности, тем менее устойчива система уравнений.

В общем случае в цепи возможно наличие нескольких особых сечений. При этом схема как бы разбивается на ряд подсхем, гальванически слабо связанных между собой. Эти сечения могут быть вложенными друг в друга. Будем называть далее задачу диагностики цепи, не содержащей особых сечений, задачей нулевого порядка сложности, задачу диагностики цепи, содержащей одно особое сечение, — задачей первого порядка сложности. Задача диагностики второго порядка сложности соответствует цепи, содержащей два особых сечения, вложенных одно в другое и т. д. Цепь m-го порядка сложности можно представить в виде многополюсников Π_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, связанных между собой ветвями с малой проводимостью, образующими особые сечения s_j, $j = 1, 2, ..., m - 1$ (рис. 16.8).

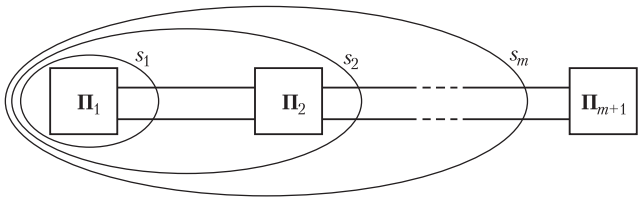


Рис. 16.8

Каждое сечение, проходящее по ветвям с малой проводимостью, вносит в спектр матрицы узловых проводимостей **Y** цепи малое по модулю собственное значение. Это можно объяснить следующим образом. Пусть в рассматриваемой цепи имеется такое сечение. Тогда в предельном случае, когда значения проводимостей ветвей, пересекаемых сечением, равны нулю, цепь распадается на две подцепи, не связанные между собой. Следовательно, при анализе цепи методом узловых напряжений, можно было бы рассматривать каждую подцепь отдельно и в каждой из них выбрать свой нулевой узел. Тогда в матрице узловых проводимостей **Y** цепи, состоящей из двух гальванически не связанных подцепей, будет присутствовать одна линейно зависимая строка (и, соответственно, столбец) и одно ее собственное значение равно нулю. Если проводимости элементов ветвей, пересекаемых сечением, имеют малые, но не нулевые значения, то цепь распадается на две слабо связанные подцепи. В силу непрерывной зависимости собственных чисел от величин элементов матрицы матрица **Y** такой цепи будет иметь одно малое собственное значение.

Таким образом, в случае наличия в цепи m особых сечений по ветвям с малой проводимостью матрица **Y** цепи будет иметь m малых по модулю собственных значений. Соответственно, матрица $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}$ будет иметь m собственных значений, значительно превышающих по модулю остальные.

Рассмотрим влияние на погрешность определения элементов матрицы **Y** и, соответственно, погрешность решения задачи диагностики числа обусловленно-

сти Θ матрицы **U** узловых напряжений (матрицы **Z** узловых сопротивлений), определенной экспериментально. Исследование выполним для цепей первого (рис. 16.9) и второго (рис. 16.10) порядка сложности. Величины проводимостей элементов указаны на рисунках. Проводимости ε, ε_1, ε_2 малы по сравнению с проводимостями остальных ветвей. При уменьшении величин ε, ε_1, ε_2 происходит увеличение числа обусловленности Θ матрицы **U**.

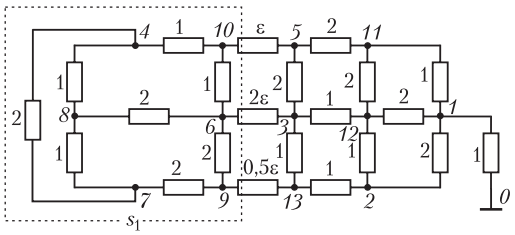


Рис. 16.9

Пусть, в соответствии с методом узловых сопротивлений, измерительная система состоит из источника тока $\mathfrak{I}$ = 1 А, погрешность задания которого будем считать пренебрежимо малой, и вольтметра V, измеряющего напряжения с относительной погрешностью $\Delta = \delta\rho$, где $\delta \in [10^{-2}–10^{-4}]$ — уровень погрешности измерений, а ρ — равномерно распределенная на интервале [–1, 1] случайная величина.

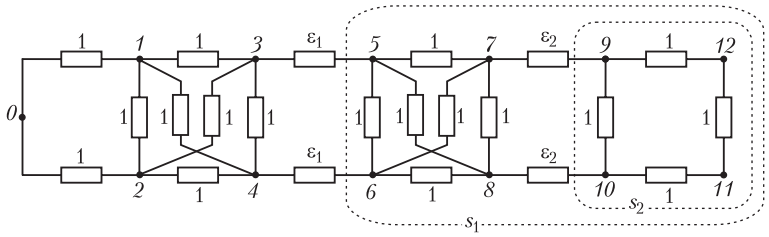


Рис. 16.10

На рис. 16.11 приведены зависимости от числа обусловленности средней относительной погрешности d_0 элементов матрицы **Y** цепи рис. 16.9 (рис. 16.11, *а*) и цепи рис. 16.10 (рис. 16.11, *б*) для различных уровней погрешности измерений δ. Погрешность d_0 определяется как

$$d_0 = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{Y_{ij} - Y_{ij}^{(-1)}}{Y_{ij}}\right)^2},$$

где Y_{ij} – элементы «точной» матрицы **Y**, $Y_{ij}^{(-1)}$ – элементы матрицы $\mathbf{U}^{-1}$. Несмотря на «ломаный» характер зависимостей, представленных на рис. 16.11, они хорошо передают тенденцию нарастания погрешности решения задачи диагностики с ростом числа обусловленности Θ матрицы **Y**. В дальнейшем будем пользоваться сглаженными кривыми.

Приведенные зависимости показывают, что уже при $\lg \Theta > 4$ для задач первого порядка сложности и $\lg \Theta > 3$ для задач второго порядка сложности решение задачи диагностики в данной постановке (при проведении одной серии экспериментов) невозможно. Этот факт имеет достаточно простое объяснение. При определении элементов матрицы **U** с погрешностью Δ большие собственные значения матрицы **U** искажаются на величину порядка Δ и изменяются незначительно, в то время как изменение малых собственных значений на величину порядка Δ приводит к их значительным их изменениям. При определении матрицы узловых проводимостей как $\mathbf{Y} = \mathbf{U}^{-1}$ собственные значения матрицы **Y** равны величинам, обратным собственным значениям матрицы **U**. То есть большие по модулю собственные значения матрицы **Y** определяются по сильно искаженным малым собственным значениям матрицы **U**, что сильно искажает сами элементы матрицы **Y**.

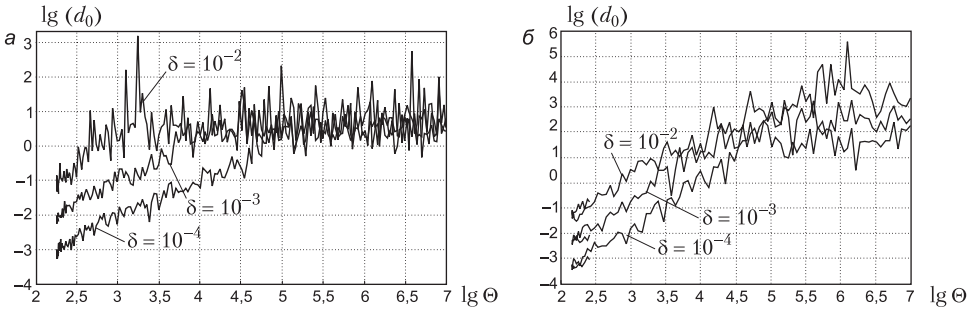


Рис. 16.11

Большой вклад в разработку математического аппарата обработки жестких моделей внес Ю. В. Ракитский. В частности, он доказал, что в жесткой системе уравнений между компонентами решения существуют линейные связи, и предложил общие алгоритмы определения этих связей, а также методы их использования для решения жестких задач. Основываясь на специфических свойствах жестких систем при экспериментальном определении параметров их математических моделей, Ю. В. Ракитский сформулировал принцип повторных измерений (ППИ), применение которого к задачам диагностики электрических цепей позволяет определять параметры цепи с погрешностью, близкой к погрешности используемых измерительных приборов вне зависимости от жесткости математической модели.

Рассмотрим применение ППИ для диагностики электрической цепи методом узловых сопротивлений. В соответствии с ППИ жесткая задача диагностики решается следующим образом: по результатам первой серии экспериментов определяются только линейные связи между параметрами задачи. С помощью полученных линейных связей исходная задача редуцируется, вследствие чего степень ее жесткости уменьшается. Далее проводится повторная серия экспериментов с новой редуцированной математической моделью, и из решения этой задачи определяется часть параметров исходной математической модели. Остальные параметры исходной математической модели находятся с помощь линейных связей.

Для пояснения алгоритма получения линейных связей рассмотрим жесткую систему алгебраических уравнений

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

где $\mathbf{A}$ – плохо обусловленная матрица с числом обусловленности $\Theta_A \gg 1$. Пусть коэффициенты матрицы $\mathbf{A}$ определены в результате выполнения некоторой экспериментальной процедуры. Будем предполагать, что плохая обусловленность матрицы связана с наличием в ее спектре большого по модулю собственного значения λ_1, такого что

$$|\lambda_1| \gg |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Для получения линейных связей между компонентами вектора $\mathbf{x}$ рассмотрим систему уравнений

$$\mathbf{A}^s \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{s-1} \cdot \mathbf{b},$$

полученную из исходной умножением правой и левой частей на $\mathbf{A}^{s-1}$. Собственные значения $\lambda(\mathbf{A}^s)$ матрицы $\mathbf{A}^s$ могут быть получены возведением в степень s собственных значений матрицы $\mathbf{A}$.

$$\lambda(\mathbf{A}^s) = \{\lambda_1^s, \lambda_2^s, \ldots, \lambda_n^s\}.$$

Поэтому, если матрица $\mathbf{A}$ плохо обусловлена, то матрица $\mathbf{A}^s$ сверхплохо обусловлена. Более того, если $|\lambda_1^s| \gg 10^K |\lambda_m^s|$, $(m = 2, 3, \ldots, n)$, где K — константа, определяющая число десятичных знаков ЭВМ, с помощью которой выполняются вычисления (характерное значение $K = 16$), то с погрешностью не более чем 10^{-K} можно считать, что ранг матрицы $\mathbf{A}^s$ равен единице. Соответственно, все строки в системе уравнений $\mathbf{A}^s \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{s-1} \cdot \mathbf{b}$ с точностью до множителя одинаковы. Поэтому любая строка этой системы уравнений может быть использована как линейная связь между компонентами вектора $\mathbf{x}$. Реально для жестких систем величина показателя степени s, достаточная для использования любой строки системы уравнений $\mathbf{A}^s \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{s-1} \cdot \mathbf{b}$ в качестве линейной связи, составляет 3–5.

Если коэффициенты матрицы $\mathbf{A}$ определены в результате эксперимента с некоторой погрешностью Δ, то и коэффициенты линейной связи между компонентами вектора $\mathbf{x}$ определяются с той же погрешностью, так как они определяются только максимальным по модулю собственным значением матрицы $\mathbf{A}$. Таким образом, погрешность определения линейной связи не зависит от обусловленности матрицы $\mathbf{A}$. Полученная линейная связь, в соответствии с принципом повторных измерений, должна использоваться для редуцирования исходной задачи. В рассматриваемом случае это соответствует исключению из системы уравнений одного уравнения и выполнению далее повторных измерений коэффициентов редуцированной матрицы.

В методе узловых сопротивлений уравнение для получения линейной связи между компонентами $\mathbf{y}_k$ k-го столбца матрицы $\mathbf{Y}$ имеет вид

$$\mathbf{U}^s \cdot \mathbf{y}_k = \mathbf{U}^{s-1} \cdot \mathfrak{I}_k, \qquad (*)$$

где $\mathbf{U}$ — матрица узловых напряжений, измеренных в методе узловых сопротивлений, $\mathfrak{I}_k$ — вектор задающих токов, k-й элемент которого равен единице,

а остальные нули. Для диагностирования электрической цепи с использованием ППИ будем выполнять эксперименты и обработку их результатов в соответствии со следующим алгоритмом.

1. Проводится первая серия экспериментов метода узловых сопротивлений, в результате которой определяется матрица узловых напряжений **U**. Если матрица **U** плохо обусловлена или имеется априорная информация о наличии в диагностируемой цепи особых сечений, то непосредственное определение параметров матрицы узловых проводимостей **Y** по матрице **U** невозможно.

2. По матрице узловых напряжений **U** (матрице узловых сопротивлений **Z**) из уравнения (*) определяется первая линейная связь, соответствующая максимальному собственному значению матрицы **U**. Погрешность определения коэффициентов линейной связи имеет тот же порядок, что и погрешность используемой измерительной аппаратуры и не зависит от обусловленности матрицы **U**.

3. Выполняется редукция исходной задачи, для чего один из узлов цепи, находящийся внутри особого сечения, соединяется с нулевым узлом, этим обеспечивается исключение особого сечения. Если информация об узлах, входящих в изолированную подсхему, отсутствует, то она может быть получена в результате инспекции строк и столбцов матрицы **U**. Вычеркнем из матрицы **U** строку и столбец, соответствующие одному из узлов, и вычислим по полученной матрице $\mathbf{U}_{(-1)}$ матрицу $\mathbf{Y}_{(-1)}$. Узел входит в особое сечение, если норма матрицы $\mathbf{Y}_{(-1)}$ существенно меньше нормы матрицы **Y**, в противном случае нормы этих матриц близки.

4. Проводится вторая серия экспериментов метода узловых сопротивлений в цепи с закороченным узлом. Так как редуцированная задача содержит на одно особое сечение меньше, то порядок ее сложности понижен на единицу. В результате серии повторных экспериментов определяется матрица $\mathbf{U}_1$.

5. Проверяется степень обусловленности Θ_{U_1} матрицы узловых напряжений $\mathbf{U}_1$ цепи с закороченным узлом, размерность которой на единицу меньше размерности **U**. Если $\Theta_{U_1} \gg 1$, то определяется вторая линейная связь, повторяются пункты 3, 4 настоящего алгоритма и определяется матрица $\mathbf{U}_2$, размерность которой на единицу меньше размерности $\mathbf{U}_1$, и т. д. Если значение обусловленности Θ_{U_1} приемлемо при заданном уровне погрешности измерений, то обращением матрицы $\mathbf{U}_1$ определяется матрица $\mathbf{Y}_1$ узловых проводимостей цепи с закороченным узлом. При этом определяются проводимости всех ветвей исходной цепи, за исключением ветвей, инцидентных закороченному узлу. Проводимости этих ветвей определяются с помощью линейной связи.

Применение описанного алгоритма при решении задачи диагностики цепей позволяет снизить погрешность определения элементов матрицы узловых проводимостей до уровня погрешности измерений, независимо от степени обусловленности задачи. На рис. 16.12, *а* представлены сглаженные зависимости отношения погрешностей решения задачи диагностики методом узловых сопротивлений без использования (d_0) и с использованием ($d_{\text{ППИ}}$) ППИ от числа обусловленности матрицы **Y** для цепи рис. 16.9. Погрешность $d_{\text{ППИ}}$ вычислялась

аналогично d_0. Величина s, входящая в выражение для линейных связей принималась равной трем. Результаты представлены для различных уровней погрешности δ, с которыми выполнялись измерения узловых напряжений. Зависимости, представленные на рис. 16.12, *а* получены для задачи диагностики первого порядка сложности, изображенной на рис. 16.9. Из рис. 16.12, *а* видно, что применение ППИ при решении задачи диагностики целесообразно уже при $\Theta > 10^2$, т. е. для большинства практически интересных задач первого порядка сложности. Уже при $\Theta > 10^{3,5}$ применение ППИ позволяет более чем в 100 раз уменьшить погрешность решения задачи диагностики.

На рис. 16.12, *б* представлены сглаженные зависимости погрешности решения задачи диагностики цепи второго порядка сложности, изображенной на рис. 16.10, от числа обусловленности матрицы **Y**, полученные при различных уровнях погрешности измерений δ. Расчеты выполнялись с применением принципа повторных измерений. Сопоставляя эти зависимости с аналогичными, но полученными без применения ППИ (рис.16.11, *б*) можно сделать вывод о высокой эффективности использования этого принципа и для цепей второго порядка сложности. Действительно, погрешность решения задачи диагностики практически не зависит от обусловленности матрицы **Y**, а среднее значение погрешности близко к максимально достижимому уровню — уровню погрешности измерительных приборов. Как показывают более подробные исследования, минимальное значение Θ, при котором применение ППИ целесообразно для цепей второго порядка сложности меньше, чем для задач диагностики цепей первого порядка сложности. Необходимо отметить, однако, что применение ППИ для диагностики цепей первого порядка сложности требует удвоенного в сравнении с применением стандартного метода узловых сопротивлений объема экспериментальной работы, а при диагностировании цепей второго порядка сложности утроенного объема работы.

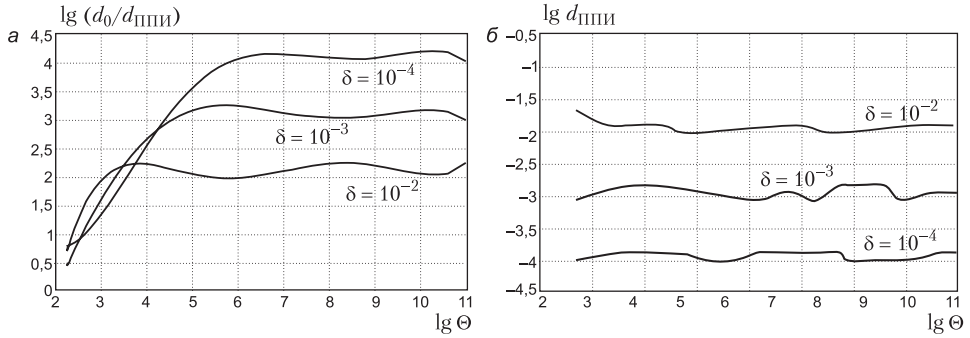


Рис. 16.12

На рис. 16.13 представлены в логарифмическом масштабе зависимости отношения $d_0/d_{ППИ}$ для решения задачи диагностики первого порядка сложности для цепи переменного тока. Кривые на рис. 16.12, *а* и рис. 16.13, *а*, *б* идентичны. Как показывают численные исследования, для диагностики линейных цепей пере-

менного тока также целесообразно применять ППИ уже при $\Theta > 1$, т. е. практически для всех задач.

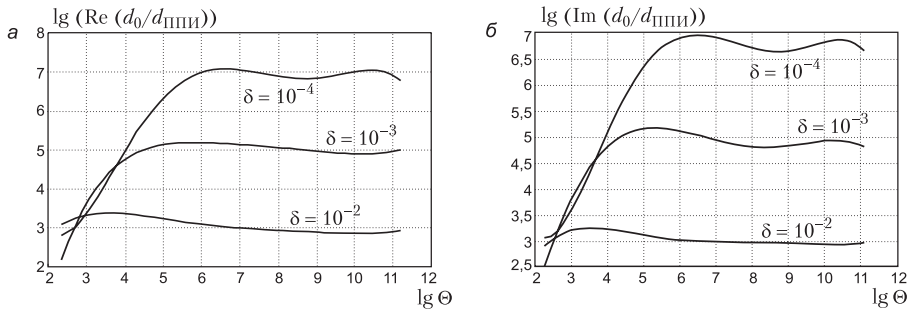


Рис. 16.13

Отметим, что в настоящей главе рассматривались в основном резистивные цепи. Однако все результаты справедливы также для диагностики линейных цепей переменного тока при использовании комплексного метода. Особые сечения в таких цепях возникают на частотах, близких к резонансным. Альтернативой применения ППИ в данном случае является выполнение экспериментов на различных частотах. Однако в сложных устройствах выбор частот для проведения диагностических экспериментов затруднен наличием большого числа индуктивно-емкостных связей. Кроме того свойства математических моделей устройств могут значительно изменяться при изменении частоты, особенно для высокодобротных устройств. Поэтому выполнение опытов на одной частоте предпочтительно.

Глава семнадцатая

Электрические цепи с распределенными параметрами при установившемся режиме

17.1. Электрические цепи с распределенными параметрами

В § 3.3 т. I было указано, что, строго говоря, мы всегда имеем цепи, параметры которых в той или иной мере распределены вдоль участков цепи, и только абстрагируясь от действительности, можно предполагать, что параметры цепи — индуктивность, емкость, сопротивление и проводимость — сосредоточены в определенных участках цепи. Во многих случаях такое допущение не приводит к сколько-нибудь заметным неточностям в результатах проводимого анализа. Изложенная во всех предыдущих главах теория цепей относилась к цепям с сосредоточенными параметрами. Однако мы встречаемся с рядом важных случаев, когда такого рода допущение становится неприемлемым и совершенно необходимо учитывать распределенность параметров вдоль цепи. При этом еще имеем возможность рассматривать электротехническое устройство как электрическую цепь, если оно имеет большую протяженность лишь в одном определенном направлении. В таком случае можно говорить о параметрах, распределенных по длине цепи в этом направлении. Критерием необходимости рассматривать цепь в качестве цепи с распределенными параметрами, как было сказано в § 3.4, т. I, является соотношение между интервалом времени распространения электромагнитных волн вдоль всей длины цепи и интервалом времени, в течение которого токи и напряжения изменяются на величину, составляющую заметную долю от полного их изменения в рассматриваемом процессе. Когда эти интервалы времени сравнимы, то цепь необходимо рассматривать как цепь с распределенными параметрами.

Естественно, что токи и напряжения в таких цепях являются функциями двух независимых переменных — времени t и координаты x, отсчитываемой вдоль указанного выше направления. Соответственно, уравнения, описывающие процессы в этих цепях, являются уравнениями в частных производных. Примерами цепей с распределенными параметрами являются линии передачи электрической энергии, линии связи, высокочастотные коаксиальные линии радиотехнических и телевизионных устройств. Обмотки трансформаторов и электрических машин также должны рассматриваться как цепи с распределенными параметрами при воздействии на них импульсных токов и напряжений, когда промежуток времени изменения токов и напряжений сравним со временем пробега волн вдоль проволоки обмотки.

Параметры цепи могут быть распределены неравномерно вдоль цепи. Однако во многих случаях можно полагать параметры распределенными равномерно вдоль цепи, например для линий передач, в которых сечение проводов, их взаимное расположение и характеристики среды не изменяются по длине линии. Такие линии называют о д н о р о д н ы м и.

В дальнейшем под величинами, обозначаемыми через L, C, r, g и M, будем понимать индуктивность, емкость, сопротивление, проводимость и взаимную ин-

дуктивность, приходящиеся на единицу длины линии. Эти параметры, вообще говоря, зависят от частоты. Например, сопротивление r и индуктивность L зависят от частоты вследствие поверхностного эффекта. Исследуя основные процессы в однородных линиях, будем полагать их параметры постоянными. В случае необходимости зависимость параметров от частоты должна быть учтена.

17.2. Уравнения линии с распределенными параметрами

Рассмотрим двухпроводную однородную линию. Величины L и r представляют собой индуктивность и сопротивление пары проводов на единицу длины линии, величины C и g — емкость и проводимость утечки между проводами на единицу длины линии. Координату x будем отсчитывать от некоторой точки линии, в частности от начала линии. Ток в проводах линии зависит не только от t, но и от x, так как на каждом отрезке dx линии ток ответвляется от одного провода к другому в виде тока смещения $Cdx\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и тока проводимости $gdxu$. Поэтому если ток в проводе в точке x равен i, то в точке $x + dx$ он отличается от i на величину $\dfrac{\partial i}{\partial x}dx$ и равен $i + \dfrac{\partial i}{\partial x}dx$. Согласно принципу непрерывности тока, ток сквозь замкнутую поверхность s (рис. 17.1, *а*) равен нулю:

$$(-i) + \left(i + \frac{\partial i}{\partial x}dx\right) + \left(gdxu + Cdx\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0$$

или

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C\frac{\partial u}{\partial t}.$$

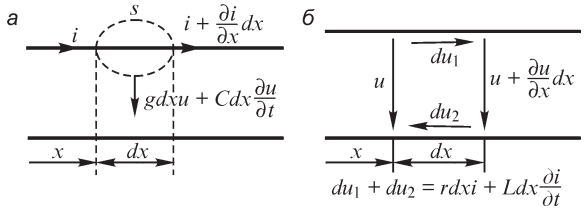


Рис. 17.1

Точно так же напряжение между проводами зависит не только от t, но и от x, так как на каждом отрезке dx линии имеет место падение напряжения в двух проводах линии $du_1 + du_2$ (рис. 17.1, *б*). Это падение напряжения складывается из падения напряжения $rdxi$ в сопротивлении rdx пары проводов и индуктивного падения напряжения $Ldx\dfrac{\partial i}{\partial t}$, обусловленного индуктивностью Ldx пары проводов, т. е. $du_1 + du_2 = rdxi + Ldx\dfrac{\partial i}{\partial t}$. Сумма падений напряжения в рассматриваемом контуре равна нулю:

$$(-u)+\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)+\left(rdxi+Ldx\frac{\partial i}{\partial t}\right)=0$$

или

$$-\frac{\partial u}{\partial x}=ri+L\frac{\partial i}{\partial t}.$$

Таким образом, уравнения линии имеют вид

$$-\frac{\partial u}{\partial x}=ri+L\frac{\partial i}{\partial t};\quad -\frac{\partial i}{\partial x}=gu+C\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Для однородной линии параметры r, L, g и C не зависят от x. Для неоднородной линии они являются функциями от x.

В общем случае для n-проводной линии, расположенной в воздухе над поверхностью земли, для каждого из проводов необходимо в первом уравнении учитывать также ЭДС взаимоиндукции от токов, протекающих в соседних проводах, а во втором уравнении учитывать также ток смещения между рассматриваемым проводом и всеми соседними проводами. При этом получаем систему из $2n$ уравнений (так называемых телеграфных уравнений):

$$-\frac{\partial u_k}{\partial x}=r_k i_k+L_k\frac{\partial i_k}{\partial t}+\sum_{m=1}^{m=n}M_{km}\frac{\partial i_m}{\partial t};$$

$$-\frac{\partial i_k}{\partial x}=g_k u_k+\sum_{m=1}^{m=n}g_{km}(u_k-u_m)+C_k\frac{\partial u_k}{\partial t}+\sum_{m=1}^{m=n}C_{km}\frac{\partial(u_k-u_m)}{\partial t},$$

где $k=1, 2, \ldots, n$ — номер провода; r_k, L_k, g_k, C_k — собственные параметры k-го провода на единицу длины с учетом влияния земли; M_{km} и C_{km} — взаимная индуктивность и емкость между k-м и m-м проводами на единицу длины линии с учетом влияния земли.

Рассмотрение частного случая — двухпроводной линии, которое будет выполнено в последующих параграфах, представляет интерес не только потому, что это наиболее простой случай, позволяющий наиболее наглядно показать основные особенности процессов в цепях с распределенными параметрами, но также и потому, что во многих случаях трехфазная линия может быть заменена эквивалентной ей однофазной двухпроводной линией. Это можно сделать при синусоидальном процессе, если все провода находятся в одинаковых условиях, т. е. если осуществлена так называемая транспозиция проводов — последовательная перестановка их местами, и если полный цикл транспозиции значительно меньше длины волны тока и напряжения в линии (см. § 17.5). При этом для симметричных трехфазных напряжений прямой и обратной последовательности токи в проводах также образуют симметричные системы соответственно прямой и обратной последовательности. В этом случае достаточно рассматривать процесс в одной фазе, заменяя трехфазную линию эквивалентной ей однофазной двухпроводной линией. Для напряжений и токов нулевой последовательности трехпроводную трехфазную линию также можно заменить эквивалентной двухпроводной, причем обратным проводом в этом случае является провод, эквивалентный земле при трехфазной линии.

17.3. Решение уравнений однородной линии при установившемся синусоидальном режиме

При установившихся режимах токи и напряжения изменяются во времени по периодическому закону. Представив периодические функции времени в виде ряда Фурье, можно произвести расчет отдельно для каждой синусоидальной составляющей этого ряда и вследствие линейности цепи получить результирующий процесс, пользуясь методом наложения. Поэтому достаточно произвести анализ процессов в линии при синусоидальных токах и напряжениях.

Пусть ток и напряжение в линии изменяются во времени по синусоидальному закону с угловой частотой ω. Пользуясь комплексным методом, напишем уравнения линии для комплексных действующих напряжения $\dot{U}$ и тока $\dot{I}$:

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = r\dot{I} + j\omega L\dot{I}; \quad -\frac{d\dot{I}}{dx} = g\dot{U} + j\omega C\dot{U}.$$

Комплексные $\dot{U}$ и $\dot{I}$ являются функциями только x, и, соответственно, уравнения в частных производных для мгновенных u и i перешли в обыкновенные дифференциальные уравнения для $\dot{U}$ и $\dot{I}$.

Дифференцируя первое уравнение по x и используя второе, находим

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = (r + j\omega L)(g + j\omega C)\dot{U} = \gamma^2\dot{U},$$

где

$$\gamma = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \alpha + j\beta.$$

Решение уравнения для $\dot{U}$ имеет вид

$$\dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}.$$

Из первого уравнения линии находим комплексный ток:

$$\dot{I} = -\frac{1}{r + j\omega L}\frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\gamma}{r + j\omega L}(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) =$$

$$= \sqrt{\frac{g + j\omega C}{r + j\omega L}}(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) = \frac{1}{Z}(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}),$$

где

$$Z = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}}.$$

Комплексные величины $\gamma = \alpha + j\beta$ и Z являются основными характеристиками однородной линии и носят наименования: γ — коэффициент распространения линии, Z — волновое, или характеристическое, сопротивление линии, α — коэффициент затухания, β — коэффициент фазы.

Смысл всех этих наименований будет ясен из рассмотрения бегущих волн в линии (см. § 17.5). Обратим внимание на то, что $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Действительно,

обозначив $r + j\omega L = z'e^{j\psi'}$, $g + j\omega C = y'e^{j\psi'}$ и $\frac{1}{2}(\psi' + \psi'') = \theta$, будем иметь $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{z'y'}e^{j\theta} = \sqrt{z'y'}\cos\theta + j\sqrt{z'y'}\sin\theta$. Так как $0 < \psi' < \pi/2$, $0 < \psi'' < \pi/2$ и, следовательно, $0 < \theta < \pi/2$, то $\cos\theta > 0$ и $\sin\theta > 0$, т. е. $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

Условимся отмечать дальше ток и напряжение в начале линии ($x = 0$) индексом 1 ($\dot{I}_1, \dot{U}_1$) и в конце линии ($x = l$, где l — длина линии) — индексом 2 ($\dot{I}_2, \dot{U}_2$).

Для определения произвольных постоянных A_1 и A_2 достаточно знать две из этих четырех величин.

Выразим эти постоянные через напряжение $\dot{U}_1$ и ток $\dot{I}_1$ в начале линии. Полагая $x = 0$, имеем

$$\dot{U}_1 = A_1 + A_2 \quad \text{и} \quad \dot{I}_1 = \frac{1}{Z}(A_1 - A_2);$$

$$A_1 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z) \quad \text{и} \quad A_2 = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z).$$

Следовательно,

$$\dot{U} = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x};$$

$$\dot{I} = \frac{1}{Z}\left[\frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x} - \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x}\right].$$

Эти же выражения для напряжения $\dot{U}$ и тока $\dot{I}$ в любой точке линии можно записать также в другой форме, используя соотношения

$$\frac{1}{2}(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}) = \operatorname{ch}\gamma x \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) = \operatorname{sh}\gamma x.$$

Получаем

$$\dot{U} = \dot{U}_1 \operatorname{ch}\gamma x - \dot{I}_1 Z \operatorname{sh}\gamma x; \quad \dot{I} = \dot{I}_1 \operatorname{ch}\gamma x - \frac{\dot{U}_1}{Z}\operatorname{sh}\gamma x.$$

Значения напряжения $\dot{U}_2$ и тока $\dot{I}_2$ в конце линии получаются, если принять $x \quad l$:

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \operatorname{ch}\gamma l - \dot{I}_1 Z \operatorname{sh}\gamma l; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_1 \operatorname{ch}\gamma l - \frac{\dot{U}_1}{Z}\operatorname{sh}\gamma l.$$

Из этих уравнений можно выразить $\dot{U}_1$, $\dot{I}_1$ через $\dot{U}_2$ и $\dot{I}_2$. Имеем

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch}\gamma l + \dot{I}_2 Z \operatorname{sh}\gamma l; \quad \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \frac{\operatorname{sh}\gamma l}{Z} + \dot{I}_2 \operatorname{ch}\gamma l.$$

Эти уравнения представляют собой уравнения четырехполюсника в A-параметрах. Постоянные этого четырехполюсника, соответственно, равны

$$A = D = \operatorname{ch}\gamma l; \quad B = Z\operatorname{sh}\gamma l; \quad C = \frac{\operatorname{sh}\gamma l}{Z},$$

причем, как и для всякого пассивного четырехполюсника,

$$AD - BC = \operatorname{ch}^2\gamma l - \operatorname{sh}^2\gamma l = 1.$$

Как и всякий четырехполюсник, линия может быть заменена Т- или П-образной, в данном случае симметричной, эквивалентной схемой. Параметры эквивалентных схем вычисляются через постоянные A, B, C и D по формулам, приведенным в § 13.2.

17.4. О моделировании однородной линии цепной схемой

Рассмотрение линии с распределенными параметрами как четырехполюсника и, соответственно, замена линии эквивалентной Т- или П-образной схемой возможны только в том случае, если интересуемся напряжениями и токами только в начале и в конце линии. Если же желаем изучать распределение напряжения и тока вдоль линии, то необходимо ее рассматривать как цепь с распределенными параметрами и пользоваться приведенными ранее уравнениями, в которых $\dot{U}$ и $\dot{I}$ являются функциями x. Однородную линию можно рассматривать как однородную цепную схему с бесконечно большим числом элементарных звеньев. Поэтому приближенно можно линию конечной длины заменить цепной схемой с конечным числом звеньев, обладающих конечными значениями параметров. Такая замена будет давать тем более точные результаты, чем большее число звеньев будет содержать цепная схема.

Эти соображения имеют весьма большое значение для моделирования линий. Для экспериментального изучения в лабораторных условиях процессов в длинных линиях, а также процессов в различных системах, соединенных длинными линиями, обычно линии заменяют эквивалентными им цепными схемами. Точность моделирования будет тем больше, чем большее число звеньев будет содержать цепная схема.

Одного звена, заменяющего линию, достаточно, если интересуемся соотношениями между напряжениями и токами только в начале и в конце линии и только при одной частоте установившегося синусоидального режима. Если же желаем знать связь между напряжениями и токами хотя бы только в начале и в конце линии, но при разных частотах, например для разных гармоник несинусоидальных токов и напряжений, то моделировать всю линию одним Т- или П-образным звеном уже недостаточно. Это следует из того, что параметры такого звена, как видно из вышеприведенных формул, сложным образом зависят от характеристик линии Z и γ, которые в общем случае, в свою очередь, сложным образом зависят от частоты.

Моделировать линию цепной схемой с достаточным числом звеньев и подавно необходимо при изучении распределения напряжения и тока вдоль линии.

Выбор числа звеньев в модели линии зависит от тех задач, которые ставятся при исследовании. Большей частью бывает достаточно взять 10–20 звеньев.

17.5. Бегущие волны

Рассмотрим выражение, полученное в § 17.3 для $\dot{U}$, причем введем обозначения

$$\dot{U}_{\varphi} = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x} = \dot{U}_{\varphi 1}e^{-\gamma x} = U_{\varphi 1}e^{j\xi}e^{-\gamma x};$$

$$\dot{U}_{\psi} = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x} = \dot{U}_{\psi 1}e^{\gamma x} = U_{\psi 1}e^{j\eta}e^{\gamma x}.$$

Тогда при $\gamma = \alpha + j\beta$ имеем

$$\dot{U} = \dot{U}_{\varphi} + \dot{U}_{\psi} = \dot{U}_{\varphi 1}e^{-\gamma x} + \dot{U}_{\psi 1}e^{\gamma x} = U_{\varphi 1}e^{-\alpha x}e^{j(\xi - \beta x)} + U_{\psi 1}e^{\alpha x}e^{j(\eta + \beta x)}$$

и, переходя от комплексного напряжения $\dot{U}$ к изображаемому им напряжению u, получим

$$u = u_{\varphi} + u_{\psi} = \sqrt{2}\,U_{\varphi 1}e^{-\alpha x}\sin\left(\omega t + \xi - \beta x\right) + \sqrt{2}\,U_{\psi 1}e^{\alpha x}\sin\left(\omega t + \eta + \beta x\right).$$

Таким образом, u можно рассматривать как сумму двух составляющих u_{φ} и u_{ψ}. Из выражения $u_{\varphi} = \sqrt{2}U_{\varphi 1}e^{-\alpha x}\sin(\omega t + \xi - \beta x)$ следует, что при $x = \text{const}$, т. е. в данной точке линии, напряжение u_{φ} является синусоидальной функцией времени. Пусть $\alpha = 0$ и $e^{-\alpha x} = 1$. Тогда, положив $t = \text{const}$, нетрудно убедиться, что при $\alpha = 0$ напряжение u_{φ} в данный момент времени будет распределено вдоль линии также по синусоидальному закону. При этом длина λ синусоидальной волны, изображающей этот закон распределения напряжения u_{φ}, т. е. расстояние между ближайшими точками, в которых фазы напряжения u_{φ} различаются на 2π, равна $2\pi/\beta$. Это синусоидальное распределение напряжения, или, как говорят, волна напряжения, перемещается вдоль линии от начала к ее концу с постоянной скоростью, равной $v = \omega/\beta$. Действительно, $\sin(\omega t + \xi - \beta x)$ при $x = x_0 + \omega t/\beta$ будет величиной постоянной, и, следовательно, напряжение, существовавшее в некоторый момент времени в произвольно выбранной точке x, будет оставаться неизменным, если эта точка начнет перемещаться вдоль линии со скоростью $v = \omega/\beta$. Так как при этой скорости остается неизменной фаза колебания, то ее называют ф а з о в о й с к о р о с т ь ю в о л н ы. Такого рода волны, перемещающиеся вдоль некоторого направления, называют б е г у щ и м и в о л н а м и. При $\alpha > 0$ наличие множителя $e^{-\alpha x}$ показывает, что амплитуда волны по мере продвижения последней вдоль линии затухает по показательному закону и что распределение напряжения вдоль линии в любой момент времени может быть изображено синусоидой, затухающей по тому же закону (рис. 17.2). Поэтому коэффициент α называют коэффициентом затухания. Так как фаза напряжения изменяется с изменением x, то коэффициент β, характеризующий это изменение фазы, называют коэффициентом фазы.

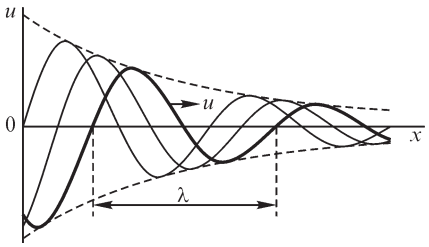


Рис. 17.2

При помощи аналогичных рассуждений можно показать, что вторая составляющая $u_{\psi} = \sqrt{2}\,U_{\psi 1}e^{\alpha x}\sin(\omega t + \eta + \beta x)$ представляет собой волну такой же длины $\lambda = 2\pi/\beta$, как и u_{φ}, бегущую вдоль линии со скоростью $v = -\omega/\beta$, т. е. от конца линии к ее началу. Амплитуда этой волны, как показывает наличие множителя $e^{\alpha x}$, возрастает по показательному закону от начала линии к ее концу, или, иными словами, затухает по показательному закону по мере продвижения волны от конца линии к ее началу. Волны, бегущие от начала линии к ее концу,

будем называть п р я м ы м и в о л н а м и, а волны, бегущие в обратном направлении, — о б р а т н ы м и в о л н а м и.

Аналогично, рассматривая выражение для тока $\dot{I}$, можем написать $\dot{I} = \dot{I}_\varphi + \dot{I}_\psi$, где $\dot{I}_\varphi = \frac{1}{2Z}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z)e^{-\gamma x}$; $\dot{I}_\psi = -\frac{1}{2Z}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z)e^{\gamma x}$. Соответственно, для мгновенных значений получаем $i = i_\varphi + i_\psi$, причем i_φ — прямая волна тока, а i_ψ — обратная волна тока.

Легко видеть, что отношение напряжения $\dot{U}_\varphi$ прямой волны к току $\dot{I}_\varphi$ прямой волны равно волновому сопротивлению линии Z, а для обратных волн соответствующее отношение равно $(-Z)$:

$$\frac{\dot{U}_\varphi}{\dot{I}_\varphi} = Z; \quad \frac{\dot{U}_\psi}{\dot{I}_\psi} = -Z. \qquad (*)$$

Появление обратных волн можно рассматривать как результат отражения прямых волн от конца линии. Соответственно, прямые волны называют также п а д а ю щ и м и, а обратные — о т р а ж е н н ы м и. К о э ф ф и ц и е н т о м о т р а ж е н и я н а п р я ж е н и я q_u от конца линии называют отношение отраженной волны $\dot{U}_{\psi 2}$ к прямой волне $\dot{U}_{\varphi 2}$ напряжения в конце линии. Соответственно к о э ф ф и ц и е н т о м о т р а ж е н и я т о к а q_i называют отношение $\dot{I}_{\psi 2}$ к $\dot{I}_{\varphi 2}$. Найдем выражение для q_u и q_i через волновое сопротивление Z линии и сопротивление $Z_{\text{пр}}$ приемника, на которое замкнута линия на ее конце.

Имеем на конце линии

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{\varphi 2} + \dot{U}_{\psi 2}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{\varphi 2} + \dot{I}_{\psi 2} = \frac{\dot{U}_{\varphi 2}}{Z} - \frac{\dot{U}_{\psi 2}}{Z}.$$

Отсюда находим

$$2\dot{U}_{\psi 2} = \dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z = \dot{I}_2(Z_{\text{пр}} - Z); \quad 2\dot{U}_{\varphi 2} = \dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z = \dot{I}_2(Z_{\text{пр}} + Z);$$

следовательно,

$$q_u = \frac{\dot{U}_{\psi 2}}{\dot{U}_{\varphi 2}} = \frac{Z_{\text{пр}} - Z}{Z_{\text{пр}} + Z}.$$

Разделив первое равенство (*) на второе, получаем q_i/q_u -1, т. е.

$$q_i = -q_u = \frac{Z - Z_{\text{пр}}}{Z + Z_{\text{пр}}}.$$

Если линия замкнута на конце на сопротивление, равное волновому, $Z_{\text{пр}}$ Z, то $q_u = 0$ и $q_i = 0$, т. е. в линии будут отсутствовать отраженные (обратные) волны. При этом в *любой точке линии* отношение напряжения к току равно волновому сопротивлению:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\dot{U}_\varphi}{\dot{I}_\varphi} = Z.$$

Если линия на конце разомкнута, т. е. имеем так называемый режим холостого хода, то $Z_{\text{пр}} = \infty$, $q_u = 1$ и $q_i = -1$. Следовательно, на конце линии падающая $\dot{U}_{\varphi 2}$

и отраженная $\dot{U}_{\psi_2}$ волны напряжения равны по значению и одинаковы по знаку, в результате чего результирующее напряжение $\dot{U}_2$ на конце линии оказывается в два раза больше напряжения падающей волны. Падающая $\dot{I}_{\varphi_2}$ и отраженная $\dot{I}_{\psi_2}$ волны тока равны по значению и противоположны по знаку, и результирующий ток $\dot{I}_2$ на конце разомкнутой линии равен нулю.

В другом крайнем случае короткого замыкания на конце линии $Z_{\text{пр}} = 0$, $q_u = -1$ и $q_i = 1$. При этом $\dot{U}_{\psi_2} = -\dot{U}_{\varphi_2}$ и $\dot{U}_2 = 0$, а $\dot{I}_{\psi_2} = \dot{I}_{\varphi_2}$ и $\dot{I}_2 = 2\dot{I}_{\varphi_2}$.

17.6. Характеристики однородной линии. Условия для неискажающей линии

Волновое сопротивление линии $Z = \sqrt{\dfrac{r + j\omega L}{g + j\omega C}}$ и коэффициент распространения $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)}$ зависят от частоты. Поэтому условия прохождения волн тока и напряжения для разных частот оказываются различными. Если сигнал на входе линии является периодической несинусоидальной функцией времени, то на выходе линии форма кривой сигнала будет отличаться от ее формы на входе, так как для различных гармоник условия прохождения различны. Это же будет иметь место и при любом апериодическом сигнале, так как такой сигнал может быть представлен в виде сплошного частотного спектра с помощью преобразования Фурье и для различных частот этого спектра условия прохождения вдоль линии будут различными.

Для линии связи чрезвычайно важно создание условий, при которых отсутствовало бы искажение формы передаваемого сигнала (тока и напряжения). Для этого необходимо, чтобы волновое сопротивление Z, коэффициент затухания α и фазовая скорость $v = \omega/\beta$ не зависели от частоты. Очевидно, при этом коэффициент фазы β должен быть пропорционален частоте. Такие условия оказываются выполненными, если соблюдено соотношение

$$\frac{r}{L} = \frac{g}{C}.$$

Действительно, при этом

$$Z = \sqrt{\frac{r + j\omega L}{g + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{\frac{r/L + j\omega}{g/C + j\omega}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

и

$$\gamma = \sqrt{(r + j\omega L)(g + j\omega C)} = \sqrt{LC}\sqrt{(r/L + j\omega)(g/C + j\omega)} =$$
$$= \sqrt{LC}(r/L + j\omega) = \sqrt{rg} + j\omega\sqrt{LC},$$

т. е. удовлетворяются все вышеуказанные требования, необходимые для того, чтобы линия была неискажающей. Можно показать, что в этих условиях коэффициент затухания и коэффициент фазы имеют минимальные значения, т. е.

$$\alpha_{\min} = \sqrt{rg} \quad \text{и} \quad \beta_{\min} = \omega\sqrt{LC}.$$

Соответственно, фазовая скорость при этом принимает максимальное значение $v_{max} = \omega/\beta = 1/\sqrt{LC}$ и равна скорости распространения электромагнитных волн в диэлектрике, окружающем провода линии (см. ч. IV).

Для воздушных линий $z \approx 300–400$ Ом и $v \approx 3 \cdot 10^8$ м/с. Для кабельной линии $z \approx 50$ Ом и $v < 3 \cdot 10^8$ м/с, так как диэлектрическая проницаемость изоляции в кабеле больше диэлектрической проницаемости воздуха.

Длина волны $\lambda = v/f$ для воздушной линии при частоте 50 Гц оказывается равной 6000 км, т. е. обычно превосходит длину наиболее протяженных линий электропередачи. При звуковой частоте 5000 Гц длина волны $\lambda = 60$ км и, следовательно, на протяжении линии связи можно укладывать несколько длин волн. Это имеет место даже в сравнительно коротких линиях, применяемых в радиотехнических устройствах, вследствие высокой частоты.

Обычно в линиях $r/L > g/C$, так как проводимость утечки через изоляцию незначительна. Для достижения равенства $r/L = g/C$ увеличение проводимости нецелесообразно. Уменьшение r или C практически не представляется возможным. Поэтому в линиях связи искусственно увеличивают индуктивность, включая в линию через определенные расстояния особые реактивные катушки или применяя кабели, проводящие жилы которых обмотаны тонкой лентой из материала с высокой магнитной проницаемостью.

Осуществив вышеуказанное соотношение между параметрами линии, получаем условие для передачи сигнала без искажений, но сигнал затухает по мере продвижения вдоль линии, так как $\alpha > 0$. В предельном случае, когда $r = 0$ и $g = 0$, получаем неискажающую линию без потерь, по которой сигнал передается не только без искажения, но и без затухания.

Для осуществления передачи сигналов без искажения, кроме соблюдения вышеуказанных условий, необходимо, чтобы отсутствовали отраженные волны от конца линии. Для этого, как было показано в предыдущем параграфе, сопротивление приемника должно быть равно волновому сопротивлению линии, т. е., как говорят, приемник и линия должны быть *согласованы*.

Если $Z_{пр} \neq Z$, то согласования можно добиться, включив между линией и приемником согласующее устройство. Таковым может быть, например, трансформатор с надлежаще выбранным коэффициентом трансформации. Осуществляют также согласование в начале линии генерирующего устройства и линии.

17.7. Однородная линия при различных режимах работы

В этом и следующем параграфах будем рассматривать режимы в однородной линии при различных значениях сопротивления приемника, т. е. при различных значениях отношения $\dot{U}_2$ к $\dot{I}_2$. В этом случае целесообразнее вести счет расстояний от конца линии, для чего во всех ранее использованных уравнениях достаточно заменить x на $l - x$. При этом $x \quad 0$ будет относиться к концу линии, а $x \quad l$ — к началу линии. В § 17.3 при счете расстояний от начала линий мы получили выражения для напряжения и тока в любой точке линии в виде

$$\dot{U} = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x}; \quad \dot{I} = \frac{1}{Z}(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}).$$

Заменяя в этих выражениях x на $l - x$, получаем

$$\dot{U} = A_1 e^{-\gamma l} e^{\gamma x} + A_2 e^{\gamma l} e^{-\gamma x} = A_3 e^{\gamma x} + A_4 e^{-\gamma x};$$

$$\dot{I}Z = A_1 e^{-\gamma l} e^{\gamma x} - A_2 e^{\gamma l} e^{-\gamma x} = A_3 e^{\gamma x} - A_4 e^{-\gamma x},$$

где положено $A_1 e^{-\gamma l} = A_3$ и $A_2 e^{\gamma l} = A_4$. В конце линии, т. е. теперь при $x = 0$, будет $\dot{U} = \dot{U}_2$ и $\dot{I} = \dot{I}_2$. Следовательно, для определения постоянных A_3 и A_4 имеем выражения: $\dot{U}_2 = A_3 + A_4$ и $\dot{I}_2 Z = A_3 - A_4$, откуда $A_3 = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z)$; $A_4 = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z)$.

Таким образом, уравнения для $\dot{U}$ и $\dot{I}$ получают вид

$$\dot{U} = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z)e^{\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z)e^{-\gamma x};$$

$$\dot{I} = \frac{1}{Z}\left[\frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z)e^{\gamma x} - \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z)e^{-\gamma x}\right].$$

Соответственно, эти уравнения, выраженные через гиперболические функции, имеют вид

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \operatorname{ch}\gamma x + \dot{I}_2 Z \operatorname{sh}\gamma x; \quad \dot{I} = \dot{I}_2 \operatorname{ch}\gamma x + \frac{\dot{U}_2}{Z}\operatorname{sh}\gamma x.$$

Рассмотрим режим холостого хода. Условимся все величины в любой точке линии отмечать дополнительно индексом 0. Так как при холостом ходе $Z_{\text{пр}} = \infty$ и $\dot{I}_2 = 0$, то

$$\dot{U}_0 = \dot{U}_{20} \operatorname{ch}\gamma x; \quad \dot{I}_0 = \frac{\dot{U}_{20}}{Z}\operatorname{sh}\gamma x.$$

Сопротивление линии на ее входе в начале линии оказывается равным

$$Z_0 = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{I}_{10}} = \frac{Z}{\operatorname{th}\gamma l}.$$

На рис. 17.3 и 17.4 приведены для некоторого момента времени прямые, обратные и результирующие волны напряжения и тока при $Z_{\text{пр}} = \infty$.

Характер распределения напряжения и тока вдоль линии хорошо иллюстрируется кривыми распределения квадратов их действующих значений. Для квадратов модулей комплексных величин ch γx и sh γx имеем

$$\left|\operatorname{ch}\gamma x\right|^2 = \left|\operatorname{ch}^2(\alpha x + j\beta x)\right| = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}2\alpha x + \cos 2\beta x);$$

$$\left|\operatorname{sh}\gamma x\right|^2 = \left|\operatorname{sh}^2(\alpha x + j\beta x)\right| = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}2\alpha x - \cos 2\beta x),$$

и, следовательно,

$$U_0^2 = \frac{1}{2}U_{20}^2(\operatorname{ch}2\alpha x + \cos 2\beta x); \quad I_0^2 = \frac{U_{20}^2}{2z^2}(\operatorname{ch}2\alpha x - \cos 2\beta x),$$

где z — модуль комплекса Z.

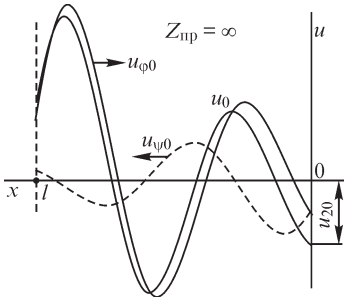


Рис. 17.3

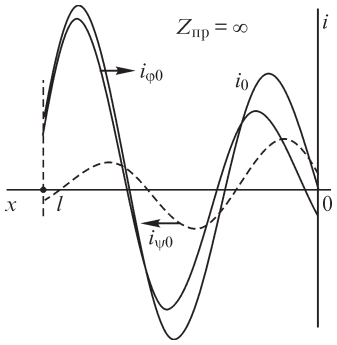


Рис. 17.4

Кривые $\operatorname{ch} 2\alpha x$ и $\cos 2\beta x$, а также их сумма, характеризующая распределение U_0^2, и их разность, характеризующая распределение I_0^2, приведены на рис. 17.5. Из этих кривых видно, что максимумы и минимумы как U_0, так и I_0 чередуются приблизительно через четверть длины волны, причем максимумы U_0 сдвинуты относительно максимумов I_0 также почти на четверть длины волны. Из этих же кривых следует, что в линиях, длина которых не превышает четверти длины волны, при холостом ходе действующий ток убывает, а действующее напряжение, наоборот, возрастает в направлении от начала линии к ее концу.

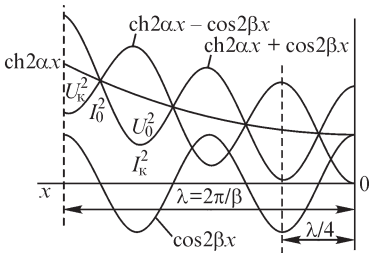


Рис. 17.5

Рассмотрим режим короткого замыкания. Условимся при этом все величины в любой точке линии отмечать дополнительным индексом «к». Так как при коротком замыкании $Z_{пр} = 0$ и $\dot{U}_2 = 0$, то

$$\dot{U}_к = \dot{I}_{2к} Z \operatorname{sh} \gamma x; \quad \dot{I}_к = \dot{I}_{2к} \operatorname{ch} \gamma x.$$

Сопротивление линии на ее входе в начале линии оказывается равным

$$Z_к = \frac{\dot{U}_{1к}}{\dot{I}_{1к}} = Z \operatorname{th} \gamma l.$$

На рис. 17.6 и 17.7 приведены для некоторого момента времени прямые, обратные и результирующие волны напряжения и тока при $Z_{пр} = 0$.

Для квадратов действующих напряжения $U_к$ и тока $I_к$ аналогично предыдущему найдем.

$$U_к^2 = \frac{1}{2} I_{2к}^2 z^2 (\operatorname{ch} 2\alpha x - \cos 2\beta x); \quad I_к^2 = \frac{1}{2} I_{2к}^2 (\operatorname{ch} 2\alpha x + \cos 2\beta x).$$

Следовательно, при коротком замыкании распределение $U_к^2$ и $I_к^2$ вдоль линии характеризуется, соответственно, кривыми ($\operatorname{ch} 2\alpha x - \cos 2\beta x$) и ($\operatorname{ch} 2\alpha x + \cos 2\beta x$), приведенными на рис. 17.5.

Заметим, что, определив из опытов холостого хода и короткого замыкания $Z_0 = Z/\text{th}\,\gamma l$ и $Z_к = Z\,\text{th}\,\gamma l$, можно вычислить Z и γl, а именно

$$Z = \sqrt{Z_0 Z_к} \quad \text{и} \quad \text{th}\,\gamma l = \sqrt{Z_к / Z_0}.$$

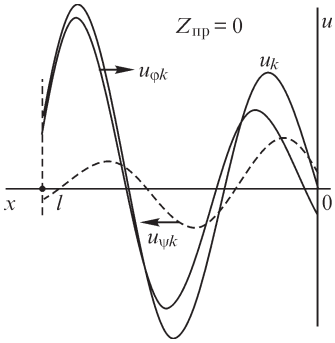


Рис. 17.6

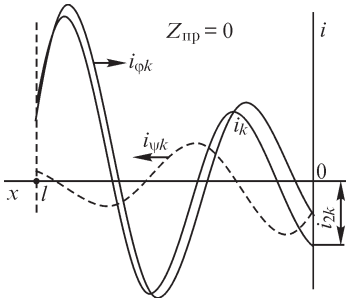


Рис. 17.7

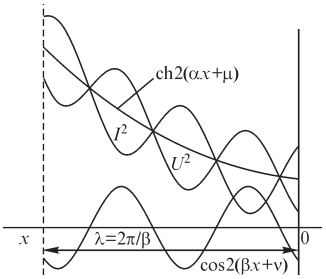


Рис. 17.8

Любой рабочий режим линии при замыкании ее на сопротивление $Z_{пр}$ может быть получен наложением соответствующих режимов холостого хода и короткого замыкания. Выражения для $\dot{U}$ и $\dot{I}$ в общем случае можно привести к виду

$$\dot{U} = \dot{U}_2\left(\text{ch}\,\gamma x + \frac{Z}{Z_{пр}}\text{sh}\,\gamma x\right) = \dot{U}_2\,\frac{\text{ch}(\gamma x + \sigma)}{\text{ch}\,\sigma};$$

$$\dot{I} = \dot{I}_2\left(\text{ch}\,\gamma x + \frac{Z_{пр}}{Z}\text{sh}\,\gamma x\right) = \dot{I}_2\,\frac{\text{sh}(\gamma x + \sigma)}{\text{sh}\,\sigma},$$

если положить $Z/Z_{пр} = \text{th}\,\sigma = \text{th}\,(\mu + j\nu)$, и, следовательно, U^2 и I^2 пропорциональны соответственно $\text{ch}\,2(\alpha x + \mu) + \cos 2(\beta x + \nu)$ и $\text{ch}\,2(\alpha x + \mu) - \cos 2(\beta x + \nu)$, где μ и ν зависят от соотношения между $Z_{пр}$ и Z. Поэтому кривые $U^2 = F_1(x)$, $I^2 = F_2(x)$ в этом случае (рис. 17.8) сходны с кривыми при $Z_{пр} = \infty$ и $Z_{пр} = 0$. Основное отличие состоит в том, что в конце линии $U_2 \neq 0$ и $I_2 \neq 0$

17.8. Линии без потерь

В ряде случаев, в особенности при высоких частотах, когда $\omega L \gg r$ и $\omega C \gg g$, можно пренебречь наличием потерь в линии и принять $r = 0$ и $g = 0$. Тогда $\alpha = 0$, $\gamma = j\beta$, $\beta = \omega\sqrt{LC}$, $Z = z = \sqrt{L/C}$ и многие соотношения, полученные ранее, упрощаются.

В случае холостого хода линии, когда $Z_{пр} = \infty$ и $I_2 = 0$, при счете расстояний от конца линии имеем

$$\dot{U}_0 = \dot{U}_{20}\text{ch}\,\gamma x = \dot{U}_{20}\cos\beta x; \quad \dot{I}_0 = \frac{\dot{U}_{20}}{z}\text{sh}\,\gamma x = j\frac{\dot{U}_{20}}{z}\sin\beta x.$$

Из этих выражений видно, что в рассматриваемом случае в результате наложения двух незатухающих бегущих волн с одинаковыми амплитудами получа-

ются с т о я ч и е в о л н ы. Действительно, cos βx при x 0, $\lambda/2$, λ, $3\lambda/2$... обращается в ± 1, а sin βx — в нуль, и в соответствующих точках линии имеем пучности напряжения и узлы тока. При $x = \lambda/4$, $3\lambda/4$, $5\lambda/4$... получаем узлы напряжения и пучности тока (рис. 17.9), так как тогда cos βx обращается в нуль, а sin βx — в ± 1. Для входного сопротивления линии при холостом ходе Z_0, обозначая длину линии через l, получим

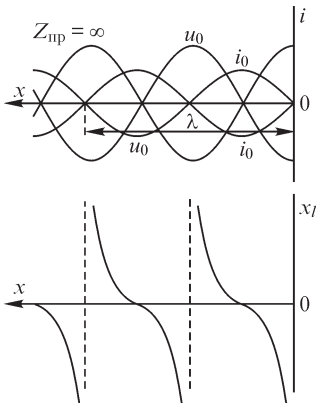


Рис. 17.9

$$Z_0 = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{I}_{10}} = -jz\,\mathrm{ctg}\,\beta l = jx_l,$$

где x_l — соответствующее реактивное сопротивление, т. е. в этом случае входное сопротивление линии при $0 < l < \lambda/4$ имеет емкостный характер, при $\lambda/4 < l < \lambda/2$ — индуктивный характер и т. д. (рис. 17.9). При $l = \lambda/4$, $l = 3\lambda/4$... входное сопротивление разомкнутой линии равно нулю, что соответствует резонансу напряжений, а при $l = \lambda/2$, $l = \lambda$ ... оно равно бесконечности, что соответствует резонансу токов.

В случае короткого замыкания линии, когда $Z_{пр} = 0$ и $U_2 = 0$,

$$\dot{U}_к = \dot{I}_{2к} Z\,\mathrm{sh}\,\gamma x = j\dot{I}_{2к} z \sin\beta x; \quad \dot{I}_к = \dot{I}_{2к}\mathrm{ch}\,\gamma x = \dot{I}_{2к}\cos\beta x,$$

откуда видно, что и в этом случае имеем наложение двух незатухающих бегущих волн с одинаковыми амплитудами, в результате чего получаются стоячие волны. Все отличие от предыдущего случая состоит в том, что в конце линии будут узел напряжения и пучность тока (рис. 17.10). Для входного сопротивления короткозамкнутой линии $Z_к$ имеем

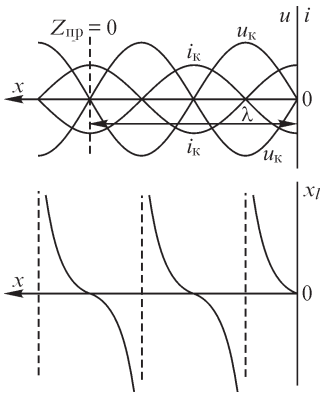


Рис. 17.10

$$Z_к = \frac{U_{1к}}{I_{1к}} = jz\,\mathrm{tg}\,\beta l = jx_l,$$

где x_l — соответствующее реактивное сопротивление, т. е. в этом случае входное сопротивление линии при $0 < l < \lambda/4$ имеет индуктивный характер, при $\lambda/4 < l < \lambda/2$ — емкостный характер и т. д. (рис. 17.10). При $l = \lambda/2$, $l = \lambda$... входное сопротивление короткозамкнутой линии равно нулю, что соответствует резонансу напряжений, а при $l = \lambda/4$, $l = 3\lambda/4$... оно равно бесконечности, что соответствует резонансу токов.

При очень высоких частотах короткозамкнутая линия, длина которой равна четверти длины волны, применяется в качестве колебательного контура, имеющего вследствие относительно малых потерь весьма малое затухание. Такая линия практически обладает чрезвычайно большим входным сопротивлением, и это дает возможность использовать ее при малых длинах волн также для изоляции высокочастотных линий (рис. 17.11) вместо изоляторов, применение которых в этих случаях влечет за собой большие потери.

При реактивной нагрузке линии, когда $Z_{пр} = jx_{пр}$, имеем

$$\dot{U} = \dot{U}_2\left(\cos\beta x + \frac{z}{x_{пр}}\sin\beta x\right) = \dot{U}_2\,\frac{\sin(\beta x+\sigma)}{\sin\sigma};$$

$$\dot{I} = \dot{I}_2\left(\cos\beta x - \frac{x_{пр}}{z}\sin\beta x\right) = \dot{I}_2\,\frac{\cos(\beta x+\sigma)}{\cos\sigma},$$

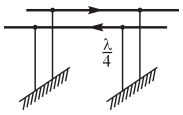


Рис. 17.11

если принять $x_{пр}/z = \operatorname{tg}\sigma$. Таким образом, и в данном случае получаются стоячие волны, но в конце линии при этом не будет ни пучности, ни узла (рис. 17.12). Для входного сопротивления линии, замкнутой на реактивное сопротивление,

$$Z_x = \frac{\dot{U}_{1x}}{\dot{I}_{1x}} = jx_{пр}\,\frac{\operatorname{tg}(\beta l+\sigma)}{\operatorname{tg}\sigma} = jz\operatorname{tg}(\beta l+\sigma) = jx_l,$$

т. е. зависимость входного сопротивления линии от ее длины имеет такой же характер (рис. 17.12), как и в двух предыдущих случаях, причем для $l = \lambda/4$ и $l = \lambda/2$ найдем, соответственно, $Z_x = -z^2/(jx_{пр})$ и Z_x $jx_{пр}$. При $x_{пр} = z\operatorname{ctg}\beta l$, когда $\sigma = \pm\pi/2 - \beta l$, $Z_x = \pm\infty$, и тогда линия эквивалентна короткозамкнутой линии, длина которой равна четверти длины волны, а при $x_{пр} = -z\operatorname{tg}\beta l$, когда $\sigma = -\beta l$, $Z_x = 0$, и, следовательно, в этом случае линия эквивалентна разомкнутой линии, длина которой равна четверти длины волны.

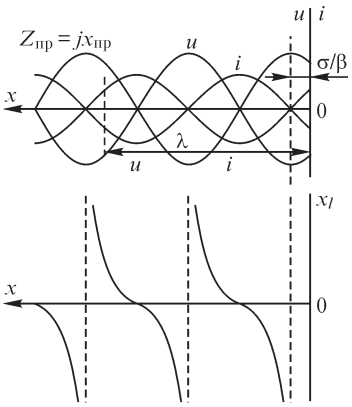


Рис. 17.12

Таким образом, в зависимости от частоты приложенного напряжения, длины линии и оконечного сопротивления линия без потерь, замкнутая на реактивное сопротивление, представляет собой индуктивное или емкостное сопротивление, причем эквивалентная индуктивность или емкость могут иметь все значения в пределах от нуля до бесконечности. Возможность осуществить при помощи соответствующим образом подобранной линии индуктивное или емкостное сопротивление того или иного значения важно для практики при высоких частотах.

Итак, во всех трех рассмотренных случаях работы линии без потерь в ней получаются стоячие волны. При этом пучности напряжения и тока, а также узлы напряжения и тока сдвинуты друг относительно друга на четверть длины волны. Напряжение и ток в каждой точке линии различаются по фазе на четверть периода, и напряжение достигает максимального значения, когда ток во всей линии равен нулю, а ток достигает максимального значения, когда напряжение во всей линии равно нулю.

Так как в любой момент времени в узлах напряжения $u = 0$, а в узлах тока $i = 0$, то в этих точках линии мощность всегда равна нулю, а энергия через эти точки не передается. Однако на каждом участке линии, ограниченном узлами напряжения и тока, происходит передача энергии вдоль линии, связанная с колебаниями энергии между электрическим и магнитным полями на этом участке.

Все три случая образования стоячих волн в линии, рассмотренные нами, характеризуются отсутствием расхода энергии как в линии, так и в приемнике. При наличии расхода энергии или в линии, или в приемнике в линии неизбежно должны существовать бегущие волны напряжения и тока, с которыми только и может быть связан процесс передачи энергии вдоль всей линии.

В заключение остановимся кратко на рассмотрении линии без потерь, имеющей длину, равную четверти длины волны, и замкнутой на активное сопротивление $r_{пр}$. В этом случае

$$\operatorname{ch}\gamma l = \cos\beta l = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

а

$$\operatorname{sh}\gamma l = j\sin\beta l = j\sin\frac{\pi}{2} = j,$$

и имеем

$$\dot{U}_1 = j\dot{U}_2\frac{z}{r_{пр}}; \quad \dot{I}_1 = j\dot{I}_2\frac{r_{пр}}{z},$$

т. е. такую линию можно рассматривать как идеальный трансформатор с коэффициентом трансформации, равным $z/r_{пр}$. Это весьма важное свойство дает возможность использовать линию, длина которой равна четверти длины волны, для согласования приемника с генератором или одной линии с другой линией. Так как входное сопротивление $Z_{вх}$ рассматриваемой линии равно

$$Z_{вх} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{z^2}{r_{пр}},$$

то для согласования генератора и приемника, имеющих активные сопротивления $r_г$ и $r_{пр}$, или двух линий с такими же характеристическими сопротивлениями достаточно включить между ними линию, имеющую длину, равную четверти длины волны, и обладающую характеристическим сопротивлением $z = \sqrt{r_г r_{пр}}$.

Глава восемнадцатая

Электрические цепи с распределенными параметрами при переходных процессах

18.1. Переходные процессы в цепях с распределенными параметрами

В предыдущей главе были рассмотрены процессы в линии при установившемся периодическом режиме. Вместе с тем большой интерес представляют непериодические процессы в таких линиях, например переходные процессы при включении и выключении линии, при воздействии на линии грозовых разрядов и т. п. Токи и напряжения в линиях связи, как правило, носят непериодический характер.

Для исследования таких процессов необходимо решить систему уравнений в частных производных, описывающих эти процессы, при заданных граничных и начальных условиях. Это решение может быть выполнено классическим или операторным методом.

18.2. Решение уравнений однородной неискажающей линии при переходном процессе классическим методом

Воспользуемся классическим методом для нахождения решения уравнений однородной линии

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L\frac{\partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C\frac{\partial u}{\partial t}$$

для частного случая — неискажающей линии, когда $rC = gL$.

Примем $r/L = g/C = \delta$ и введем вместо u и i новые функции u_1 и i_1, связанные с u и i соотношениями:

$$u = u_1 e^{-\delta t}; \quad i = i_1 e^{-\delta t}.$$

Тогда имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} e^{-\delta t}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} e^{-\delta t} - \delta u_1 e^{-\delta t};$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{\partial i_1}{\partial x} e^{-\delta t}; \quad \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial i_1}{\partial t} e^{-\delta t} - \delta i_1 e^{-\delta t}.$$

Подставляя найденные значения производных в основные уравнения линии и сокращая на $e^{-\delta t}$, приведем их к виду

$$-\frac{\partial u_1}{\partial x} = L\frac{\partial i_1}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i_1}{\partial x} = C\frac{\partial u_1}{\partial t}$$

и, взяв производную от первого уравнения по x, а от второго — по t, получим

$$-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = L\frac{\partial^2 i_1}{\partial x \partial t}; \quad -\frac{\partial^2 i_1}{\partial x \partial t} = C\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}.$$

Отсюда найдем

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

и, приняв $CL = 1/v^2$, придем к *волновому уравнению*

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}.$$

Введем вместо x и t новые переменные, а именно

$$\xi = x - vt; \quad \eta = x + vt.$$

Тогда, приняв во внимание, что

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial\eta}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = -v; \quad \frac{\partial\eta}{\partial t} = v;$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial\xi} + \frac{\partial u_1}{\partial\eta}; \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = -v\frac{\partial u_1}{\partial\xi} + v\frac{\partial u_1}{\partial\eta};$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi^2} + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial\eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi^2} - 2v^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi\partial\eta} + v^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\eta^2},$$

и подставив найденные значения вторых производных в волновое уравнение, получим

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi\partial\eta} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right) = 0.$$

Отсюда, интегрируя, находим

$$\frac{\partial u_1}{\partial\eta} = \upsilon(\eta) \quad \text{и} \quad u_1 = \int\upsilon(\eta)\,d\eta + \varphi(\xi) = \varphi(\xi) + \psi(\eta),$$

если принять $\int\upsilon(\eta)\,d\eta = \psi(\eta)$.

Возвращаясь к переменным x и t, можем написать

$$u_1 = \varphi(x - vt) + \psi(x + vt)$$

и, следовательно, для напряжения u между проводами линии имеем

$$u = [\varphi(x - vt) + \psi(x + vt)]e^{-\delta t}.$$

Для определения i_1 подставим в уравнение $-\frac{\partial i_1}{\partial x} = C\frac{\partial u_1}{\partial t}$ только что найденное выражение для u_1. Тогда получим

$$-\frac{\partial i_1}{\partial x} = C\frac{\partial[\varphi(\xi) + \psi(\eta)]}{\partial t} = C\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right] = Cv\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right] = -\sqrt{\frac{C}{L}}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right],$$

так как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial\eta},$$

и, проинтегрировав, найдем

$$i_1=\sqrt{\frac{C}{L}}\,[\varphi(x-vt)-\psi\,(x+vt)+f\,(t)].$$

В выражении для i_1 может содержаться функция $f(t)$ только от t, так как $\frac{\partial}{\partial x}f\,(t)=0$. Для определения $f(t)$ подставим найденные для u_1 и i_1 значения в уравнение $-\frac{\partial u_1}{\partial x}=L\frac{\partial i_1}{\partial t}$ и тогда получим $\frac{\partial f(t)}{\partial t}=0$. Следовательно, $f(t) = A =$ $=$ const. Однако можно положить $A = 0$, так как при $A \neq 0$ мы могли бы ввести вместо φ и ψ функции $\varphi_1 = \varphi + A/2$ и $\psi_1 = \psi - A/2$, после чего получились бы выражения для u_1 и i_1, в которые постоянная A не входит явно. Поэтому можем написать

$$i_1=\sqrt{\frac{C}{L}}\,[\varphi(x-vt)-\psi\,(x+vt)],$$

и, следовательно, для тока i в линии получим

$$i=\sqrt{\frac{C}{L}}\,[\varphi(x-vt)-\psi\,(x+vt)]e^{-\delta t},$$

где $\sqrt{L/C}$ представляет собой, как известно из предыдущего, волновое сопротивление неискажающей линии.

Полученные выражения для напряжения u и тока i можно привести к иному виду, приняв во внимание, что

$$\delta^2=\frac{r}{L}\frac{g}{C}=\alpha^2v^2 \quad \text{и} \quad \delta t=\alpha vt,$$

где $\alpha=\sqrt{rg}$ — коэффициент затухания неискажающей линии (см. § 17.6), и что, следовательно,

$$e^{-\delta t}=e^{-\alpha vt}=e^{\alpha(x-vt)}e^{-\alpha x}=e^{-\alpha(x+vt)}e^{\alpha x}.$$

На основании последних равенств выражения для u и i можно представить в виде

$$u=\varphi(x-vt)e^{-\alpha x}+\psi\,(x+vt)e^{\alpha x};$$

$$i=\sqrt{\frac{C}{L}}\,[\varphi(x-vt)e^{-\alpha x}-\psi\,(x+vt)e^{\alpha x}],$$

причем следует иметь в виду, что функции φ и ψ в этих выражениях отличаются от φ и ψ в предыдущих выражениях для напряжения и тока, соответственно, множителями $e^{\alpha(x-vt)}$ и $e^{-\alpha(x+vt)}$.

Заметим, что мы получили только общий вид решения, определяющий характер функциональной зависимости напряжения и тока от x и t. Конкретный вид

функций $\varphi(x - vt)$ и $\psi(x + vt)$ будет определяться конкретными условиями задачи. Некоторые простые примеры будут рассмотрены дальше. Вместе с тем уже из полученных общих выражений для напряжения и тока можно сделать важные выводы о физическом смысле членов, образующих эти выражения, что и будет сделано в § 18.4.

18.3. Решение уравнений однородной неискажающей линии при переходном процессе операторным методом

Покажем также применение операторного метода для получения решения уравнений однородной линии при переходном процессе.

Так как напряжение и ток являются функциями двух переменных t и x, то их операторные изображения будут функциями оператора p и x:

$$u(t,x) \Rightarrow U(p,x) = \int_0^\infty u(t,x)e^{-pt}\,dt;$$

$$i(t,x) \Rightarrow I(p,x) = \int_0^\infty i(t,x)e^{-pt}\,dt.$$

Производная по времени от напряжения изображается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow pU(p,x) - u(0,x),$$

где $u(0, x)$ — распределение напряжения вдоль линии при $t = 0$. Производная от напряжения по x

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dx}U(p,x).$$

Соответственно, изображения для производных тока будут

$$\frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow pI(p,x) - i(0,x); \quad \frac{\partial i}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dx}I(p,x).$$

Таким образом, уравнения однородной линии

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L\frac{\partial i}{\partial t}; \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C\frac{\partial u}{\partial t}$$

в операторной форме принимают вид

$$-\frac{dU(p,x)}{dx} = rI(p,x) + pLI(p,x) - Li(0,x);$$

$$-\frac{dI(p,x)}{dx} = gU(p,x) + pCU(p,x) - Cu(0,x).$$

Существенно заметить, что уравнения для операторных изображений $U(p, x)$ и $I(p, x)$ являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, так как они содержат лишь одну переменную x. В этом отношении имеем определенную аналогию с уравнениями линии, записанными в комплексной форме при синусоидальном процессе.

Решая совместно эти уравнения при заданных граничных условиях (при $x = 0$ и $x = l$), можем найти операторные изображения $U(p, x)$ и $I(p, x)$, а по ним и оригиналы $u(t, x)$ и $i(t, x)$ напряжения и тока.

При нулевых начальных условиях [$u(0, x) = 0$ и $i(0, x) = 0$] уравнения принимают вид

$$-\frac{dU(p,x)}{dx} = (r + pL)I(p,x); \quad -\frac{dI(p,x)}{dx} = (g + pC)U(p,x).$$

Дифференцируя первое по x и используя второе, находим

$$\frac{d^2U(p,x)}{dx^2} = \gamma^2 U(p,x), \quad \text{где} \quad \gamma = \sqrt{(r + pL)(g + pC)}.$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$U(p,x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x},$$

где A_1 и A_2 не зависят от x, но могут быть функциями от p, т. е. $A_1 = F_1(p)$ и $A_2 = F_2(p)$.

Для операторного изображения тока получаем

$$I(p,x) = -\frac{1}{r + pL}\frac{dU(p,x)}{dx} = \frac{\gamma}{r + pL}(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) =$$

$$= \sqrt{\frac{g + pC}{r + pL}}(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}) = \frac{1}{Z(p)}(A_1 e^{-\gamma x} - A_2 e^{\gamma x}).$$

Величина $Z(p) = \sqrt{\dfrac{r + pL}{g + pC}}$ является *операторным волновым* (характеристическим) *сопротивлением* линии.

Величина $\gamma = \sqrt{(r + pL)(g + pC)}$ представляет собой *операторное выражение коэффициента распространения.*

Решение существенно упрощается для неискажающей линии, для которой $r/L = g/C$, и, следовательно,

$$Z(p) = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{и} \quad \gamma = \sqrt{rg} + p\sqrt{LC} = \alpha + \frac{p}{v}.$$

Таким образом, в этом случае решение для операторных изображений напряжения и тока может быть записано в виде

$$U(p,x) = \left[F_1(p)\, e^{-p\frac{x}{v}}\right] e^{-\alpha x} + \left[F_2(p)\, e^{p\frac{x}{v}}\right] e^{\alpha x};$$

$$I(p,x) = \sqrt{\frac{C}{L}}\left[F_1(p)\, e^{-p\frac{x}{v}}\right] e^{-\alpha x} - \sqrt{\frac{C}{L}}\left[F_2(p)\, e^{p\frac{x}{v}}\right] e^{\alpha x}.$$

Оригинал функции от p, стоящий при множителе $e^{-\alpha x}$, можно получить, применяя формулу Римана—Меллина (см. § 11.5)

$$\varphi(t,x)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty}\left[F_1(p)\,e^{-p\frac{x}{v}}\right]e^{pt}\,dp=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty}F_1(p)\,e^{-p\frac{1}{v}(x-vt)}\,dp.$$

Из последнего выражения видно, что $\varphi\,(t,\,x)$ является функцией аргумента $x-vt$, так как x и t входят совместно только в такой комбинации, т. е. $\varphi\,(x,\,t)=\varphi\,(x-vt)$. Аналогично для функции от p, стоящей при множителе $e^{\alpha x}$, получаем

$$\psi\,(t,x)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty}\left[F_2(p)\,e^{p\frac{x}{v}}\right]e^{pt}\,dp=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty}F_2(p)\,e^{p\frac{1}{v}(x+vt)}\,dp,$$

т. е.

$$\psi\,(t,x)=\psi\,(x+vt).$$

Таким образом, искомое выражение для $u(t,\,x)$ записывается в виде

$$u\,(t,x)=\varphi(x-vt)\,e^{-\alpha x}+\psi\,(x+vt)\,e^{\alpha x}.$$

Соответственно для тока получаем выражение

$$i(t,x)=\sqrt{\frac{C}{L}}\,[\varphi(x-vt)\,e^{-\alpha x}-\psi\,(x+vt)\,e^{\alpha x}].$$

Полученные выражения полностью совпадают с найденными в предыдущем параграфе классическим методом.

18.4. Волны в неискажающей линии

Рассмотрим только что полученные выражения для напряжения и тока линии. При этом для простоты сначала допустим, что потери в линии пренебрежимо малы, т. е. примем $r=0$ и $g=0$. Тогда $\delta=0$, $\alpha=0$, $e^{-\delta t}=1$, а также $e^{-\alpha x}=e^{\alpha x}=1$, и для линии без потерь получим

$$u=\varphi(x-vt)+\psi(x+vt)=u_\varphi+u_\psi;$$

$$i=\left[\varphi(x-vt)\Big/\sqrt{\frac{L}{C}}\,\right]+\left[\psi(x+vt)\Big/\left(-\sqrt{\frac{L}{C}}\right)\right]=i_\varphi+i_\psi.$$

Пусть в частном случае $\psi\,(x+vt)=0$ и $u=\varphi\,(x-vt)=u_\varphi$. Приняв в последнем равенстве $t=0$, найдем распределение напряжения вдоль линии в начальный момент времени. Возьмем некоторую произвольную точку x и предположим, что она перемещается вдоль линии со скоростью v, т. е. что ее положение определяется координатой $x=x_0+vt$. Тогда напряжение в этой движущейся точке $u_\varphi=\varphi\,(x_0+vt-vt)=\varphi\,(x_0)$ не будет зависеть от времени. Так как это заключение справедливо для любой точки, движущейся вдоль линии со скоростью v, то, следовательно, при $u=\varphi\,(x-vt)=u_\varphi$ начальное распределение напряжения u перемещается вдоль линии со скоростью v. Иными словами, функция $u_\varphi=\varphi\,(x-vt)$ определяет прямую волну напряжения, распространяющуюся вдоль линии со скоростью v, т. е. волну напряжения, бегущую вперед и не претерпевающую изменения формы. Аналогично функция $u_\psi=\psi\,(x+vt)$ определяет

обратную волну напряжения, распространяющуюся вдоль линии также без изменения формы со скоростью $-v$, или, что то же, распространяющуюся со скоростью v в отрицательном направлении счета расстояний, т. е. бегущую назад.

Таким образом, при отсутствии потерь в линии напряжение, а также и ток в ней могут быть представлены как суммы двух волн, распространяющихся вдоль линии без изменения формы со скоростью $v = 1/\sqrt{LC}$ в противоположных направлениях. При этом в любой точке линии отношение напряжения и тока для прямой волны равно $\sqrt{L/C}$, т. е. волновому сопротивлению линии, зависящему только от параметров линии, а для обратной волны это отношение равно $-\sqrt{L/C}$. При рассмотрении установившихся процессов уже указывалось, что скорость распространения волн в неискажающей однородной линии $v = 1/\sqrt{LC}$ для воздушных линий равна скорости света в воздухе.

Наличие в выражениях для u и i множителя $e^{-\delta t}$ или, соответственно, в других их выражениях множителей $e^{-\alpha x}$ и $e^{\alpha x}$, причем $\alpha = \sqrt{rg}$, показывает, что обе волны по мере продвижения их вдоль линии затухают по показательному закону. Причиной затухания волн является постепенное превращение начального запаса энергии электрического и магнитного полей, связанных с линией, в теплоту, выделяющуюся в проводах, так как $r \neq 0$, а также и в среде, окружающей провода, так как $g \neq 0$.

В дальнейшем будем предполагать, что волны при движении их вдоль линии не затухают. Затухание волн вследствие потерь в линии при необходимости может быть учтено, по крайней мере, для неискажающей линии, так как нами установлено, что в этом случае волны затухают по показательному закону с показателем $\alpha x = \sqrt{rg}x$.

При наличии только одних прямых или только одних обратных волн для энергии магнитного и электрического полей на элементе линии dx, приняв во внимание, что $u^2/i^2 = L/C$, найдем

$$dW_{\text{м}} = \frac{1}{2} i^2 L\, dx = \frac{1}{2} u^2 C\, dx = dW_{\text{э}}.$$

Отсюда следует, что в каждом из этих случаев энергии магнитного и электрического полей на элементе длины линии, а следовательно, и на всей линии равны друг другу, и для суммы этих полей на элементе линии получим

$$dW = dW_{\text{м}} + dW_{\text{э}} = i^2 L\, dx = u^2 C\, dx = ui\sqrt{LC}dx.$$

Для соответствующей мощности найдем

$$p = ui = i^2 \sqrt{\frac{L}{C}} = u^2 \Big/ \sqrt{\frac{L}{C}},$$

откуда следует, что при данном значении напряжения эта мощность тем больше, чем меньше волновое сопротивление линии.

18.5. О происхождении и характере волн в линиях

Возникновение волн в линиях обычно связано или с атмосферными разрядами, или с переключениями, т. е. с включением и выключением или самих линий, или устройств, связанных с ними.

Пусть в линии на некотором ее протяжении индуцирован заряд вследствие нахождения над этой частью линии заряженного облака. Если облако, индуктировавшее заряд, разрядится, то этот заряд освободится, и тогда напряжение вдоль линии будет распределено пропорционально заряду, приходящемуся на каждый элемент длины линии. В результате освобождения индуцированного заряда вдоль линии начнут распространяться волны напряжения и тока. Пусть распределение напряжения вдоль линии в начальный момент времени задано функцией $f_0(x)$ (рис. 18.1). Волновое сопротивление линии, являющееся в нашем случае вещественным числом, равным $\sqrt{L/C}$, обозначим через z. Тогда, приняв во внимание, что ток в начальный момент времени равен нулю, имеем

$$u_0 = u_{\varphi 0} + u_{\psi 0} = f_0(x);$$
$$i_0 = i_{\varphi 0} + i_{\psi 0} = (u_{\varphi 0} - u_{\psi 0})/z = 0$$

и, следовательно,

$$u_{\varphi 0} = u_{\psi 0} = \frac{1}{2} f_0(x).$$

Таким образом, в начальный момент времени напряжение представляет собой сумму двух равных волн, одинаковых по форме и имеющих один и тот же знак, а ток — сумму двух волн, одинаковых по форме, но имеющих противоположные знаки.

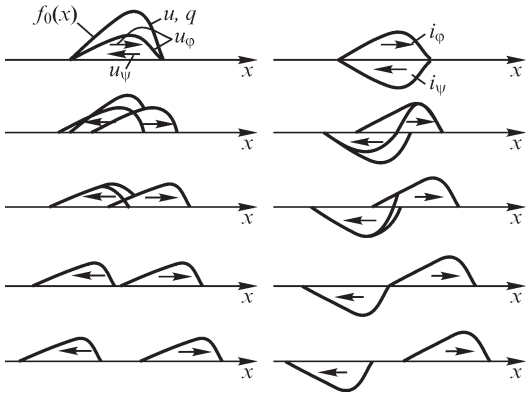


Рис. 18.1

С момента освобождения индуцированного заряда эти волны напряжения, а также и волны тока распространяются по линии в противоположных направлениях, причем скорости всех этих волн по абсолютному значению равны между собой. На рис. 18.1 представлено движение волн напряжения и тока в первые

моменты времени после освобождения индуцированного заряда в предположении, что они не затухают.

При изучении явлений, связанных с переключениями, в тех случаях, когда длина линии мала по сравнению с длиной волны, будем предполагать, что внешние ЭДС постоянны. Это предположение допустимо, так как рассматриваемые явления протекают настолько быстро, что при синусоидальной ЭДС, имеющей частоту порядка десятков герц, значение этой ЭДС за время пробега волны вдоль всей линии может измениться лишь очень незначительно. Кроме того, будем считать, что процессы переключения осуществляются мгновенно. В соответствии с этими предположениями в дальнейшем примем, что волны напряжения и тока, идущие от источника внешней ЭДС, имеют прямоугольную форму.

18.6. Преломление и отражение волн в месте сопряжения двух однородных линий

Пусть волна φ_1, бегущая от источника ЭДС по однородной линии, имеющей волновое сопротивление z_1, достигла конца этой линии, в котором последняя соединена с другой однородной линией, имеющей волновое сопротивление z_2. Обозначив напряжение и ток в первой линии через u_1 и i_1, а во второй — через u_2 и i_2, в месте сопряжения обеих линий имеем $u_1 = u_2$ и $i_1 = i_2$. Предположим, что во второй линии до прихода волны из первой линии напряжения не было. Тогда непосредственно после прихода волны к месту сопряжения линий во второй линии может возникнуть лишь волна φ_2, бегущая в том же направлении, что и волна φ_1, и называемая преломленной волной, в то время как в первой линии, кроме волны φ_1, называемой падающей волной, при $z_2 \neq z_1$ обязательно возникнет волна ψ_1, бегущая в обратном направлении и называемая отраженной волной, так как иначе не могут быть удовлетворены условия равенства напряжений или токов в месте сопряжения линий. Поэтому, отмечая индексами φ_1, ψ_1 и φ_2, соответственно, падающие, отраженные и преломленные волны, в месте сопряжения линий имеем

$$u_1 = u_{\varphi 1} + u_{\psi 1} = u_{\varphi 2} = u_2;$$

$$i_1 = \frac{u_{\varphi 1} - u_{\psi 1}}{z_1} = \frac{u_{\varphi 2}}{z_2} = i_2,$$

откуда

$$u_{\varphi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1} u_{\varphi 1}; \quad u_{\psi 1} = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} u_{\varphi 1};$$

$$i_{\varphi 2} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2} i_{\varphi 1}; \qquad i_{\psi 1} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} i_{\varphi 1}.$$

Из этих отношений следует, что в данном случае преломленные и отраженные волны имеют ту же форму, что и падающие волны. Отношения $u_{\varphi 2}/u_{\varphi 1}$ и $i_{\varphi 2}/i_{\varphi 1}$ можно рассматривать как коэффициенты преломления, а отношения $u_{\psi 1}/u_{\varphi 1} = q_u$ и $i_{\psi 1}/i_{\varphi 1} = q_i$ — как коэффициенты отражения.

Из выражений, полученных для преломленных и отраженных волн, следует, что преломленные волны напряжения и тока имеют тот же знак, что и падающие, а из отраженных волн одна сохраняет знак падающей волны, а другая имеет обратный знак.

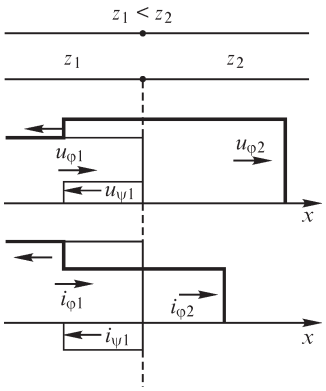


Рис. 18.2

При $z_2 > z_1$, что, например, имеет место при переходе волны из кабельной линии в воздушную, преломленная волна напряжения больше падающей, а преломленная волна тока меньше падающей. Что касается отраженных волн, то волна напряжения отражается без перемены знака, а волна тока — с переменой знака, причем по абсолютному значению обе эти волны меньше соответствующих падающих волн. При этом вследствие наложения отраженных волн на падающие ток в первой линии уменьшается, а напряжение возрастает, но не более чем в два раза. На рис. 18.2 показаны падающие, преломленные и отраженные волны при $z_1 < z_2$. Заметим, что даже при очень больших значениях z_2 преломленная волна напряжения не может превысить падающую волну более чем в два раза.

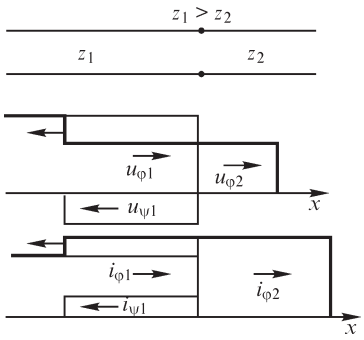


Рис. 18.3

При $z_1 > z_2$ преломленная волна напряжения меньше падающей, а преломленная волна тока больше падающей. В этом случае при отражении знак изменяется для волны напряжения, а абсолютные значения обеих отраженных волн опять будут меньше значений соответствующих падающих волн. Вследствие наложения отраженных волн на падающие напряжение в первой линии уменьшится, а ток возрастет, но не более чем в два раза (рис. 18.3). Заметим, что даже при очень малых значениях z_2 преломленная волна тока не может превысить падающую волну более чем в два раза.

Рассматривая мощность p в месте сопряжения линий, имеем

$$p = u_1 i_1 = u_2 i_2$$

или

$$(u_{\varphi 1} + u_{\psi 1})\frac{u_{\varphi 1} - u_{\psi 1}}{z_1} = \frac{u_{\varphi 1}^2}{z_1} - \frac{u_{\psi 1}^2}{z_1} = \frac{u_{\varphi 2}^2}{z_2}$$

и, следовательно,

$$\frac{u_{\varphi 1}^2}{z_1} = \frac{u_{\psi 1}^2}{z_1} + \frac{u_{\varphi 2}^2}{z_2} \quad \text{или} \quad p_{\varphi 1} = p_{\psi 1} + p_{\varphi 2},$$

где $p_{\varphi 1}, p_{\psi 1}, p_{\varphi 2}$ — мощности падающих, отраженных и преломленных волн. Отсюда следует, что часть мощности падающих волн, равная мощности преломленных волн, переходит во вторую линию, а остальная часть, равная мощности отраженных волн, возвращается обратно в первую линию.

Из изложенного следует, что при переходе волны напряжения из линии с меньшим волновым сопротивлением в линию с большим волновым сопротивлением напряжение увеличивается и в пределе может удвоиться. Поэтому напряжение возрастает при переходе волны из кабельной линии в воздушную и из линий передачи в обмотки трансформаторов, которые представляют собой цепи, обладающие значительным волновым сопротивлением, превосходящим волновое сопротивление воздушных линий.

Волны, возникающие в линиях, распространяются с конечной скоростью и могут поэтому вызывать значительные перенапряжения между соседними точками цепи, в одну из которых волна напряжения уже пришла. Эти перенапряжения тем больше, чем круче фронт волны, и наиболее значительны при отвесном фронте волны. В связи с этим первые витки обмоток трансформаторов в соответствующих случаях выполняют со значительно усиленной изоляцией.

18.7. Отражение волн от конца линии

Пусть бегущие волны напряжения и тока достигли конца однородной линии, имеющей волновое сопротивление z и замкнутой на сколь угодно сложную цепь с сосредоточенными параметрами. В результате отражения падающих волн φ от конца линии возникнут отраженные волны ψ, и для напряжения u и тока i в конце линии, или, иными словами, для напряжения на зажимах оконечной цепи и тока в ней, получим

$$u = u_\varphi + u_\psi; \quad i = i_\varphi + i_\psi = \frac{u_\varphi - u_\psi}{z}; \quad zi = u_\varphi - u_\psi,$$

откуда

$$2u_\varphi = zi + u.$$

Из этой простой зависимости следует, что ток i можно найти как ток, возникающий в эквивалентной схеме, включаемой под напряжение $2u_\varphi$ и состоящей из активного сопротивления, равного волновому сопротивлению z линии, и последовательно соединенной с ним оконечной цепи.

Определив ток i по заданным u_φ, z и параметрам оконечной цепи, можем найти отраженные волны напряжения и тока из соотношений

$$u_\psi = u_\varphi - zi; \quad i_\psi = -\frac{u_\psi}{z}.$$

Рассмотрим, пользуясь этим способом, отражение волн от простейших оконечных цепей в предположении, что ЭДС источника падающих волн постоянна.

Пусть однородная линия с волновым сопротивлением z замкнута на сопротивление r_0. Тогда эквивалентная схема состоит из последовательно соединенных сопротивлений z и r_0, и получим

$$i = \frac{2u_\varphi}{z + r_0}; \quad u_\psi = u_\varphi - zi = \frac{r_0 - z}{r_0 + z} u_\varphi;$$

$$i_\psi = -\frac{u_\psi}{z} = \frac{z - r_0}{z + r_0} i_\varphi.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае мы получили такие же соотношения между отраженными и падающими волнами, как и в случае отражения волн в месте сопряжения двух линий, с той лишь разницей, что вместо волнового сопротивления второй линии вошло сопротивление r_0, на которое замкнута линия. При этом для мощности $p = ui$ в конце линии имеем

$$p = ui = (u_\varphi + u_\psi)\frac{u_\varphi - u_\psi}{z} = \frac{u_\varphi^2}{z} - \frac{u_\psi^2}{z} = p_\varphi - p_\psi,$$

т. е. эта мощность, поглощаемая приемником, равна разности мощностей падающих и отраженных волн. Если сопротивление r_0 равно волновому сопротивлению линии z, то отраженные волны не возникают и вся мощность падающих волн поглощается приемником.

Из полученных выражений можно установить соотношение между падающими и отраженными волнами в случае отражения волн от конца разомкнутой или короткозамкнутой линии. При разомкнутой линии, полагая $r_0 = \infty$, в конце линии имеем

$$u_\psi = u_\varphi; \quad i_\psi = -i_\varphi,$$

а при короткозамкнутой линии, полагая $r_0 = 0$, в конце линии получим

$$u_\psi = -u_\varphi; \quad i_\psi = i_\varphi,$$

т. е. в этих случаях отраженные волны имеют то же значение, что и падающие, причем при разомкнутой линии с переменой знака отражается волна тока, а при короткозамкнутой линии с переменой знака отражается волна напряжения (рис. 18.4). Таким образом, в результате наложения отраженных волн на падающие в разомкнутой линии напряжение на ее конце возрастает в два раза, а в короткозамкнутой линии ток на ее конце возрастает также в два раза, что можно получить из исследования отражения волн в месте сопряжения двух линий, полагая, соответственно, или $z_2 = \infty$, или $z_2 = 0$.

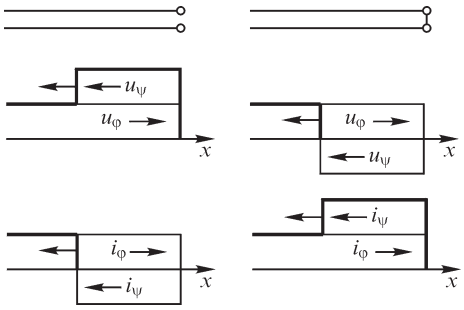


Рис. 18.4

Это можно пояснить следующим образом. И при холостом ходе, и при коротком замыкании падающие волны с присущей им энергией полностью отражаются от конца линии, так как в конце линии энергия не потребляется. Поэтому в той части линии, до которой дошли отраженные волны, энергия в два раза больше энергии падающих волн и, следовательно, в четыре раза больше энергии магнитного поля падающей волны тока, а также в четыре раза больше энергии электрического поля падающей волны напряжения, так как эти энергии равны друг другу.

При холостом ходе линии ток на ее конце должен равняться нулю. Поэтому, когда падающая волна тока придет к концу линии, то возникает равная ей по значению и противоположная по знаку отраженная волна тока и ток в конце линии упадет до нуля, а энергия магнитных полей, связанных с падающей и отра-

женной волнами тока, перейдет в энергию электрического поля. Увеличение в конце линии энергии электрического поля в четыре раза повлечет за собой возрастание напряжения в конце линии в два раза. Это повышение напряжения, связанное с переходом энергии магнитного поля в энергию электрического поля, будет распространяться от конца линии к ее началу.

При коротком замыкании линии напряжение в ее конце должно равняться нулю. Поэтому, когда падающая волна напряжения придет к концу линии, то возникнет равная ей по значению и противоположная по знаку отраженная волна напряжения и напряжение в конце линии упадет до нуля, а энергия электрических полей, связанных с падающей и отраженной волнами напряжения, перейдет в энергию магнитного поля. Увеличение в конце линии энергии магнитного поля в четыре раза повлечет за собой возрастание тока в конце линии в два раза. Такое возрастание тока, связанное с переходом энергии электрического поля в энергию магнитного поля, будет распространяться от конца линии к ее началу.

Рассмотрим отражение волн в случае, когда конец однородной линии замкнут на цепь (r_0, L_0). Тогда эквивалентная схема состоит из последовательно соединенных сопротивления ($z + r_0$) и индуктивности L_0, и при $u_\varphi = \text{const}$ для тока i получим (см. § 9.5)

$$i = \frac{2u_\varphi}{z + r_0}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

где $\tau = \dfrac{L_0}{z + r_0}$, и для u_ψ и i_ψ найдем

$$u_\psi = \left(\frac{r_0 - z}{r_0 + z} + \frac{2z}{r_0 + z}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u_\varphi; \quad i_\psi = \left(\frac{z - r_0}{z + r_0} - \frac{2z}{z + r_0}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)i_\varphi.$$

Из этих выражений, приняв $t = 0$, нетрудно усмотреть, что в первый момент отражение от цепи (r_0, L_0) происходит так же, как и от разомкнутого конца линии. Полагая $t = \infty$, видим, что с течением времени напряжение и ток приближаются к значениям, которые мы имели для линии, замкнутой на сопротивление r_0. На рис. 18.5 показаны падающие и отраженные волны для частного случая $r_0 = 0$, когда

$$u_\psi = \left(-1 + 2e^{-\frac{z}{L_0}t}\right)u_\varphi; \quad i_\psi = \left(1 - 2e^{-\frac{z}{L_0}t}\right)i_\varphi.$$

Рассмотрим случай, когда волны отражаются от конца линии, замкнутой на цепь (r_0, C_0). Тогда эквивалентная схема состоит из последовательно соединенных сопротивлений ($z + r_0$) и емкости C_0, и при $u_\varphi = \text{const}$ для тока i имеем (см. § 9.6)

$$i = \frac{2u_\varphi}{z + r_0}e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $\tau = (z + r_0)C_0$, и для u_ψ и i_ψ найдем

$$u_\psi = \left(1 - \frac{2z}{z + r_0} e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u_\varphi; \quad i_\psi = \left(-1 + \frac{2z}{z + r_0} e^{-\frac{t}{\tau}}\right) i_\varphi.$$

Из этих выражений, приняв $t = 0$, видим, что в первый момент времени отражение от цепи (r_0, C_0) происходит так же, как в линии, замкнутой на сопротивление r_0. Полагая $t = \infty$, нетрудно убедиться, что с течением времени напряжение и ток приближаются к значениям, которые мы имели для разомкнутой линии. На рис. 18.5 показаны падающие и отраженные волны для частного случая $r_0 = 0$, когда

$$u_\psi = \left(1 - 2e^{-\frac{t}{zC_0}}\right) u_\varphi; \quad i_\psi = \left(-1 + 2e^{-\frac{t}{zC_0}}\right) i_\varphi.$$

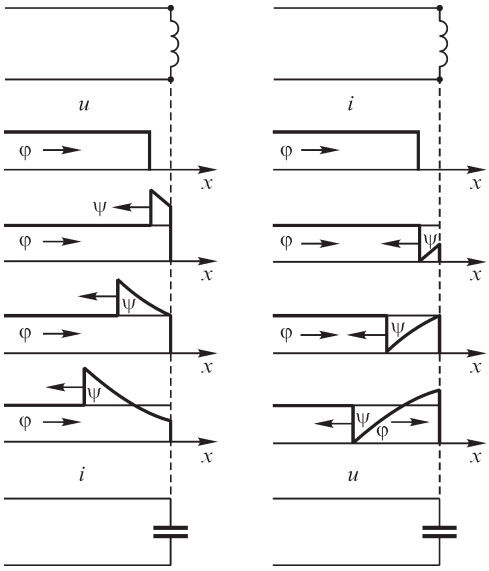


Рис. 18.5

Так как до прихода отраженных волн к началу любой однородной линии напряжение на ее входных зажимах равно произведению тока в начале линии на ее волновое сопротивление, то изложенный способ определения отраженных волн пригоден и в тех случаях, когда к оконечной цепи с сосредоточенными параметрами присоединены те или иные однородные линии. При этом, составляя соответствующую эквивалентную схему, каждую из линий, непосредственно присоединенных к оконечной цепи, следует заменить активным сопротивлением, равным ее волновому сопротивлению, независимо от того, что находится в конце этой линии. Необходимо, однако, иметь в виду, что составленная таким образом эквивалентная схема дает возможность производить расчеты лишь до момента прихода отраженных волн к началу хотя бы одной из линий, учтенных в этой схеме.

18.8. Процесс включения однородной линии

Рассмотрим процесс включения под синусоидальное напряжение однородной линии в предположении, что длина линии мала по сравнению с длиной волны. Тогда, как было указано ранее, можно пренебречь затуханием волн в начальной стадии процесса включения, а также ограничиться рассмотрением включения линии под действие постоянного напряжения, равного мгновенному напряжению в начале линии в момент включения. Пусть, кроме того, внутреннее сопротивление генератора пренебрежимо мало, иными словами, мощность генератора весьма велика. При этом предположении волны напряжения и тока будут отра-

жаться от генератора так, как они отражаются от короткозамкнутого конца линии.

Рассмотрим случай, когда включаемая линия разомкнута на приемном конце, и предположим, что до момента включения напряжение и ток по всей длине линии равны нулю. После включения от генератора вдоль линии начнут распространяться волны напряжения и тока, и когда они дойдут до конца линии, напряжение вдоль линии будет равно напряжению генератора, а ток — напряжению генератора, деленному на волновое сопротивление линии. Дойдя до разомкнутого конца линии, эти волны отразятся, причем волна напряжения не изменит знака, а волна тока изменит знак. При движении к генератору отраженная волна напряжения, налагаясь на падающую волну, повышает напряжение в линии до удвоенного напряжения генератора, а отраженная волна тока уменьшает ток в линии до нуля. В тот момент, когда эти волны дойдут до генератора, ток по всей длине линии будет равен нулю и вся линия будет заряжена до напряжения, равного удвоенному напряжению генератора.

Волны, отразившиеся от разомкнутого конца, у генератора претерпят новое отражение, при котором волна напряжения изменит знак, а волна тока сохранит знак, так что получатся отрицательная волна напряжения и отрицательная волна тока, идущие от генератора к концу линии. Отрицательная волна напряжения при движении к концу линии понижает напряжение в линии до напряжения, равного напряжению генератора, и одновременно в линии возникает ток, противоположный по направлению первоначальному току. Дойдя до конца линии, отрицательные волны напряжения и тока претерпят третье отражение, в результате к генератору пойдет отрицательная волна напряжения, снижающая напряжение в линии до нуля, и положительная волна тока, уменьшающая ток в линии до нуля. Когда эти волны дойдут до генератора, линия будет полностью разряжена и напряжение и ток по всей длине линии будут равны нулю. Этим и завершится полный цикл процессов, который при сделанных нами предположениях будет периодически повторяться. Отдельные характерные фазы рассмотренного цикла процессов представлены на рис. 18.6.

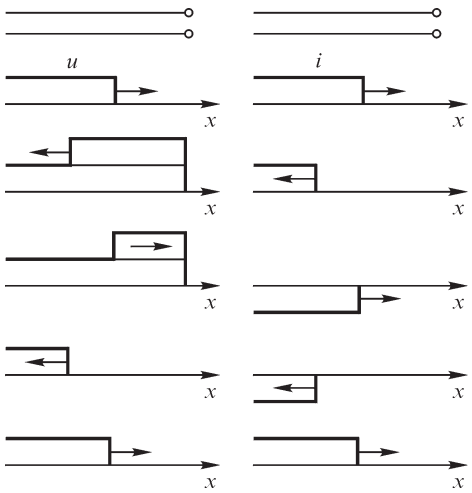


Рис. 18.6

Полный цикл процесса движения и отражения волн в рассмотренном случае совершается в течение времени

$$T = \frac{4l}{v} = 4l\sqrt{LC},$$

где l — длина линии, а v — скорость распространения волн в ней. Этот промежуток времени T называют п е р и о д о м с о б с т в е н н ы х к о л е б а н и й л и н и и.

Если бы индуктивность и емкость линии были сосредоточены, то период T_0 собственных колебаний такого контура из катушки с индуктивностью Ll и конденсатора емкостью Cl был бы

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LlCl} = 2\pi l\sqrt{LC},$$

т. е. в $\pi/2$ раза больше, чем T.

Наличие потерь в линии ведет к тому, что волны напряжения и тока постепенно затухают, а значения напряжения и тока приближаются к тем значениям, которые они должны иметь при установившемся режиме холостого хода.

В случае включения линии, конец которой замкнут накоротко, волна напряжения, распространяющаяся от генератора, отражается от конца линии с переменой знака, а волна тока — без перемены знака. Отраженная волна напряжения, налагаясь на падающую волну, понижает напряжение в линии до нуля, а в результате наложения отраженной волны тока ток в линии удваивается. Когда отраженные волны дойдут до генератора, то напряжение во всей линии будет равно нулю, а ток — удвоенному первоначальному току. Так как при всех последующих отражениях и от генератора, и от короткозамкнутого конца линии волна напряжения отражается с переменой знака, то напряжение в линии изменяется между нулем и напряжением генератора. Отражение волны тока и от генератора, и от короткозамкнутого конца линии каждый раз происходит без перемены знака. Поэтому ток в линии после каждого отражения возрастает на значение первоначального тока (рис. 18.7).

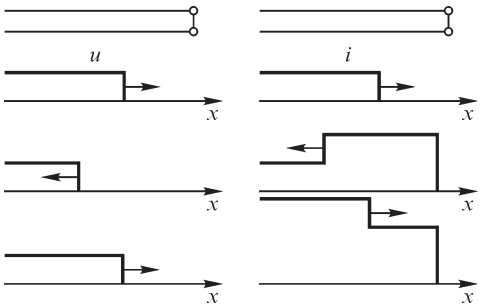


Рис. 18.7

Наличие потерь в линии вызывает затухание волн и ограничивает нарастание тока. По мере затухания волн напряжение и ток приближаются к тем значениям, которые они должны иметь при установившемся режиме короткого замыкания.

Если длина линии сравнима с длиной волны, то за время каждого пробега волны вдоль линии напряжение на зажимах генератора в начале линии успевает заметно измениться. При рассмотрении процессов в линии это изменение должно быть принято во внимание.

18.9. Прохождение волн при наличии реактивного сопротивления в месте сопряжения однородных линий

Пусть между двумя однородными линиями с волновыми сопротивлениями z_1 и z_2 включена последовательно реактивная катушка с индуктивностью L_0. Тогда, пренебрегая емкостью между витками обмотки катушки, в месте сопряжения линий имеем

$$i_1 = i_2; \quad u_1 = L_0 \frac{di_2}{dt} + u_2$$

и в случае перехода волн напряжения и тока из первой линии во вторую можем написать

$$\frac{u_{\varphi 1} - u_{\psi 1}}{z_1} = \frac{u_{\varphi 2}}{z_2}; \quad u_{\varphi 1} + u_{\psi 1} = \frac{L_0}{z_2}\frac{du_{\varphi 2}}{dt} + u_{\varphi 2},$$

откуда

$$2u_{\varphi 1} = \frac{L_0}{z_2}\frac{du_{\varphi 2}}{dt} + \frac{z_2 + z_1}{z_2}u_{\varphi 2}.$$

При прямоугольной форме падающей волны $u_{\varphi 1} = \text{const}$, и следовательно,

$$u_{\varphi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u_{\varphi 1}; \quad i_{\varphi 2} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)i_{\varphi 1},$$

где $\tau = L_0/(z_1 + z_2)$, и тогда для $u_{\psi 1}$ и $i_{\psi 1}$ найдем

$$u_{\psi 1} = \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} + \frac{2z_1}{z_2 + z_1}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u_{\varphi 1}; \quad i_{\psi 1} = \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} - \frac{2z_1}{z_1 + z_2}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)i_{\varphi 1}.$$

Из полученных выражений видно, что в рассматриваемом случае преломленные волны $u_{\varphi 2}$ и $i_{\varphi 2}$ нарастают постепенно от значений, равных нулю при $t = 0$, до значений, которые мы имели при отсутствии реактивной катушки. Что же касается отраженных волн $u_{\psi 1}$ и $i_{\psi 1}$, то в первый момент они имеют такие же значения, как и при отражении от разомкнутого конца линии, а затем постепенно приближаются к значениям, которые мы имели при отсутствии катушки.

Таким образом, в результате включения реактивной катушки фронт преломленных волн приобретает пологий характер даже при отвесном фронте падающих волн. Быстрота нарастания напряжения и тока во второй линии тем меньше, чем больше постоянная времени $\tau = L_0/(z_1 + z_2)$, т. е. чем больше индуктивность катушки. Сглаживание фронта преломленных волн в данном случае объясняется тем, что энергия падающей волны частично переходит в энергию магнитного поля, связанного с реактивной катушкой. Применяя реактивные катушки для сглаживания фронта преломленных волн, следует иметь в виду, что в результате наложения отраженной волны на падающую волну напряжение в первой линии в первые моменты времени удваивается.

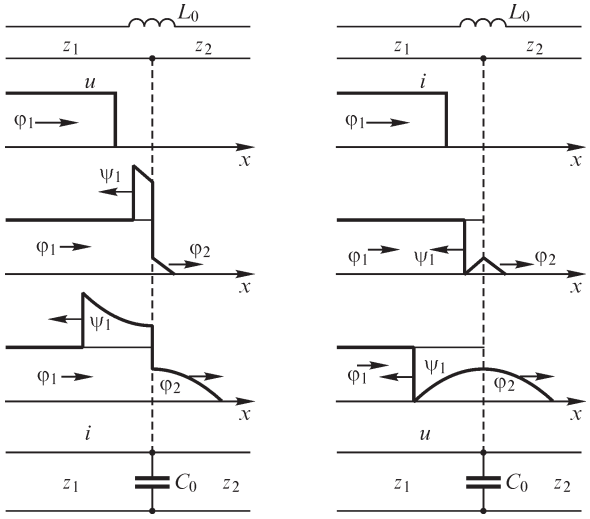


Рис. 18.8

На рис. 18.8 показаны падающие, преломленные и отраженные волны для частного случая $z_1 = z_2$, когда

$$u_{\varphi 2} = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u_{\varphi 1}; \quad i_{\varphi 2} = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) i_{\varphi 1};$$

$$u_{\psi 1} = e^{-\frac{t}{\tau}} u_{\varphi 1}; \qquad i_{\psi 1} = -e^{-\frac{t}{\tau}} i_{\varphi 1},$$

где $\tau = L_0/(2z_1) = L_0/(2z_2)$.

Пусть в месте сопряжения линий включено ответвление, содержащее конденсатор, емкость которого равна C_0. Тогда в месте сопряжения линий

$$u_1 = u_2; \quad i_1 = C_0 \frac{du_2}{dt} + i_2,$$

и в случае перехода волн напряжения и тока из первой линии во вторую можем написать

$$u_{\varphi 1} + u_{\psi 1} = u_{\varphi 2}; \quad \frac{u_{\varphi 1} - u_{\psi 1}}{z_1} = C_0 \frac{du_{\varphi 2}}{dt} + \frac{u_{\varphi 2}}{z_2}$$

и, следовательно,

$$2u_{\varphi 1} = z_1 C_0 \frac{du_{\varphi 2}}{dt} + \frac{z_2 + z_1}{z_2} u_{\varphi 2}.$$

При прямоугольной форме падающей волны и $u_{\varphi 1} = \text{const}$ получим

$$u_{\varphi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u_{\varphi 1}; \quad i_{\varphi 2} = \frac{2z_1}{z_1 + z_2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) i_{\varphi 1},$$

где $\tau = \dfrac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} C_0$, и тогда для $u_{\psi 1}$ и $i_{\psi 1}$ найдем

$$u_{\psi 1} = \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} - \frac{2z_2}{z_2 + z_1} e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u_{\varphi 1}; \quad i_{\psi 1} = \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} + \frac{2z_2}{z_1 + z_2} e^{-\frac{t}{\tau}}\right) i_{\varphi 1}.$$

Выражения, полученные для $u_{\varphi 2}$ и $i_{\varphi 2}$, аналогичны выражениям, полученным в предыдущем случае, и в соответствии с этим преломленные волны нарастают постепенно от нуля до тех значений, которые они имеют при отсутствии ответвления. При этом быстрота нарастания их, определяемая постоянной времени $\tau = \dfrac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} C_0$, тем меньше, чем больше емкость конденсатора C_0. Что касается отраженных волн $u_{\psi 1}$ и $i_{\psi 1}$, то в первый момент времени они имеют такие же значения, как при отражении от короткозамкнутого конца линии, а затем постепенно приближаются к значениям, которые мы имели при отсутствии ответвления.

Таким образом, в результате наличия емкостного ответвления фронт преломленных волн, как и в предыдущем случае, приобретает пологий характер даже при отвесном фронте падающих волн. Сглаживание фронта преломленных волн в данном случае объясняется тем, что энергия падающей волны частично переходит в энергию электрического поля конденсатора.

При применении емкостного ответвления для сглаживания фронта преломленных волн отраженная волна напряжения в первый момент времени равна по значению и противоположна по знаку падающей волне и напряжение в первой линии в момент прихода волны к месту сопряжения линий падает до нуля, а затем постепенно нарастает. На рис. 18.8 справа показаны падающие, преломленные и отраженные волны для частного случая $z_1 = z_2$, когда

$$u_{\varphi 2} = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u_{\varphi 1}; \quad i_{\varphi 2} = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) i_{\varphi 1};$$

$$u_{\psi 1} = -e^{-\frac{t}{\tau}} u_{\varphi 1}; \qquad i_{\psi 1} = e^{-\frac{t}{\tau}} i_{\varphi 1},$$

где $\tau = z_1 C_0/2 = z_2 C_0/2$.

18.10. Прохождение волн при наличии активного сопротивления в месте сопряжения однородных линий

Пусть между двумя однородными линиями с волновыми сопротивлениями z_1 и z_2 включено последовательно с ними активное сопротивление r_0. Тогда в месте сопряжения линий

$$i_1 = i_2; \quad u_1 = r_0 i_2 + u_2,$$

и в случае перехода волны $u_{\varphi 1}$ из первой линии во вторую можем написать

$$\frac{u_{\varphi 1} - u_{\psi 1}}{z_1} = \frac{u_{\varphi 2}}{z_2}; \quad u_{\varphi 1} + u_{\psi 1} = \frac{r_0}{z_2} u_{\varphi 2} + u_{\varphi 2}.$$

Следовательно,

$$u_{\varphi 2} = \frac{2 z_2}{z_2 + z_1 + r_0} u_{\varphi 1}; \quad u_{\psi 1} = \frac{z_2 - z_1 + r_0}{z_2 + z_1 + r_0} u_{\varphi 1}.$$

Из этих выражений видно, что наличие сопротивления r_0 уменьшает преломленную волну напряжения и что даже при большом значении z_2, увеличивая r_0, ее можно довести до сколь угодно малого значения. Отраженная волна $u_{\psi 1}$ при $z_2 > z_1$ с увеличением r_0 возрастает, но не может превзойти значение $u_{\varphi 1}$.

Мощность, выделяющаяся в сопротивлении r_0, равна $p = r_0 i_2^2 = \frac{r_0}{z_2^2} u_{\varphi 2}^2$, в то время как мощность падающей волны $p_{\varphi 1} = \frac{u_{\varphi 1}^2}{z_1}$. Для отношения этих мощностей имеем

$$\frac{p}{p_{\varphi 1}} = \frac{r_0 z_1}{z_2^2} \frac{u_{\varphi 2}^2}{u_{\varphi 1}^2} = \frac{4 r_0 z_1}{(z_2 + z_1 + r_0)^2},$$

причем при $r_0 = z_2 + z_1$ это отношение достигает максимума, равного $z_1/(z_1 + z_2)$. Таким образом, значительная часть мощности падающей волны может быть по-

глощена сопротивлением r_0 лишь при $z_1 \gg z_2$, т. е. когда преломленная волна напряжения мала по сравнению с падающей. Однако при любом соотношении между z_1 и z_2, взяв $r_0 = z_1 + z_2$, получим $u_{\varphi 2} = \dfrac{z_2}{z_1 + z_2} u_{\varphi 1}$, и тогда преломленная волна напряжения будет в два раза меньше, чем при отсутствии сопротивления r_0 (рис. 18.9).

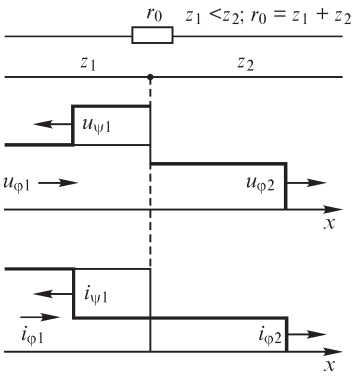


Рис. 18.9

Для того чтобы перенапряжения, возникшие на одном участке линии, не распространялись по всей ее длине, между отдельными участками линии включают активные сопротивления, уменьшающие, как мы только что видели, значение волн напряжения при их прохождении из одного участка в другой. Так как для эффективного действия эти сопротивления должны иметь значение порядка 500–600 Ом, то параллельно с ними включают реактивные катушки, имеющие незначительное сопротивление для тока нормальной частоты, но оказывающие в первые моменты значительное сопротивление волнам.

Пусть теперь в месте сопряжения линий включено ответвление, имеющее только активное сопротивление r_0. Тогда в этом месте

$$u_1 = u_2; \quad i_1 = \frac{u_2}{r_0} + i_2,$$

и в случае перехода волны $u_{\varphi 1}$ из первой линии во вторую можем написать

$$u_{\varphi 1} + u_{\psi 1} = u_{\varphi 2}; \quad \frac{u_{\varphi 1} - u_{\psi 1}}{z_1} = \frac{u_{\varphi 2}}{r_0} + \frac{u_{\varphi 2}}{z_2},$$

следовательно,

$$u_{\varphi 2} = \frac{2z_2}{z_2 + z_1 + z_2 z_1 / r_0} u_{\varphi 1}; \quad u_{\psi 1} = \frac{z_2 - z_1 - z_2 z_1 / r_0}{z_2 + z_1 + z_2 z_1 / r_0} u_{\varphi 1}.$$

Из этих выражений вытекает, что наличие ответвления с активным сопротивлением уменьшает преломленную волну напряжения; причем, уменьшая r_0, ее можно довести до сколь угодно малого значения. Отраженная волна $u_{\psi 1}$ с уменьшением r_0 возрастает по абсолютной величине, но не может превзойти значение $u_{\varphi 1}$.

Мощность, выделяемая в ответвлении, равна $p = u_{\varphi 2}^2 / r_0$, в то время как мощность падающей волны $p_{\varphi 1} = u_{\varphi 1}^2 / z_1$. Для отношения этих мощностей имеем

$$\frac{p}{p_{\varphi 1}} = \frac{z_1}{r_0} \frac{u_{\varphi 2}^2}{u_{\varphi 1}^2} = \frac{4 z_1 z_2^2}{r_0 (z_1 + z_2 + z_1 z_2 / r_0)^2},$$

причем при $r_0 = \dfrac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}$ это отношение достигает максимума, равного $\dfrac{z_2}{z_1 + z_2}$. Таким образом, в рассматриваемом случае при $z_1 \ll z_2$, когда преломленная волна напряжения значительно превосходит падающую, большая часть мощности последней поглощается в активном ответвлении. При этом, взяв $r_0 = \dfrac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}$, получим $u_{\varphi 2} = \dfrac{z_2}{z_1 + z_2} u_{\varphi 1}$, и тогда при любом соотношении между z_1 и z_2 преломленная волна напряжения будет в два раза меньше, чем при отсутствии ответвления (рис. 18.10).

Во избежание прохождения через ответвление сколько-нибудь значительного тока при нормальной работе линии последовательно с элементом, обладающим сопротивлением r_0, включают конденсатор, не оказывающий существенного сопротивления прохождению через него волн, но имеющий достаточно большое сопротивление для тока нормальной частоты.

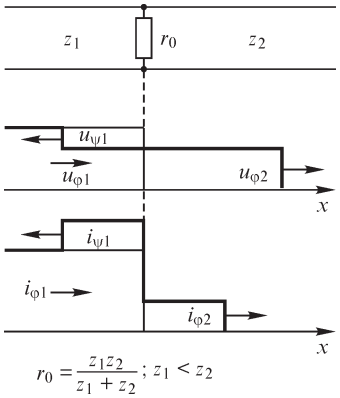


Рис. 18.10

Вопросы, упражнения и задачи к главам 15–18

15.1. Синтез двухполюсников

УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) Выясните, почему указанные выражения не являются функциями цепи:

а) $\dfrac{p+2}{3p^2+(2+j)p+1}$; *б*) $\dfrac{p-2}{p^2+3p+1}$; *в*) $\dfrac{p^2-3p+4}{p+1}$; *г*) $\dfrac{2}{p^2+3p+2}$.

2. (О) Используя метод разложения на простые дроби, реализуйте следующие входные функции и изобразите соответствующие схемы:

а) $Z(p)=\dfrac{p+2}{p^2+4p+3}$; *б*) $Y(p)=\dfrac{p+2}{p^2+4p+3}$; *в*) $Z(p)=\dfrac{16p^2+10p+2}{8p+1}$;

г) $Z(p)=\dfrac{2p^2+5p+3}{2p+1}$; *д*) $Z(p)=\dfrac{2p^2+0{,}5p+4}{0{,}5p^2+1}$; *е*) $Z(p)=\dfrac{6p^3+6p^2+5p+1}{3p^2+1}$;

ж) $Z(p)=\dfrac{10p^3+3p}{(8p^2+1)(p^2+1)}$; *з*) $Y(p)=\dfrac{4p+8}{2p+4}$; *и*) $Y(p)=\dfrac{2p^2+2p+1}{p+1}$;

к) $Y(p)=\dfrac{3p^2+2p+1}{2(p^2+1)(p+1)}$.

3. (О) Изобразите схемы электрических цепей, получаемых методом цепных дробей по заданным функциям цепи:

а) $Z(p)=\dfrac{4p^3+3p}{2p^2+1}$; *б*) $Y(p)=\dfrac{9p^3+6p}{3p^2+1}$; *в*) $Z(p)=\dfrac{20p^3+5p}{24p^2+1}$;

г) $Z(p)=\dfrac{16p^4+14p^2+1}{16p^3+6p}$; *д*) $Y(p)=\dfrac{60p^4+21p^2+1}{60p^3+9p}$.

15.2. Синтез четырехполюсников

УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) Выразите передаточную функцию $K(p)=U_2(p)/U_1(p)$ четырехполюсника через его Z-параметры, принимая очень большим его: *а*) входное сопротивление ($I_1=0$); *б*) выходное сопротивление ($I_2=0$).

2. (О) Выразите передаточную функцию $K(p)=U_2(p)/U_1(p)$ четырехполюсника через его Z-параметры и сопротивление $R_н$ нагрузки, принимая весьма большим его входное сопротивление ($I_1=0$).

3. (О) Найдите параметры $Z_1(p)$, $Z_2(p)$ симметричной мостовой схемы, реализующей передаточную функцию $K(p)=U_2(p)/I_1(p)$, равную

а) $\dfrac{1-4p^2}{6p(2p^2+1)}$; *б*) $\dfrac{24p^3-4p^2+3p}{2(8p^2+1)}$; *в*) $\dfrac{0{,}15p}{(p^2+0{,}2)(p^2+0{,}5)}$.

17.1. Расчет установившихся режимов длинной линии

ВОПРОСЫ

1. (О) К входу воздушной линии длиной 3 км приложено напряжение: *а*) $u = U_m \sin 2\pi \cdot 50t$; *б*) $u = U_m \sin 2\pi \cdot 10^5 t$ (при использовании линии в качестве канала высокочастотной связи); *в*) изображенное на рис. В17.1 вида (грозовой импульс). В каком случае при анализе электромагнитных процессов в линии ее можно рассматривать как цепь с сосредоточенными параметрами?

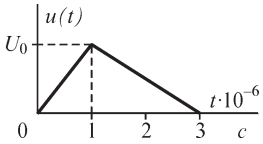


Рис. В17.1

2. Вследствие каких физических явлений параметры r, L, C, g длинной линии могут зависеть от частоты?

3. Являются ли сопротивление r и проводимость g на единицу длины линии взаимно обратными величинами?

4. Чему равен ток, ответвляющийся от одного провода к другому на отрезке линии длиной dx, если ток в линии не изменяется от времени?

5. Какова размерность коэффициентов: *а*) затухания α, *б*) фазы β, *в*) распространения γ?

6. Чему равно входное сопротивление линии, замкнутой на приемник, сопротивление которого равно волновому сопротивлению линии?

7. Каким должно быть сопротивление приемника, чтобы коэффициенты отражения напряжения q_u и тока q_i были равными?

8. При каких значениях $Z_{пр}$ коэффициент отражения напряжения q_u достигает максимального (минимального) значения, если волновое сопротивление Z линии и сопротивление $Z_{пр}$ приемника активные?

9. Зависит ли длина волны напряжения (тока) в линии от параметров линии?

10. Могут ли величины q_u и q_i быть мнимыми?

11. Равны ли друг другу фазовая скорость и скорость распространения волны напряжения и тока вдоль линии?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Определите параметры Т- и П-образных эквивалентных схем двухпроводной линии при установившемся синусоидальном режиме.

2. (Р) По известным A-параметрам четырехполюсника, эквивалентного линии в установившемся синусоидальном режиме, определите меру передачи, коэффициент затухания и коэффициент фазы четырехполюсника. Сопоставьте полученные выражения с выражениями для коэффициента распространения, коэффициента затухания, коэффициента фазы линии.

3. (О) Напряжение $\dot{U}_1$ и ток $\dot{I}_1$ в точке с координатой $x = x_1$ линии длиной l известны. Запишите выражения для напряжения $\dot{U}_2$ и тока $\dot{I}_2$ в точке с координатой $x = x_2$ линии для приведенных в таблице значений x_1 и x_2.

Вариант	*а*	*б*	*в*	*г*	*д*	*е*
x_1	0	l	$l/2$	0	l	$l/2$
x_2	l	0	0	$l/2$	$l/2$	l

4. Определите длину l линии, у которой сдвиг фаз между входным и выходным напряжениями составляет $\pi/4$, $\pi/2$, π, 2π, если $\alpha = 0$, $\beta = 5\cdot10^{-4}$ рад/км и линия: *а*) замкнута на волновое сопротивление, *б*) работает в режиме холостого хода.

5. Линия без потерь замкнута на сопротивление, равное ее волновому сопротивлению. Найдите зависимость U_x/U_1 от координаты x, отсчитываемой от начала линии (U_1 и U_x — действующие значения напряжения, соответственно, в начале линии и в точке линии с координатой x).

6. (О) Получите соотношение между параметрами r, L, g, C линии, при котором волновое сопротивление линии: *а*) активное; *б*) имеет индуктивный (емкостный) характер.

7. На входе линии длиной $l = \lambda = 170$ км действует напряжение $u_1(t) = U_m \sin \omega t$. Линия замкнута на волновое сопротивление. Постройте кривые распределения напряжения вдоль линии для моментов времени $t = \lambda/4v$, $\lambda/2v$, $3\lambda/4v$, λ/v. Примите $U_m = 220\sqrt{2}$ В, $\alpha = 1{,}4\cdot10^{-2}$ Нп/км, $\beta = 3{,}6\cdot10^{-2}$ рад/км.

8. (О) Параметры линии имеют значения $r = 4$ Ом/км, $g = 5\cdot10^{-8}$ См/км, $C = 5\cdot10^{-10}$ Ф/км. Определите индуктивность линии длиной $l = 1$ км, если известно, что ее волновое сопротивление не зависит от частоты.

9. (О) На входе однородной линии длиной $l = 1$ км действует источник постоянного напряжения $U_1 = 100$ кВ, при этом ток в начале линии $I = 250$ А. Линия замкнута на волновое сопротивление. Параметры линии $r = 0{,}2$ Ом/км, $g = 5\cdot10^{-6}$ См/км. Постройте кривые распределения напряжения и тока вдоль линии.

10. (О) Используя систему телеграфных уравнений, изобразите одно звено цепной схемы, эквивалентирующей: *а*) двухпроводную линию; *б*) трехфазную линию.

11. Определите частоту среза ω_c для одного звена цепной схемы, моделирующей линию без потерь ($r = 0$, $g = 0$). Заданы индуктивность L и емкость C на единицу длины, длина линии l и число звеньев m цепной схемы.

12. (Р) Изображенная на рис. В17.2 схема эквивалентна участку линии. Определите длину этого участка при известных скорости распространения волны по линии и значениях $L_э$ и $C_э$.

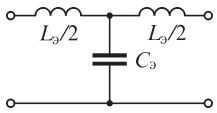


Рис. В17.2

13. Каждое Т-образное звено цепной схемы, моделирующей линию длиной $l = 1$ м, собрано из катушек индуктивностью $L = 30$ мкГ и конденсатора емкостью 240 пФ. Определите сдвиг по фазе между напряжениями на входе и выходе одного звена линии ($f = 1$ МГц).

14. (О) Найдите сопротивление $Z_{пр}$ приемника, на которое замкнута линия с волновым сопротивлением Z, если известны прямые и отраженные волны напряжения и тока в конце линии, приведенные в таблице.

Вариант	$\dot{U}_{\varphi}$, кВ	$\dot{I}_{\varphi}$, кА	$\dot{U}_{\psi}$, кВ	$\dot{I}_{\psi}$, кА	Z, Ом
1		$2+j$		$2+j$	
2	$3-j$		$-3+j$		
3	$1-3j$			$1+j2$	$1+j$
4		$2-j$	$3-j$		$-1{,}4-j0{,}2$
5		$-2-j$		$2+j$	
6	$3-j$		$3-j$		
7	$-1+j3$		$1+j2$		$1+j$
8		$2-j$	$3+j$		$1+j$
9	$3+j$			0	$2-j$
10		$1+j$	0		$2+j$
11	1			-1	$1+j$
12		j	$1+j$		$-j$

15. (О) Линия без потерь ($r = 0, g = 0$) состоит из трех участков (рис. В17.3). В конце каждого участка включен резистор сопротивлением r. Найдите волновое сопротивление каждого из участков линии, если известно, что отраженные волны в линии отсутствуют.

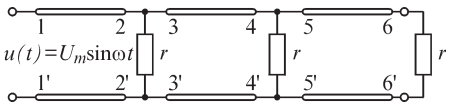


Рис. В17.3

16. Линия с волновым сопротивлением $Z = 50$ Ом замкнута на сопротивление $Z_{\text{пр}} = (50 + j100)$ Ом. Определите модуль и аргумент коэффициентов отражения напряжения и тока.

17.2. Неискажающая длинная линия

ВОПРОСЫ

1. Зависит ли волновое сопротивление однородной неискажающей линии от сопротивления r проводов на единицу ее длины?

2. У двух неискажающих кабельных линий параметры r и g одинаковы, а индуктивности L различаются в два раза. Во сколько раз различаются фазовые скорости волн в этих линиях?

3. Являются ли линии без потерь ($r = 0$, $g = 0$) неискажающими?

4. Диэлектрические проницаемости вещества изоляции двух неискажающих кабельных линий одинакового исполнения связаны соотношением $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Как соотносятся величины Z_1 и Z_2, λ_1 и λ_2, β_1 и β_2, α_1 и α_2 этих линий?

ЗАДАЧИ

1. (Р) Неискажающая линия длиной l = 100 км характеризуется параметрами r = 0,2 Ом/км, $g = 5{\cdot}10^{-6}$ См/км. Рассчитайте требуемый коэффициент усиления напряжения устройства на конце линии, обеспечивающего одинаковые уровни напряжения на входе и на выходе линии.

2. (Р) Рассчитайте индуктивность катушек, при включении которых через каждый километр линии связи с параметрами r = 2,5 Ом/км, $g = 10^{-6}$ См/км, $L = 2{\cdot}10^{-3}$ Гн/км, $C = 8{\cdot}10^{-9}$ Ф/км, она становится неискажающей.

17.3. Режимы холостого хода и короткого замыкания длинной линии

ВОПРОСЫ

1. (О) Зависят ли сопротивления на входе линии в режимах холостого хода Z_0 и короткого замыкания $Z_к$ от частоты напряжения, на которой проводятся опыты по их определению?

2. В некоторой точке x неискажающей линии определены величины *а*) $\frac{\dot{U}_\varphi}{\dot{I}_\varphi}$; *б*) $\frac{\dot{U}_\psi}{\dot{I}_\psi}$; *в*) $\frac{\dot{U}}{\dot{I}}$. Остаются ли эти величины неизменными в различных точках линии?

3. (О) Каковы параметры линии, у которой синусоидальный ток в начале линии в режиме короткого замыкания приемника равен нулю?

4. Синусоидальный ток в конце линии при $x = l = \lambda$ в режиме холостого хода равен нулю. Существуют ли другие значения x, при которых ток равен нулю: *а*) в некоторые моменты времени; *б*) в любой момент времени?

5. (О) Какой должна быть длина линии без потерь с параметрами $L = 2{\cdot}10^{-3}$ Гн/км, $C = 8{\cdot}10^{-9}$ Ф/км, чтобы на частоте f = 1 МГц входное сопротивление Z_0 линии при холостом ходе (или входное сопротивление $Z_к$ короткозамкнутой линии): *а*) было равно нулю; *б*) было равно бесконечности; *в*) имело емкостный (индуктивный) характер?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) К началу линии (длина линии l, $\gamma = \alpha + j\beta$, $Z = ze^{j\varphi}$) приложено синусоидальное напряжение $u_1(t) = U_m \sin \omega t$. Найдите напряжение $u_2(t)$ и ток $i_2(t)$ в конце линии, а также ток на входе линии $i_1(t)$ при нагрузке линии, равной волновому сопротивлению z линии. Постройте кривые распределения по линии мгновенных значений напряжения для моментов времени $t = 0$; $\pi/4\omega$; $\pi/2\omega$; π/ω. Как изменятся напряжение и ток в приемнике, если длину линии уменьшить вдвое? Изменятся ли при этом активные мощности: отдаваемая источником и потребляемая приемником?

2. (Р) К короткозамкнутому отрезку линии длиной l = 1 м с волновым сопротивлением Z = 200 Ом приложено синусоидальное напряжение $u(t) = 100\sin \omega t$,

$f = 50$ МГц. Определите мгновенное значение тока в конце линии, принимая скорость распространения волн в линии равной $v = 3 \cdot 10^8$ м/с.

3. Разомкнутый на конце отрезок двухпроводной линии длиной $l = 3$ м и волновым сопротивлением $Z = 450$ Ом подключен к синусоидальному напряжению амплитудой $U_m = 200$ В и частотой $f = 50$ МГц. Рассчитайте амплитуду напряжения на конце линии и амплитуду тока на входе линии.

4. (О) К входу линии без потерь с параметрами $L = 2 \cdot 10^{-3}$ Гн/км, $C = 8 \cdot 10^{-9}$ Ф/км и длиной $l = 100$ км приложено напряжение $u_1(t) = 500 \sin \omega t$, $f = 4$ кГц. Рассчитайте волновое сопротивление Z линии, фазовую скорость, длину волны λ. Найдите мгновенные значения напряжения $u_2(t)$ и тока $i_2(t)$ в нагрузке линии, принимая, что линия замкнута на сопротивление $Z_{пр}$, причем: *а*) $Z_{пр} = Z$; *б*) $Z_{пр} = \infty$; *в*) $Z_{пр} = 0$.

Как изменится амплитуда напряжения в конце линии при изменении частоты напряжения на 10 % при различных значениях сопротивления приемника?

5. Линия (фидер) с волновым сопротивлением 100 Ом соединяет источник синусоидального напряжения частотой 500 МГц с приемником $r = 36$ Ом. Рассчитайте характеристическое сопротивление и длину четвертьволнового отрезка линии, с помощью которого фидер может быть согласован с приемником (скорость распространения волны $v = 3 \cdot 10^5$ км/с).

18.1. Переходные процессы в одной длинной линии

ВОПРОСЫ

1. Каким условиям должна отвечать линия, чтобы форма волн напряжения и тока в ней не изменялась и была одной и той же в любой момент времени?

2. Возникает ли переходный процесс в линии при мгновенном изменении ее нагрузки r?

3. В некоторой точке двухпроводной линии передачи происходит замыкание проводов. Будут ли распространяться волны напряжения и тока от места короткого замыкания к началу и концу линии?

4. Почему представляет интерес изучение переходных процессов в длинных линиях при действии в них постоянных напряжений?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Получите дифференциальное уравнение для операторного изображения напряжения $U(p, x)$ в длинной линии при ненулевых начальных условиях.

2. (О) На рис. В18.1 изображены напряжение $u_\varphi(x, t_1)$ прямой волны и ток $i_\psi(x, t_2)$ обратной волны вдоль линии без потерь длиной l. Постройте ток $i_\varphi(x, t_1)$ прямой волны и напряжение $u_\psi(x, t_2)$ обратной волны вдоль линии.

3. К линии без потерь приложено напряжение $u = 200\, e^{-10^3 t}$ кВ. Запишите выражения $u(x)$, $i(x)$ и постройте эти зависимости при $t = 0{,}3 \cdot 10^{-3}$ с, принимая длину линии равной 300 км, ее волновое сопротивление $z = 400$ Ом, скорость распространения волн $v = 3 \cdot 10^5$ км/с, начальные условия нулевыми: $u(x, 0)$, $i(x, 0) = 0$.

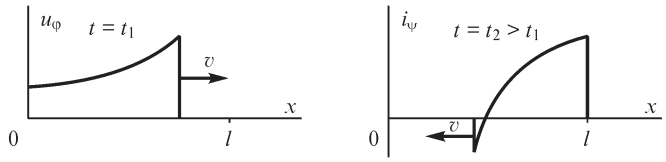


Рис. В18.1

4. (О) Рассчитайте энергию электрического и магнитного полей в линии без потерь с параметрами $L = 2$ мГн/км, $C = 6{\cdot}10^{-9}$ Ф/км, длиной $l = 150$ км после подключения к ней: *а*) постоянного напряжения $u = 100$ кВ; *б*) импульса напряжения $u = 100\ e^{-10^3 t}$ кВ для момента времени, когда волна напряжения проходит расстояние, равное 3/4 длины линии.

18.2. Переходные процессы при соединении нескольких длинных линий

ВОПРОСЫ

1. (О) При каких соотношениях между волновыми сопротивлениями z_1 и z_2 двух соединенных линий в точке их сопряжения справедливы равенства: *а*) $|u_{\psi 1}| = u_{\varphi 2}$; *б*) $|i_{\psi 1}| = i_{\varphi 2}$; *в*) $p_{\psi 1} = 0$; *г*) $u_1 = u_2 = 1{,}5u_{\varphi 1}$; *д*) $i_1 = i_2 = 1{,}5i_{\varphi 1}$?

2. При каких волновых сопротивлениях двух линий коэффициенты преломления и отражения принимают предельные значения?

3. (О) Может ли мощность $p_{\varphi 2}$ преломленной волны превышать мощность $p_{\varphi 1}$ падающей волны?

4. Какие соотношения возможны между мощностями $p_{\psi 1}$ отраженной и $p_{\varphi 2}$ преломленной волн?

5. Могут ли в месте сопряжения двух однородных линий выполняться неравенства: *а*) $u_{\varphi 2} < 0$; *б*) $i_{\varphi 2} < 0$; *в*) $u_{\psi 1} < 0$, $i_{\psi 1} < 0$?

6. На рис. В18.2 изображено сопряжение двух и четырех однородных линий. При каком соотношении между волновыми сопротивлениями линий процессы в первой линии в обоих случаях будут одинаковыми?

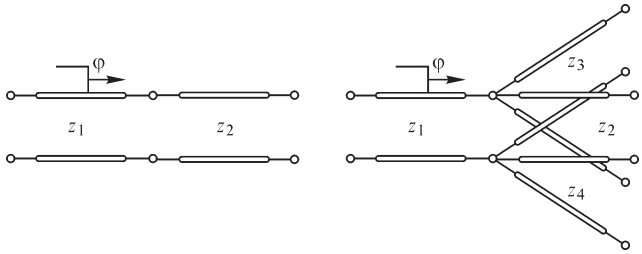


Рис. В18.2

7. Почему именно первые витки обмоток трансформаторов выполняют с усиленной изоляцией? Как изменится фронт волны перенапряжения при прохождении первых витков обмоток трансформаторов?

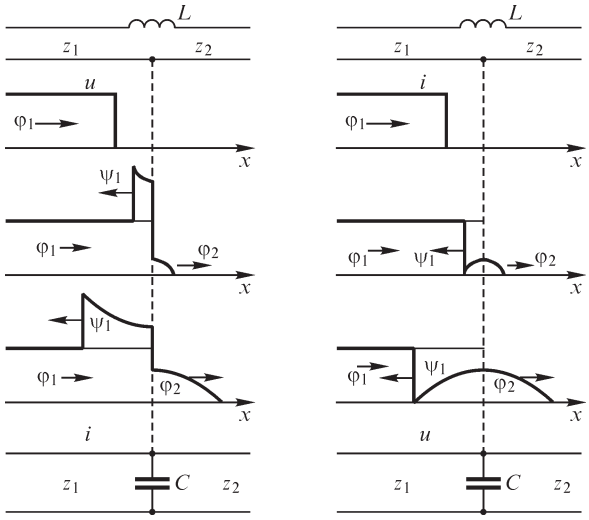


Рис. В18.3

8. Выразите напряжение u_L и ток i_C реактивных элементов, включенных в месте сопряжения двух однородных линий (рис. В18.3), через известные величины $u_{\varphi 1}$, $u_{\psi 1}$, $u_{\varphi 2}$, $i_{\varphi 1}$, $i_{\psi 1}$, $i_{\varphi 2}$. Покажите величины u_L, i_C на рисунке.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что напряжение (ток) преломленной волны не может быть больше удвоенного значения падающей волны напряжения (тока).

2. (Р) Чему равно сопротивление r_0 в месте соединения двух длинных однородных линий (рис. В18.4), если известно, что $u_{\varphi 2} = u_{\varphi 1}$? Определите величину отношения $p/p_{\varphi 1}$ для этого случая (здесь p — мощность, выделяемая в сопротивлении r_0). Почему при ограничении перенапряжений с помощью сопротивления более опасен случай, когда $z_1 < z_2$? Как изменится мощность в резисторе r_0 в установившемся режиме, если параллельно с ним включить катушку индуктивности?

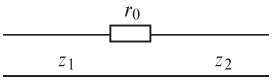


Рис. В18.4

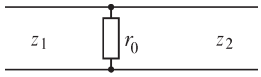


Рис. В18.5

3. (Р) В месте соединения двух однородных линий включен резистор (рис. В18.5). При каком сопротивлении резистора справедливо равенство $i_{\varphi 2} = i_{\varphi 1}$? Чему при этом равно отношение $p/p_{\psi 1}$? (Здесь p — мощность, выделяемая в сопротивлении r_0.) Как изменится мощность в резисторе в установившемся режиме, если последовательно с ним включить конденсатор?

4. (Р) Получите выражения для отраженных и преломленных волн напряжения и тока в месте сопряжения изображенных на рис. В18.6 однородных линий, принимая их волновые сопротивления равными.

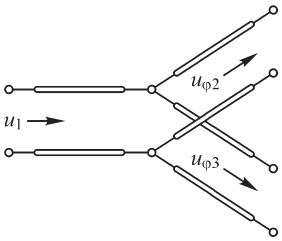


Рис. В18.6

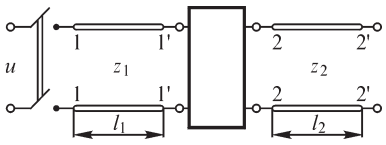


Рис. В18.7

5. (Р) Между двумя неискажающими линиями без потерь ($z_1 = 400$ Ом, $l_1 = 100$ км, $z_2 = 50$ Ом, $l_2 = 50$ км) (рис. В18.7) включена электрическая цепь, схема которой приведена на рис. В18.8. Ко входу первой линии подключают напряжение u (рис. В18.9). Получите выражения для отраженной и преломленной волн напряжения и тока и постройте распределение напряжений и токов вдоль линии для момента времени, когда преломленные волны достигнут середины второй линии, считая, что в момент подключения напряжения токи и напряжения во всех точках обеих линий равны нулю.

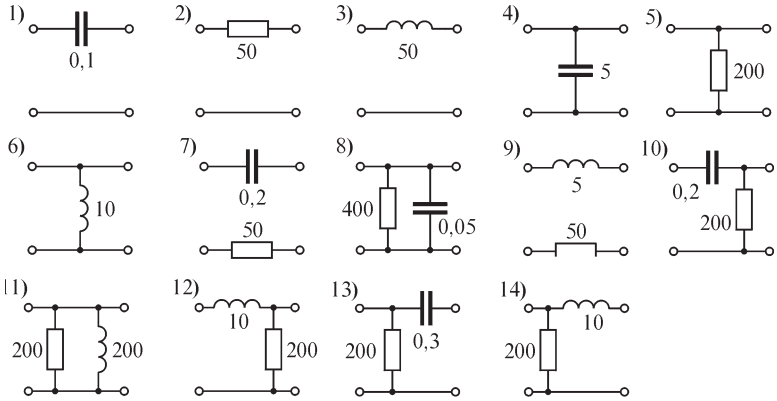


Рис. В18.8

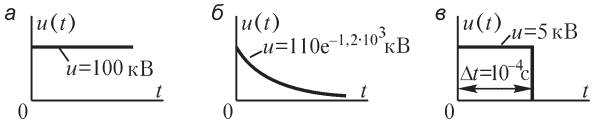


Рис. В18.9

Примечание. На рис. В18.8 значения сопротивлений указаны в омах, емкостей конденсаторов — в микрофарадах, индуктивностей катушек — в миллигенри. Скорость распространения волн в первой линии $v_1 = 3 \cdot 10^5$ км/с, во второй — $2 \cdot 10^5$ км/с.

18.3. Отражение волн от конца длинной линии

ВОПРОСЫ

1. (О) Какую цепь следует присоединить к оконечным зажимам линии, чтобы при приложении к ней постоянного напряжения отраженные волны напряжения

и тока отсутствовали: *а*) в любой момент времени переходного процесса; *б*) только в момент времени, когда волны напряжения и тока достигают конца линии?

2. (О) Линия замкнута на цепь с параллельно соединенными участками *r*, *L*. Можно ли выбрать значение *r* таким, чтобы в конце линии в момент времени, когда волны напряжения и тока достигают конца линии, выполнялось равенство: *а*) $u_\psi = 0$; *б*) $u_\psi = 3u_\varphi$; *в*) $u_\psi = 0{,}5u_\varphi$; *г*) $u_\psi = 1{,}5u_\varphi$; *д*) $i_\psi = -0{,}5i_\varphi$; *е*) $i_\psi = -i_\varphi$?

3. (О) Линия замкнута на цепь с последовательно соединенными участками *rC*. Можно ли подобрать значение *r* таким, чтобы в конце линии в момент достижения волнами напряжения и тока конца линии выполнялось равенство: *а*) $i_\psi = 0$; *б*) $i_\psi = 5i_\varphi$; *в*) $i_\psi = 1{,}5i_\varphi$; *г*) $i_\psi = -0{,}5i_\varphi$; *д*) $u_\psi = -u_\varphi$; *е*) $u_\psi = 0{,}5u_\varphi$?

4. Линия замкнута на цепь, содержащую параллельно соединенные участки *r*, *L*. Как изменяется (уменьшается или увеличивается) с течением времени напряжение на этой *r*, *L* цепи после того, как волны напряжения и тока достигают конца линии?

УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) На входе *1–1* разомкнутой линии без потерь длиной *l*, изображенной на рис. В18.10, *а*, действует импульс напряжения $U_0(t)$ длительностью $T = l/v$ (рис. В18.10, *б*), где *v* — скорость распространения напряжения в линии. Изобразите зависимости: *а*) напряжения $u(t)$ и тока $i(t)$ в точке с координатой $x = 0{,}5l$; *б*) напряжения $u(x)$ и тока $i(x)$ в моменты времени $t = 0{,}5T$; $t = T$; $t = 1{,}5T$; $t = 2T$.

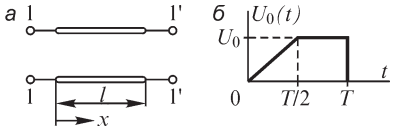


Рис. В18.10

2. Изобразите эквивалентную схему для определения напряжения и тока в конце линии, когда линия замкнута на пассивный двухполюсник.

3. В результате расчета переходного процесса в эквивалентной схеме определены напряжение $u_\psi(t) = -U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ и ток $i_\psi(t) = \frac{U_0}{z} e^{-\frac{t}{\tau}}$ в конце линии (рассматриваем линию без потерь). Запишите выражения для напряжения $u(x)$ и тока $i(x)$ в линии в момент времени, когда отраженные от конца линии волны пройдут расстояние $0{,}5l$, где *l* — длина линии. Напряжение на входе линии — постоянное.

4. (Р) Длинную однородную линию, замкнутую на *а*) катушку индуктивности или *б*) конденсатор, подключают под постоянное напряжение U_0. Запишите выражения для отраженных волн напряжения и тока как функцию координаты *x*, отсчитываемой от конца линии, для момента времени, когда они пройдут расстояние $l_1 < l$ (волновое сопротивление линии равно *z*, скорость распространения волн напряжения и тока равна *v*).

5. (О) Постройте качественные кривые зависимостей напряжения $u(x)$ и тока $i(x)$ в линии без потерь, изображенной на рис. В18.11, для момента времени, когда волны, отразившись от конца линии и далее от ее начала, пройдут половину длины линии (E = const).

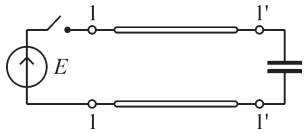


Рис. В18.11

6. (О) Изобразите зависимости напряжения $u_2(t)$ в конце и $u_1(t)$ в середине линии без потерь, показанной на рис. В18.12, при *а*) $r_0 = 0$, $r_1 = 0$; *б*) $r_0 = 0$, $r_1 = \infty$; *в*) $r_0 = z/2$, $r_1 = 0$; *г*) $r_0 = z/2$, $r_1 = \infty$, где z — волновое сопротивление линии.

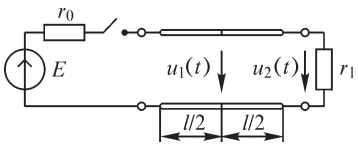


Рис. В18.12

7. Кабельную линию ($z = 50$ Ом, $l = 50$ км) без потерь, замкнутую на одну из цепей, изображенных на рис. В18.8 (варианты *4*, *5*, *6*, *8*, *10*, *11*, *12*), подключают к источнику напряжения, вид которого показан на рис. В18.9. Рассчитайте и постройте зависимости $u(x, t_0)$, $i(x, t_0)$ для момента времени $t_0 = 1{,}5l/v$ после подключения источника (v — скорость распространения волн в линии, равна $2{\cdot}10^5$ км/с).

8. (Р) В условии упр. 5 предыдущего параграфа вторая линия замкнута на одну из цепей, приведенных на рис. В18.8 (варианты *4*, *5*, *6*, *8*, *10*, *11*, *12*). Рассчитайте зависимости: *а*) $u_1(t_0, x)$, $i_1(t_0, x)$ в первой линии для момента времени t_0, когда отраженные от места соединения линий волны пройдут 2/3 ее длины; *б*) $u_2(t_1, x)$, $i_2(t_1, x)$ во второй линии для момента времени t_1, когда отраженные от конца второй линий волны пройдут 1/3 ее длины.

9. Две линии без потерь подключают к конденсатору емкостью C, заряженному до напряжения U_0 (рис. В18.13). Сопротивления нагрузки линий равны их волновым сопротивлениям (z_1 и z_2, соответственно, для первой и второй линий), их длины равны l_1 и l_2. Найдите зависимости напряжения $u_1(t)$ на входе и $u_2(t)$, $u_3(t)$ на выходе линий.

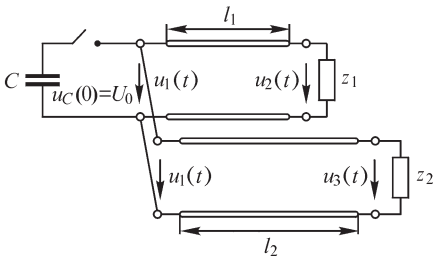


Рис. В18.13

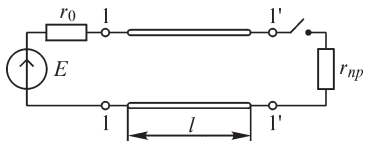


Рис. В18.14

10. (Р) Ко входу линии без потерь длиной l и волновым сопротивлением z подключен источник ЭДС E = const с внутренним сопротивлением r_0. Найдите ток $I_{пр}$ после замыкания ключа (рис. В18.14), принимая, что до замыкания ключа в линии существовал установившийся режим. Величины r_0 и $r_{пр}$ приведены в таблице.

Вариант	*а*	*б*	*в*	*г*	*д*
r_0	$z/2$	z	z	z	$2z$
$r_{пр}$	z	$z/2$	z	$2z$	z

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

Глава девятнадцатая

Элементы нелинейных электрических цепей, их характеристики и параметры

19.1. Особые свойства нелинейных электрических цепей

Нелинейными электрическими цепями являются цепи, параметры которых зависят от тока и напряжения. Как отмечалось в § 3.5, т. I, строго говоря, все электрические цепи нелинейны. Однако во многих практических случаях эта нелинейность столь слабо выражена, что при анализе процессов в цепи ею можно пренебречь. Это дает возможность развить теорию линейных электрических цепей переменного тока, изложенную в предыдущей части, и с успехом применять ее для расчета многих электротехнических устройств.

Однако существуют элементы цепи, нелинейность характеристик которых выражена весьма резко. Цепи, содержащие такие элементы, именуемые нелинейными цепями, обладают рядом новых свойств, которые отсутствуют у линейных цепей. Эти свойства позволяют создать основанные на них автоматические системы управления и регулирования, устройства для преобразования электромагнитной энергии, устройства для производства электрических измерений и передачи информации, быстродействующие вычислительные машины и т. д.

Использование несимметричных нелинейных элементов, обладающих при одном направлении тока малым сопротивлением и при другом направлении тока большим сопротивлением, например кенотронов, ртутных и полупроводниковых вентилей, газотронов, дает возможность осуществить выпрямление переменного тока, т. е. преобразование переменного тока в постоянный ток.

Исключительное значение имеет возможность создания управляемых нелинейных элементов, например трехэлектродных электронных ламп, тиратронов с управляющей сеткой, трехэлектродных полупроводниковых приборов и т. п., имеющих, кроме двух главных электродов, между которыми проходит основной

ток, еще дополнительный, управляющий электрод. Используя такие нелинейные элементы, получаем возможность осуществить преобразование постоянного тока в переменный ток, усиление переменного тока, преобразование частоты переменного тока.

Наличие в цепи нелинейного элемента приводит к тому, что при синусоидальном напряжении на зажимах цепи ток в ней при установившемся режиме изменяется по периодическому, но несинусоидальному закону. И наоборот, при синусоидальном токе в цепи напряжение на ее зажимах оказывается несинусоидальным. Это свойство нелинейных цепей переменного тока позволяет осуществить преобразование частоты переменного тока.

Своеобразные явления, называемые иногда явлениями феррорезонанса, возникают в цепи переменного тока, содержащей конденсаторы и индуктивные катушки с нелинейными характеристиками. На этой основе осуществляются стабилизаторы напряжения или тока.

Весьма важным обстоятельством, как увидим дальше, является возможность неустойчивых состояний в нелинейных цепях, которые при соответствующих условиях приводят к возбуждению незатухающих колебаний в этих цепях. Устойчивость возникающих в цепи периодических процессов, т. е. ограничение амплитуды колебаний, в свою очередь, определяется нелинейностью характеристик элементов, входящих в состав цепи. Важными примерами таких колебательных систем являются ламповые генераторы, а также генераторы релаксационных колебаний.

Теоретическое исследование процессов в нелинейных электрических цепях оказывается много сложнее исследования процессов в линейных цепях. Процессы в нелинейных цепях описываются нелинейными алгебраическими и дифференциальными уравнениями, которые составляются на основе первого и второго законов Кирхгофа.

Для аналитического решения этих уравнений необходимо выразить аналитически характеристики всех нелинейных элементов цепи. При этом большей частью оказывается, что можно выбрать различные аналитические выражения, приближенно изображающие характеристики элементов. От удачного выбора приближенных аналитических выражений характеристик зависит возможность аналитического решения задачи.

Для анализа процессов в нелинейных цепях с успехом могут быть применены графический или графоаналитический методы. Эти методы могут дать более точный результат, так как в них используются действительные характеристики нелинейных элементов, заданные графически в виде кривых. Однако такие методы не дают возможности получить общие связи, позволяющие анализировать изменение характера процессов в цепи при изменении ее параметров.

Большое значение имеют приближенные методы, дающие возможность получить решения для тех или иных конкретных устройств с нелинейными элементами. Для решения нелинейных задач в области теории электрических цепей широко используются современные электронные вычислительные машины.

19.2. Элементы электрической цепи с нелинейными сопротивлениями, их параметры и характеристики

При действии в цепи постоянных ЭДС значение постоянного тока в ней определяется сопротивлениями r и проводимостями g участков цепи. Поэтому, рассматривая нелинейные элементы в цепи постоянного тока, в первую очередь будем интересоваться их сопротивлениями и проводимостями. Наличие индуктивностей и емкостей, как увидим дальше, имеет существенное значение для решения вопроса об устойчивости режима в такой цепи. Но и в цепи переменного тока для многих нелинейных элементов основное значение имеют их сопротивление и проводимость, а учет их индуктивности и емкости в определенном диапазоне частот имеет лишь второстепенное значение. В связи с этим в настоящем параграфе рассмотрим такие нелинейные элементы и их характеристики, у которых основными параметрами являются сопротивление и проводимость.

Будем называть зависимость напряжения на зажимах элемента с сопротивлением от тока в нем $u = f(i)$, а также обратную зависимость $i = \varphi(u)$ характеристиками элемента. Такие характеристики часто называют вольт-амперными характеристиками (ВАХ). Одно из существенных своеобразий нелинейных цепей заключается в том, что вольт-амперные характеристики элементов могут неоднозначно отображать взаимные связи между токами и напряжениями. Так, например, ВАХ, которая имеет аналитическое выражение в виде $u = ai^2$, для любого заданного тока в элементе однозначно определяет напряжение на зажимах элемента. В то же время из выражения $i = \pm\sqrt{u/a}$ следует, что для любого положительного напряжения ток имеет два значения. Более того, для $u < 0$ физически приемлемое решение в виде вещественных значений тока вообще отсутствует. Заметим, что нелинейный элемент с такой ВАХ не может быть пассивным. Действительно, при $i < 0$ имеем $p = ui = ai^3 < 0$, и поэтому такой элемент для токов $i < 0$ является источником энергии.

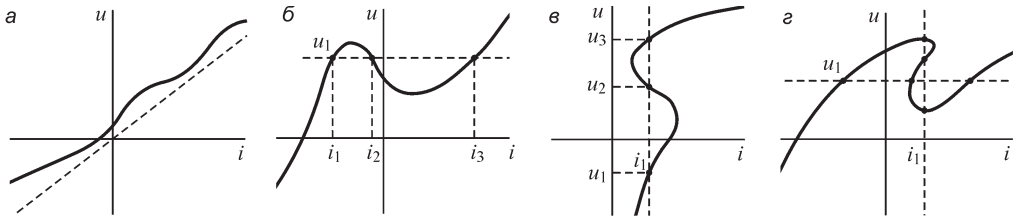


Рис. 19.1

С точки зрения однозначного и неоднозначного взаимного отображения токов и напряжений ВАХ можно разделить на следующие виды:

1. Монотонная ВАХ, для которой заданные в интервале $-\infty \le i \le \infty$ токи в каждой точке характеристики однозначно определяют напряжения и в этом же интервале напряжения однозначно определяют токи (рис. 19.1, *а*). Частным случаем монотонной ВАХ является характеристика линейного элемента (на рис. 19.1, *а* штриховая линия).

2. Управляемая током ВАХ, для которой заданные в интервале $-\infty \le i \le \infty$ токи в каждой точке характеристики однозначно определяют напряжения, но при заданном напряжении токи определяются неоднозначно (рис. 19.1, *б*). Обозначим такие ВАХ $u = f(i)$ или $u = R(i)$.

3. Управляемая напряжением ВАХ, для которой заданные в интервале $-\infty \le u \le \infty$ напряжения в каждой точке характеристики однозначно определяют токи, но при заданном токе напряжения определяются неоднозначно (рис. 19.1, *в*). Обозначим такие ВАХ $i = \varphi(u)$ или $i = G(u)$.

4. Неуправляемая ВАХ, для которой характерна многозначность и тока, и напряжения (рис. 19.1, *г*).

Вольтамперные характеристики могут быть заданы в виде графиков, таблиц и аналитических выражений. Наиболее полное описание ВАХ можно осуществить в виде аналитических зависимостей, так как и графическая и табличная формы задания ВАХ недостаточно точны и имеют ограниченный диапазон изменения u и i. Привлекательность графического и табличного представлений заключается в том, что результаты экспериментальных исследований вольт-амперных характеристик наиболее просто оформить в виде графиков и таблиц.

Статическими называют характеристики, в которых каждая точка дает значения постоянного напряжения при соответствующем значении постоянного тока. Из них определяются статическое сопротивление и статическая проводимость нелинейного элемента:

$$r_{\text{ст}} = \frac{u}{i} = f_1(i) \quad \text{и} \quad g_{\text{ст}} = \frac{i}{u} = F_1(i).$$

Динамическими называют характеристики, дающие связь между напряжением и током при достаточно быстрых изменениях тока. Они могут отличаться от статических характеристик, например, вследствие тепловой инерции и других причин. Из них определяются динамические сопротивление и проводимость нелинейного элемента:

$$r_{\text{д}} = \lim_{\Delta i \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{du}{di} = f_2(i) \quad \text{и} \quad g_{\text{д}} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta i}{\Delta u} = \frac{di}{du} = F_2(i).$$

При достаточно медленном изменении напряжения и тока динамические характеристики совпадают со статическими. Определенные из статических характеристик сопротивления и проводимости в виде производных du/di или di/du называют дифференциальными. Обозначим их через r_d и g_d.

Для общности всегда будем говорить о динамических параметрах $r_{\text{д}}$ и $g_{\text{д}}$, имея в виду, что при весьма медленных изменениях тока они совпадают с дифференциальными параметрами, т. е. $r_{\text{д}} = r_d$ и $g_{\text{д}} = g_d$.

Имеют место очевидные соотношения

$$r_{\text{ст}} g_{\text{ст}} = 1 \quad \text{и} \quad r_{\text{д}} g_{\text{д}} = 1,$$

но для нелинейных элементов, за исключением отдельных точек характеристик, $r_{\text{ст}} \ne r_{\text{д}}$ и $g_{\text{ст}} \ne g_{\text{д}}$.

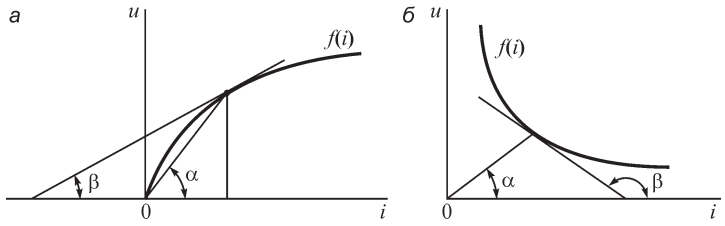


Рис. 19.2

Статическое сопротивление пропорционально тангенсу угла наклона луча, проведенного из начала координат в данную точку характеристики (рис. 19.2):

$$r_{ст} = k\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Динамическое сопротивление пропорционально тангенсу угла наклона касательной в данной точке характеристики:

$$r_{д} = k\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

При этом $k = v/a$, где v и a — масштабы напряжения и тока. Соответственно,

$$g_{ст} = \frac{1}{k}\mathrm{ctg}\,\alpha; \quad g_{д} = \frac{1}{k}\mathrm{ctg}\,\beta.$$

Все эти параметры изменяются при переходе от одной точки характеристики к другой. Для так называемых пассивных элементов, т. е. не содержащих источников энергии, всегда $r_{ст} > 0$ и $g_{ст} > 0$, но $r_{д}$ и $g_{д}$ положительны, только когда данная точка характеристики лежит на ее *восходящей* части (рис. 19.2, *а*), и отрицательны, если данная точка лежит на *падающей* части характеристики (рис. 19.2, *б*).

19.3. Симметричные и несимметричные характеристики элементов с нелинейными сопротивлениями

По виду характеристики $u \quad f(i)$ различают симметричные и несимметричные элементы. У *симметричных* элементов характеристика изображается симметричной относительно осей кривой, т. е. сопротивление таких элементов зависит от тока одинаково для обоих направлений тока в элементе. *Несимметричные* элементы обладают несимметричной характеристикой, их сопротивление по-разному зависит от тока при разных направлениях тока в элементе.

К симметричным элементам относятся, например, лампы накаливания и терморезисторы, тиритовые элементы, бареттеры, лампы с тлеющим разрядом, электрическая дуга между одинаковыми электродами.

Лампы накаливания работают при высокой температуре, и вследствие зависимости сопротивления нити накала от температуры сопротивление лампы при номинальном токе существенно отличается от ее сопротивления в холодном состоянии, т. е. при токах, которые много меньше номинального. На рис. 19.3 представлены характеристика лампы с вольфрамовой нитью (кривая *1*), температурный коэффициент сопротивления которой положителен, и характеристика лампы с угольной нитью (кривая *2*), имеющей отрицательный температурный коэффициент сопротивления.

С нелинейностью осветительной нагрузки электрических сетей приходится особенно считаться при исследовании таких вопросов, как влияние характеристик приемника на нагрузку генераторов при аварийных процессах, сопровождаемых обычно резкими колебаниями напряжения на приемниках.

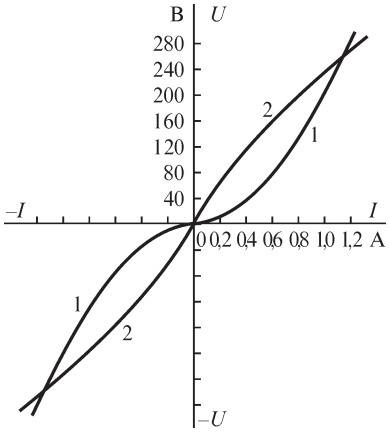


Рис. 19.3

На принципе зависимости сопротивления от температуры специально создаются так называемые *терморезисторы*, имеющие обычно характеристику типа *2* на рис. 19.3. Они используются в приборах и аппаратах для компенсации изменения их сопротивления с изменением температуры, для измерения и для автоматического регулирования температуры, в реле с выдержкой времени и т. д. Выполняют также терморезисторы из полупроводникового материала, именуемые термисторами, обладающие характеристикой, представленной на рис. 19.4, значительная часть которой имеет падающий характер. Одна из конструкций термистора представляет собой шарик из смеси окислов металлов (окиси никеля, магния и др.) с добавкой тонкоизмельченного медного порошка для увеличения проводимости. Через этот шарик соединены две проволочки из иридиевой платины, служащие для подвода тока. Все это устройство заключено в защитную стеклянную оболочку. Такие термисторы применяются для электрических измерений в технике высокой частоты.

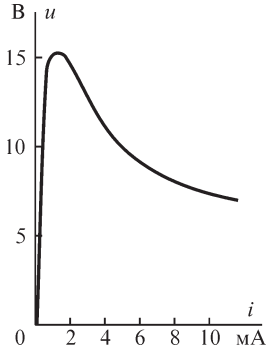


Рис. 19.4

В технике высокого напряжения находят применение *тиритовые нелинейные элементы*, выполненные из керамического материала — тирита. Связь между током и напряжением для них можно выразить в виде $|i| = A|u|^n$, где $n \approx 3{,}5$, причем характеристика является симметричной. Следовательно, статическая и динамическая проводимости их имеют выражения

$$g_{\text{ст}} = \frac{i}{u} = \frac{|i|}{|u|} = A|u|^{n-1} \approx A|u|^{2,5};$$

$$g_{\text{д}} = \frac{di}{du} = \frac{d|i|}{d|u|} = An|u|^{n-1} \approx An|u|^{2,5},$$

т. е. проводимость возрастает с увеличением напряжения. Такая зависимость проводимости тиритовых элементов от напряжения дает возможность использовать их для защиты установок высокого напряжения — электрических станции, подстанций, трансформаторов и т. д. — от перенапряжений. Осуществляют так называемые тиритовые разрядники, представляющие собой столб *T* из тиритовых дисков, включаемые через искровой промежуток *a* параллельно с защищае-

мой установкой N обычно между проводом линии переменного тока высокого напряжения и землей (рис. 19.5).

При номинальном напряжении искровой промежуток не пробит и через разрядник ток не проходит. При повышении напряжения в линии выше номинального искровой промежуток пробивается и через тиритовый столб проходит большой ток, так как с повышением напряжения сопротивление разрядника резко падает. В итоге линия разряжается через тиритовый разрядник и напряжение на ней падает. При уменьшении напряжения сопротивление разрядника возрастает и ток через него резко падает. Резкое уменьшение тока приводит к прекращению газового разряда в искровом промежутке, а следовательно, к полному прекращению тока в цепи разрядника. На рис. 19.6 приведена примерная характеристика тиритовых дисков, используемых для разрядников. При увеличении напряжения в два раза по сравнению с номинальным ток увеличивается примерно в 10 раз.

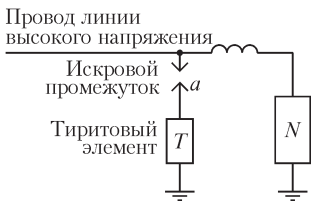


Рис. 19.5

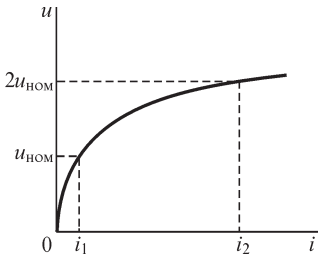


Рис. 19.6

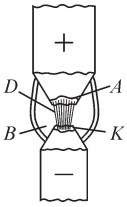


Рис. 19.7

Весьма большое практическое применение имеет *электрическая дуга*, являющаяся нелинейным элементом электрической цепи.

Явление, называемое электрической дугой, открыто профессором В. В. Петровым в 1802 г. На рис. 19.7 схематически изображена электрическая дуга между угольными электродами, горящая в воздухе при атмосферном давлении и питаемая от источника ЭДС. Активная часть K катода, излучающая электроны, имеет температуру 2700–3150 °С. Часть A анода, бомбардируемая электронами и имеющая обычно вогнутую форму, называется к р а т е р о м электрической дуги. Температура кратера достигает 3500–3900 °С. Между активной частью катода и кратером располагается сама дуга D, температура которой достигает 4800 °С. Газы и пары в занятом ею пространстве находятся в ионизированном состоянии. Таким образом, электрические заряды переносятся в дуге как электронами, так и ионами, но в основном ток определяется потоком электронов. Собственно дуга окружена ореолом B — оболочкой, в которой происходит сгорание паров и частиц угля, а также образование продуктов горения воздуха, т. е. окислов азота.

Академик В. Ф. Миткевич в 1902–1905 гг. произвел ряд исследований электрической дуги, в которых он установил общие условия горения дуги, а также показал, что основными носителями тока в дуге являются электроны. Из опытов, поставленных В. Ф. Миткевичем, следует, что основным условием образования и существования электрической дуги является эмиссия электронов из катода. При термоэлектронной эмиссии (случай, исследованный В. Ф. Миткеви-

чем) необходима как обязательное условие горения дуги высокая температура катода. Высокая температура анода имеет второстепенное значение. Во время дальнейших исследований установлено, что в том случае, когда созданы условия для достаточно мощной автоэлектронной эмиссии из катода, возможно существование дуги и при холодном катоде. Таким образом, основным условием возникновения электрической дуги является достаточно мощная эмиссия электронов из катода.

Электрическая дуга находит применение в ряде областей электротехники. Изобретение в 1876 г. П. Н. Яблочковым его знаменитой электрической свечи положило начало широкому использованию электричества для освещения. В настоящее время как источник света электрическая дуга используется в прожекторах и проекционных аппаратах. В металлургии мощные дуги применяются в так называемых дуговых электрических печах. Весьма распространен метод электросварки электрической дугой, в своей основе данный Н. Г. Славяновым и Н. Н. Бенардосом. В химической промышленности дуга используется для фиксации атмосферного азота. Широко применяется электрическая дуга в приборах, служащих для выпрямления переменного тока.

Электрическая дуга имеет ярко выраженную нелинейную характеристику. С увеличением тока i падение напряжения u в дуге уменьшается, т. е. дуга имеет падающую характеристику (рис. 19.8). При одинаковых электродах характеристика дуги симметрична (рис. 19.9).

Для некоторых элементов при переменном тока зависимость $u = f(i)$ при увеличении тока не совпадает с зависимостью $u = f(i)$ при уменьшении тока. Так, на рис. 19.10 изображена характеристика электрической дуги между одинаковыми электродами при периодическом переменном токе. Напряжение u между электродами при возрастающем токе больше напряжения при убывающем токе, так как при увеличении тока процесс идет от менее ионизированного состояния и от меньших температур, чем при его убывании. Характеристики таких элементов зависят от частоты переменного тока.

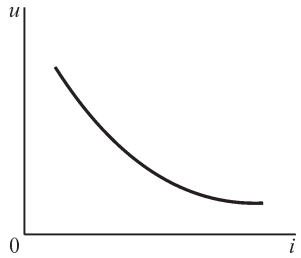


Рис. 19.8

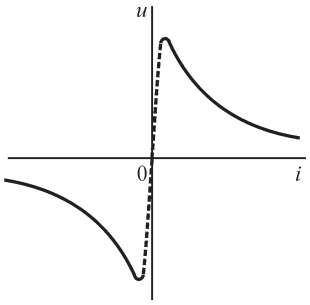


Рис. 19.9

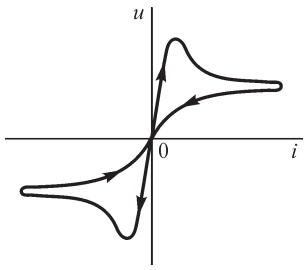


Рис. 19.10

К несимметричным нелинейным элементам относятся, например, электрическая дуга при неоднородных электродах, лампа с тлеющим разрядом при неодинаковых по форме электродах, ртутный вентиль, кенотрон, газотрон, полупроводниковый вентиль.

То обстоятельство, что основным носителем тока в электрической дуге является мощный поток электронов — частиц с отрицательным зарядом — и что для существования дуги необходима мощная эмиссия электронов из катода — отрицательного электрода, — приводит к заключению, что при разнородных электродах характеристика дуги должна быть несимметричной. Наиболее резко несимметрия проявляется, если один из электродов поставлен в условия, при которых из него возникает мощная эмиссия электронов, а другой электрод находится в условиях, при которых сколько-нибудь заметная эмиссия электронов из него невозможна. Например, один электрод нагрет до высокой температуры, достаточной для мощной термоэлектронной эмиссии, а другой искусственно поддерживается холодным, или у одного электрода могут образовываться высокие напряженности поля, достаточные для мощной автоэлектронной эмиссии, а у поверхности другого электрода такие напряженности поля не могут возникать. При таких условиях устройство проводит ток только в одном направлении и может служить для выпрямления переменного тока.

Весьма важным представителем таких устройств является *ртутный вентиль*, представляющий собой сосуд, из которого по возможности тщательно удален воздух и который заполнен парами ртути и имеет катодом жидкую ртуть, а в качестве анодов — железные или графитовые цилиндры. Электрическая дуга горит в парах ртути. Эмиссия электронов происходит из так называемого катодного пятна на поверхности жидкой ртути. Таким образом, ток при принятом его положительном направлении может проходить через ртутный вентиль только от анода к катоду. Катодное пятно обычно поддерживается от постороннего источника энергии с помощью дуги возбуждения, горящей между катодом и вспомогательными анодами, расположенными вблизи катода. Характеристика ртутного вентиля, т. е. зависимость напряжения u между главным анодом и катодом от тока i при наличии дуги возбуждения, показана на рис. 19.11.

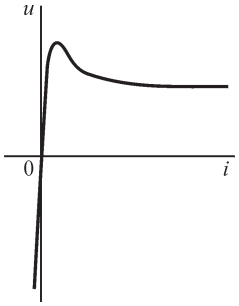


Рис. 19.11

При горении дуги падение напряжения на вентиле невелико (15–30 В) и мало зависит от тока. Ток в ртутной дуге осуществляется не только движением электронов от катода к аноду, но и движением положительных ионов ртути в направлении от анода к катоду. Поэтому ртутные вентили принадлежат к *ионным приборам*. При изменении знака напряжения на вентиле обратный ток через вентиль ничтожен. Ртутные вентили изготовляются как сравнительно небольшой мощности — в запаянных стеклянных сосудах, так и очень большой мощности — в железных сосудах, откачиваемых насосами. Возможность построения ртутных вентилей на очень большие обратные напряжения, порядка сотен тысяч вольт, и одновременно на большие токи, порядка нескольких сотен ампер, имеет исключительное значение для создания преобразовательных устройств переменного тока в постоянный и обратно — на концах линий передачи энергии постоянного тока высокого напряжения, о чем будет речь в дальнейшем.

Несимметричным нелинейным элементом является также *кенотрон* — пустотная электронная лампа с двумя электродами. Катод кенотрона имеет высо-

кую температуру, достаточную для эмиссии электронов. С этой целью он накаливается от специального источника тока. Температура анода поддерживается довольно низкой, чтобы эмиссия электронов с его поверхности не происходила. В результате электронный ток может проходить в кенотроне только от катода к аноду, т. е. положительный ток может протекать только от анода к катоду. Кенотроны используются для выпрямления тока. Так как в кенотронах ток осуществляется движением только электронов, то кенотроны принадлежат к *электронным приборам*.

Характеристика кенотрона, т. е. зависимость тока i в нем от напряжения u между анодом и катодом, показана на рис. 19.12. При достижении напряжением u значения, при котором все электроны, излучаемые катодом, переносятся к аноду, ток i получает предельное значение i_s, называемое т о к о м н а с ы щ е н и я. Значение тока насыщения можно увеличить, лишь повышая температуру катода. То обстоятельство, что ток не достигает тока насыщения при малых напряжениях, связано с наличием в пространстве между катодом и анодом отрицательного объемного заряда электронов, находящихся в данный момент в этом пространстве и движущихся от катода к аноду. Этот отрицательный объемный заряд создает у катода электрическое поле, противоположное полю положительно заряженного анода, что и приводит к ограничению тока при данном напряжении между анодом и катодом. В начальной части характеристики зависимость между i и u может быть представлена, как это можно вывести теоретически, в виде $i = ku^{3/2}$. Кенотроны легко выполнить на высокое напряжение, так как в них создан высокий вакуум. Существенным недостатком является значительное падение напряжения в них, связанное с появлением отмеченного выше отрицательного объемного заряда. Ионные приборы в этом отношении выгодно отличаются от кенотронов — падение напряжения в них невелико, так как положительный заряд ионов в значительной мере компенсирует отрицательный заряд электронов.

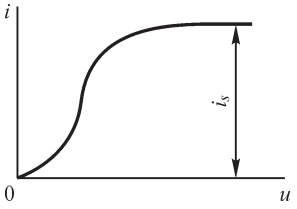


Рис. 19.12

К ионным приборам, используемым для выпрямления переменного тока, относятся, кроме упомянутых выше ртутных вентилей, также газотроны, представляющие собой, как и кенотроны, лампы с накаливаемым от постороннего источника твердым катодом, но наполненные или одним из благородных газов, или парами ртути. В последнем случае в баллон вводится капля жидкой ртути, над поверхностью которой и образуются насыщенные пары ртути. Вид характеристики газотрона аналогичен виду характеристики ртутного вентиля (см. рис. 19.11).

Полупроводниковые диоды, обладающие также несимметричной характеристикой, будут рассмотрены отдельно (см. § 19.6).

19.4. Инерционные и безынерционные элементы с нелинейным сопротивлением

Характерной особенностью некоторых нелинейных элементов при переменном токе является значительная их инерционность, которая приводит к невозможности быстрого изменения их сопротивления. Такими *инерционными* нелинейны-

ми элементами являются, например, лампы накаливания, обладающие значительной тепловой инерцией. При изменении тока в лампе с достаточно большой частотой, например с промышленной частотой $f = 50$ Гц, температура нити лампы практически не изменяется в течение периода, а соответственно, и сопротивление лампы остается практически неизменным в течение периода. Поэтому лампа при неизменном действующем периодическом переменном токе по отношению к мгновенному току оказывается линейным элементом. Форма кривой тока в лампе повторяет форму кривой напряжения на ней; в частности, при синусоидальном напряжении и ток в лампе оказывается синусоидальным. Однако при изменении действующего переменного тока I в лампе температура нити накала и ее сопротивление изменяются и, соответственно, характеристика лампы $U = F(I)$, связывающая действующие ток и напряжение, оказывается нелинейной (см. рис. 19.3).

Наряду с инерционными элементами мы располагаем нелинейными элементами, которые при не слишком высоких частотах могут рассматриваться как *безынерционные*. К ним относятся прежде всего электронные лампы, так как инерция электронов, образующих в них ток, весьма мала. Такие элементы являются нелинейными как в отношении действующих, так и в отношении мгновенных тока и напряжения. При периодических процессах кривые тока и напряжения в этих элементах имеют различные формы; например, при синусоидальном напряжении ток оказывается несинусоидальным и, наоборот, при синусоидальном токе напряжение несинусоидально. По этой причине нелинейная характеристика $U = F(I)$, связывающая действующие ток и напряжение, в таких элементах зависит от формы кривых мгновенных тока и напряжения.

Рассматривая связь между мгновенными переменным током и переменным напряжением в таких элементах, естественно пользоваться *динамическими* сопротивлением и проводимостью:

$$r_{\text{д}} = \frac{du}{di} \quad \text{и} \quad g_{\text{д}} = \frac{di}{du},$$

причем $r_{\text{д}}$ и $g_{\text{д}}$ являются функциями тока i и, соответственно, напряжения u.

Рассматривая же связь между действующими током и напряжением, можно использовать значения *эквивалентных* активного сопротивления и активной проводимости элемента, равные

$$r_{\text{э}} = \frac{U}{I} \quad \text{и} \quad g_{\text{э}} = \frac{I}{U},$$

поскольку в рассматриваемых элементах пренебрегаем их индуктивностью и емкостью.

19.5. Характеристики элементов с нелинейным сопротивлением, позволяющие осуществить стабилизацию тока или напряжения

На рис. 19.13 изображена характеристика *бареттера*, представляющего собой запаянный и заполненный водородом стеклянный баллон, внутри которого помещена железная нить, присоединенная к выводам из баллона. Изменение тем-

пературы нити при изменении тока в ней, а также соответствующие условия ее охлаждения приводят к нелинейной зависимости между током и напряжением, показанной на рисунке. В пределах изменения напряжения на зажимах бареттера от u' до u'' ток почти не изменяется. Поэтому бареттеры используются для *стабилизации тока*. С этой целью их включают последовательно с приемником, в котором необходимо стабилизировать ток. Если подобрать нормальный режим работы цепи так, чтобы разность напряжений питающей сети и приемника, приходящаяся на зажимы бареттера, равнялась $u_{ном}$ (рис. 19.13), то при колебаниях напряжения сети в пределах $\pm \Delta u$ эти колебания практически полностью приходятся на бареттер, так как ток остается неизменным и, соответственно, неизменным остается напряжение на зажимах приемника при постоянстве его сопротивления. Ток в цепи остается постоянным также и при изменениях сопротивления приемника, хотя при этом напряжение на приемнике изменяется. Для стабилизации тока важно только, чтобы колебания разности напряжений сети и приемника не выходили за пределы u' и u'' (рис. 19.13).

В качестве нелинейных элементов широко используются *лампы с тлеющим разрядом* (неоновые лампы, стабиловольты и т. д.). Эти лампы представляют собой заполненные инертным газом запаянные баллоны, куда введены два электрода, между которыми имеется газовый промежуток. На рис. 19.14 дана характеристика такой лампы. Если постепенно увеличивать напряжение на негорящей лампе, то ток, оставаясь ничтожным по значению, немного возрастает. При достижении напряжения u_0 между электродами возникает тлеющий разряд — лампа загорается, т. е. газ начинает светиться. На одном участке характеристика лампы является падающей вследствие роста степени ионизации газа при увеличении тока и соответственного увеличения проводимости газового промежутка. В пределах изменения тока от i' и i'' напряжение на лампе практически остается неизменным, что используется для *стабилизации напряжения* с помощью так называемых стабиловольтов.

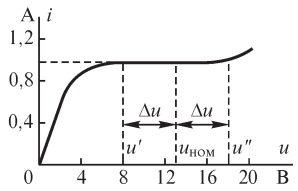


Рис. 19.13

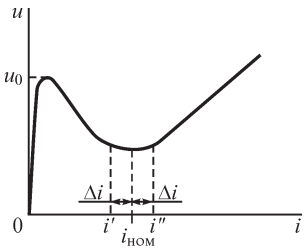


Рис. 19.14

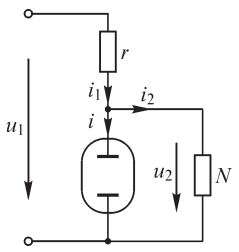


Рис. 19.15

Стабиловольт представляет собой лампу с тлеющим разрядом с последовательно включенным с ней линейным резистором r (рис. 19.15). Приемник N, на зажимах которого необходимо стабилизировать напряжение, приключается параллельно лампе. Нормальный режим всей цепи подбирают так, чтобы ток в лампе равнялся $i_{ном}$ (рис. 19.14). При изменении напряжения u_1 сети изменяется ток $i_1 = i + i_2$ в резисторе r, но если эти колебания тока не выходят за пределы $\pm\Delta i$

(рис. 19.14), то они практически полностью приходятся на ток i в лампе. Напряжение же u_2 на лампе и на приемнике и ток i_2 в приемнике практически не изменяются. Напряжение u_2 остается стабильным и при изменении сопротивления приемника. При этом изменение тока i_2 компенсируется изменением тока i в лампе. Для стабилизации напряжения u_2 необходимо, чтобы при колебаниях напряжения сети и сопротивления приемника ток в лампе оставался в пределах i' и i'' (рис. 19.14).

19.6. Полупроводниковые диоды как нелинейные элементы электрической цепи

Полупроводниковые диоды, обладающие несимметричной нелинейной характеристикой, получили исключительно широкое распространение. Уже в течение длительного времени для выпрямления переменного тока используются медно-закисные и селеновые полупроводниковые вентили.

Особый интерес представляют весьма широко применяемые германиевые и кремниевые полупроводниковые вентили. Рассмотрим несколько подробнее процессы в этих вентилях, так как это понадобится в последующем для уяснения принципа действия германиевых триодов.

Германий и кремний относятся к четвертой группе элементов — атомы их имеют во внешней электронной оболочке по четыре валентных электрона. В кристалле германия атомы расположены так, что каждый атом находится между четырьмя соседними атомами, отстоящими по отношению к нему на равных расстояниях и под одинаковыми углами. Четыре валентных электрона каждого атома входят в так называемые ковалентные связи с четырьмя соседними атомами. Таким образом, в каждой ковалентной связи участвуют два электрона соседних атомов. На рис. 19.16 структура кристаллической решетки германия условно представлена на плоскости. Ядро атома с остальными электронами представляет собой инертный в отношении химических свойств и в отношении электропроводности остаток с положительным зарядом, по абсолютному значению равным четырем зарядам электрона.

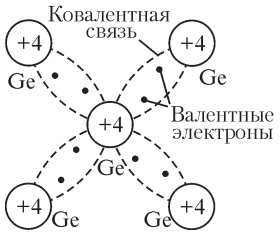


Рис. 19.16.

Энергетический зазор между валентной зоной и зоной проводимости на так называемой энергетической диаграмме у полупроводников имеет порядок 1 эВ (у германия 0,72 эВ, у кремния 1,11 эВ), т. е. значительно меньше, чем у диэлектриков. Поэтому при комнатной температуре у полупроводников большее число электронов, чем у диэлектриков, способно преодолеть этот зазор и перейти в зону проводимости. При этом в валентной зоне образуются не занятые электронами места, т. е. положительные дырки. Этот процесс схематически показан на рис. 19.17, *а* на модели решетки кристалла и на рис. 19.17, *б* на энергетической диаграмме. Электроны в зоне проводимости и дырки в валентной зоне определяют электропроводность полупроводника. Удельное сопротивление чистого германия при $t = 20\,°C$ составляет $\rho = 0{,}6$ Ом·м, в то время как такой диэлектрик, как слюда, имеет $\rho \approx 9 \cdot 10^{13}$ Ом·м. С возрастанием температуры увеличивается число

электронов, способных преодолеть энергетический зазор, и вследствие этого удельное сопротивление чистого германия убывает с ростом температуры, т. е. чистый германий имеет отрицательный температурный коэффициент сопротивления.

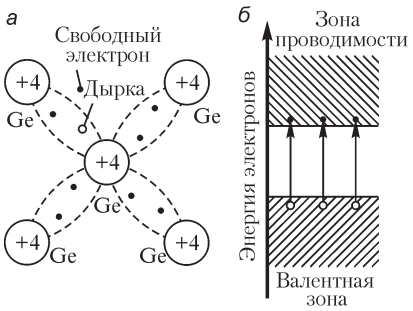


Рис. 19.17.

Чрезвычайно важно, что имеется возможность влиять на значение и характер проводимости германия путем внесения в него ничтожно малых количеств примесей элементов третьей (бор, индий) или пятой (мышьяк, сурьма) групп.

Предположим, что в кристалл германия добавлена в небольшом количестве примесь элемента пятой группы, атомы которого имеют пять валентных электронов. Атомы примеси замещают в решетке кристалла атомы германия. При этом четыре валентных электрона примесного атома входят в ковалентные связи с четырьмя соседними атомами германия, а пятый валентный электрон примесного атома, оставшийся вне этих связей, оказывается слабо связанным со своим атомом. Он легко освобождается под влиянием, например, теплового движения, становясь свободным электроном проводимости.

Примеси этого типа называют «донорами», или «источниками» электронов. Полупроводники с такими примесями, характеризующиеся преобладанием свободных электронов, называют полупроводниками типа *n*. На рис. 19.18, *а* схематически изображено на модели кристаллической решетки германия образование свободного электрона вследствие замещения одного атома германия примесным атомом сурьмы. На энергетической диаграмме (рис. 19.18, *б*) уровни доноров располагаются в энергетическом зазоре вблизи зоны проводимости в соответствии с тем, что требуется незначительная энергия для освобождения их избыточного электрона и перевода его в зону проводимости. После ухода этого электрона атом примеси будет представлять собой закрепленный в решетке положительный ион. Ничтожное добавление такой примеси существенно увеличивает электрическую проводимость германия. Так, добавление одного донорного атома на 10^8 атомов германия снижает его удельное сопротивление при комнатной температуре до $\rho = 0{,}04$ Ом·м.

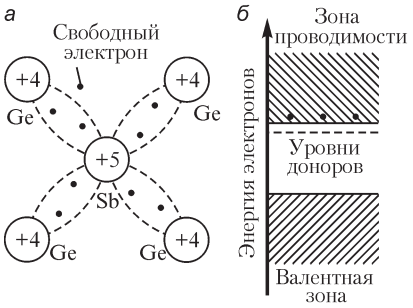


Рис. 19.18.

Предположим теперь, что в германий добавлена в небольшом количестве примесь элемента третьей группы, атомы которого имеют три валентных электрона. Эти атомы также замещают в решетке кристалла атомы германия. При этом три валентных электрона примесного атома входят в ковалентные связи с тремя соседними атомами германия, но в ковалентной связи с четвертым атомом германия образуется не занятое электроном место, т. е. дырка. В это незанятое

место сравнительно легко может перейти электрон из соседней ковалентной связи, оставив в ней дырку. В эту вновь образовавшуюся дырку может перейти электрон из следующей ковалентной связи и т. д. Все происходит так, как будто перемещается положительно заряженная частица, эквивалентная дырке.

Примеси этого типа называют «акцепторами», или «приемниками» электронов. Полупроводники с такими примесями, характеризующиеся дырочной проводимостью, называют полупроводниками типа *p*. На рис. 19.19, *а* на модели кристаллической решетки схематически изображено образование дырки в случае замещения одного атома германия примесным атомом индия. На энергетической диаграмме (рис. 19.19, *б*) уровни акцепторов располагаются в энергетическом зазоре вблизи валентной зоны в соответствии с тем, что требуется незначительная энергия для перевода на этот уровень электрона из валентной зоны с образованием дырки в последней. После ухода дырки атом примеси будет представлять собой закрепленный в решетке отрицательный ион.

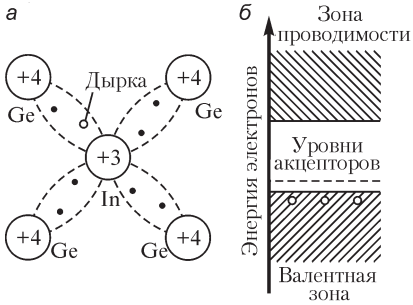


Рис. 19.19

Возможность создания полупроводников с различным характером проводимости позволяет создать устройства для выпрямления переменного тока.

Предположим, что в образце германия слева от плоскости *1–1′* (рис. 19.20) введены акцепторные примеси, а справа от нее — донорные примеси, т. е. слева имеем германий типа *p*, а справа — германий типа *n*. Говорят, что около плоскости *1–1′* имеется *p–n*-переход. Дырки в германии типа *p* и электроны в германии типа *n* являются основными носителями тока. Дырки будут диффундировать слева направо из области *p* в область *n*. Свободные электроны будут диффундировать в противоположном направлении. В итоге слева от плоскости *1–1′* образуется избыточный отрицательный заряд и справа — избыточный положительный заряд. Вследствие рекомбинации электронов и дырок в близлежащих к плоскости *1–1′* областях не будет ни дырок, ни свободных электронов и избыточный заряд, по существу, будет создаваться слева отрицательными ионами акцептора, а справа — положительными ионами донора. В месте *p–n*-перехода возникает электрическое поле, направленное справа налево и препятствующее дальнейшей диффузии дырок и электронов. Между областью *p* и областью *n* образуется разность электрических потенциалов, т. е. возникает так называемый потенциальный барьер. Распределение потенциала в районе *p–n*-перехода показано внизу на рис. 19.20 и на рис. 19.21, *а*, причем здесь и далее за нуль потенциала условно принят потенциал в области германия типа *p* непосредственно около *p–n*-перехода, где уже нет объемного заряда.

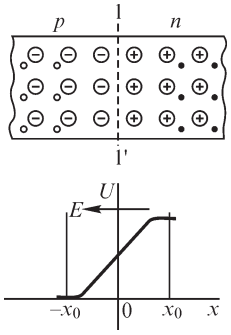


Рис. 19.20

Приключим такой образец к источнику постоянного напряжения так, как показано на рис. 19.21, *б*. При таком включении напряжение источника снизит зна-

чение потенциального барьера и основные носители тока (дырки слева и электроны справа) получат возможность проходить через p–n-переход. В цепи возникает так называемый прямой ток, который будет возрастать с увеличением напряжения источника (рис. 19.22, *а*). Если к образцу приложить от источника напряжение противоположного по сравнению с предыдущим случаем знака (рис. 19.21, *в*), то потенциальный барьер возрастет на значение этого напряжения и основные носители тока не смогут проходить через плоскость раздела *1–1′*. Однако ток все же не будет полностью отсутствовать.

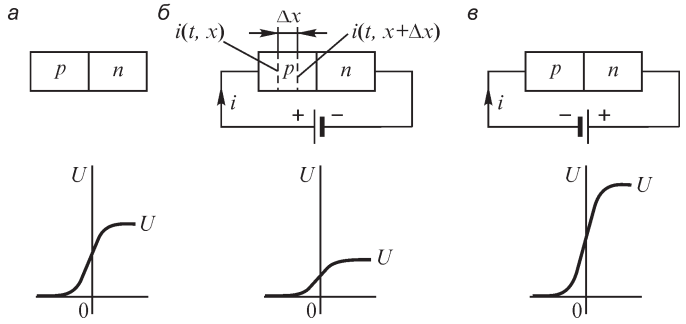


Рис. 19.21

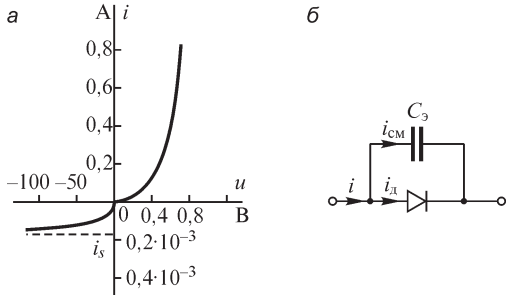


Рис. 19.22

Кроме основных носителей тока, вызванных наличием примесей, и в p- и в n-областях имеются в небольшом количестве так называемые неосновные носители тока, знаки зарядов которых противоположны знакам зарядов основных носителей, а именно в области p присутствуют также в небольшом количестве свободные электроны, а в области n — дырки. Они появляются в обеих областях вследствие образования электронно-дырочных пар в результате воздействия теплового движения согласно схеме, показанной на рис. 19.17. Очевидно, эти неосновные носители тока свободно переходят через потенциальный барьер, так как электрическое поле здесь не препятствует, а способствует их прохождению. Они образуют так называемый обратный ток. С увеличением обратного напряжения этот обратный ток быстро достигает своего предельного значения, определяемого числом электронно-дырочных пар, образующихся в образце в единицу времени. Обратный ток во много раз меньше прямого. На рис. 19.22, *а* приведена

характеристика германиевого вентиля. Чтобы можно было на одном рисунке изобразить и прямой, и обратный токи, они даны в различных масштабах.

Математическое описание этих процессов, иными словами, математическая модель полупроводникового диода, составлено для случая, когда граница p–n-перехода плоская и распределение концентраций дырок (p) и электронов (n) зависит только от одной координаты (x), направленной перпендикулярно к границе раздела *1–1′* (рис. 19.20). Для случая, когда устанавливается динамическое равновесие и плотности зарядов не меняются, имеем две составляющие плотности тока: дрейфовую составляющую, которая возникает за счет движения зарядов под воздействием электрического поля и равна (для дырок) $q_0 \mu_p pE$, и диффузную составляющую, которая возникает за счет наличия разности концентраций и равна (для дырок) $q_0 D_p \dfrac{dp}{dx}$. Здесь $q_0 = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд электрона; μ_p — подвижность дырок, м^2/(В·с); $D_p = \mu_p \dfrac{kT}{q_0}$ — коэффициент диффузии, м^2/с; $k = 1{,}381 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана; T — температура по шкале Кельвина; p — концентрация дырок. Для температуры приблизительно 23 °С или $T \approx 300$ К термоэлектрический потенциал равен $kT/q_0 \approx 0{,}02586$ В или $q_0/kT \approx 38{,}67$ В$^{-1}$. В состоянии динамического равновесия результирующая плотность тока дырок на несколько порядков меньше отдельных ее составляющих, поэтому можно записать $q_0 \mu_p pE = q_0 D_p \dfrac{dp}{dx}$. Это уравнение описывает следующий физический процесс. Вследствие различной концентрации неосновных носителей происходит диффузия дырок, которая определяет плотность тока диффузии и направлена от участков с высокой концентрацией дырок к участку с низкой концентрацией (на рис. 19.20 в n-области слева направо). Силу, приводящую к диффузии, можно рассматривать как результат действия некоторого стороннего электрического поля, напряженность которого направлена слева направо. При наличии стороннего поля, потенциал которого убывает по мере приближения к границе, в n-области образуется электрическое поле, движущее дырки справа налево; при этом возникает ток переноса — ток дрейфа, направленный противоположно току диффузии. Основные носители — электроны в n-области — распределяются таким образом, что в любом объеме n-области объемная плотность заряда оказывается равной нулю. Связь между приложенным к диоду напряжением и концентрацией дырок можно найти, если из выражений для плотностей токов определить E и произвести интегрирование. Имеем

$$\int_{x_0}^{-x_0} E\,dx = \frac{D_p}{\mu_p} \int_{x_0}^{-x_0} \frac{dp}{p}; \quad u = \frac{D_p}{\mu_p} \ln \frac{p_p}{p} \quad \text{или} \quad \frac{p_p}{p} = e^{\frac{\mu_p u}{D_p}} = e^{\frac{q_0 u}{kT}}.$$

Напряжение $u = u_{n,p} + u_{\text{конт}}$.

Если к диоду приложено напряжение $u_{n,p} = 0$, то контактная разность потенциалов ($u_{\text{конт}}$) в n–p-переходе определяется отношением равновесных концентраций дырок в n- и p-материалах. Иначе говоря, $p_p / p_n = e^{\frac{q_0 u_{\text{конт}}}{kT}}$, и тогда

$$\frac{p}{p_p} = \frac{p_n}{p_p} e^{-\frac{q_0 u_{n,p}}{kT}} = \frac{p_n}{p_p} e^{\frac{q_0 u_{p,n}}{kT}} \quad \text{или} \quad p = p_n e^{\frac{q_0}{kT} u_{p,n}} = p_n e^{\frac{q_0}{kT} u_д},$$

где $u_д = u_{n,p}$ — приложенное к диоду напряжение, условно-положительное направление которого принято от p -материала к n-материалу. Токи в p- и n-областях определяются избыточными неосновными носителями, поэтому для избыточной концентрации дырок в n-материале можно записать

$$\tilde{p} = p - p_n = p_n \left(e^{\frac{q_0 u_д}{kT}} - 1 \right).$$

Аналогичное выражение можно получить и для избыточной концентрации неосновных носителей — электронов в p-материале:

$$\tilde{n} = n - n_p = n_p \left(e^{\frac{q_0 u_д}{kT}} - 1 \right).$$

Для концентрации дырок в некотором объеме и плотности тока диффузии можно записать следующие уравнения:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p - p_n}{\tau_p} + \frac{1}{q_0} \frac{\partial J_p}{\partial x} \quad \text{и} \quad J_p = -q_0 D_p \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Скорость возрастания числа дырок в единице объема равна разнице скоростей генерирования и рекомбинации дырок в единице объема плюс разность дырочных токов, входящих в единицу объема и выходящих из нее, причем p_n — тепловая равновесная концентрация дырок в n-материале, а τ_p — их эффективное время жизни. Аналогичные уравнения можно записать для концентрации электронов и плотности тока диффузии электронов в материале p-типа:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{n - n_p}{\tau_n} + \frac{1}{q_0} \frac{\partial J_n}{\partial x} \quad \text{и} \quad J_n = q_0 D_n \frac{\partial n}{\partial x}.$$

Направление плотности тока J_n и направление потока электронов противоположны, поэтому последний член имеет другой знак по сравнению с выражением для дырок.

Если $p/\ t = 0$, то

$$\frac{p - p_n}{\tau_p} = D_p \frac{d^2 p}{dx^2} = D_p \frac{d^2 (p - p_n)}{dx^2},$$

откуда

$$p - p_n = A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x}, \text{ где } \alpha = \left(\sqrt{D_p \tau_p} \right)^{-1} = 1/L_p,$$

где L_p — глубина диффузии дырок.

Учитывая, что при $x = \infty$ имеем $p - p_n = 0$, получим $A_1 = 0$. Ранее мы получили выражение для p-избыточной концентрации дырок в зависимости от $u_д$. При интегрировании пределом являлся x_0, поэтому должно быть очевидное равенство

$$A_2 e^{-x_0/L_p} = p_n\left(e^{\frac{q_0 u_д}{kT}} - 1\right) \text{ или } A_2 = e^{x_0/L_p} p_n\left(e^{\frac{q_0 u_д}{kT}} - 1\right) = p_0\left(e^{\frac{q_0 u_д}{kT}} - 1\right).$$

Отсюда окончательно имеем

$$\tilde{p}(x) = p_0\left(e^{\frac{q_0 u_д}{kT}} - 1\right)e^{-\frac{x}{L_p}}; \quad \tilde{n}(x) = n_0\left(e^{\frac{q_0 u_д}{kT}} - 1\right)e^{-\frac{x}{L_n}}.$$

Ток в p–n-переходе и, следовательно, в диоде равен

$$i_д = i_p\Big|_{x=0} + i_n\Big|_{x=0} = s_д(J_p - J_n) = s_д q_0\left(-D_p\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x} - D_n\frac{\partial\tilde{n}}{\partial x}\right) =$$

$$= q_0 s_д\left(\frac{D_p p_0}{L_p} + \frac{D_n n_0}{L_n}\right)\left(e^{\frac{q_0 u_д}{kT}} - 1\right) = I_s\left(e^{\frac{q_0 u_д}{kT}} - 1\right),$$

где $s_д$ — поперечное сечение диода.

Наличие объемных зарядов в p–n-переходе следует учесть в математической модели тем, что ток диода, кроме тока проводимости, будет содержать составляющие, учитывающие токи смещения. Такая добавка может быть получена, если принять во внимание, что

$$i_{см} = \frac{d}{dt}(sD) = s_д\frac{d}{dt}\left(\frac{L_p q_0 p}{2} + \frac{L_n q_0 n}{2}\right) =$$

$$= s_д\left(\frac{L_p q_0}{2}\frac{q_0 p_0}{kT} + \frac{L_n q_0}{2}\frac{q_0 n_0}{kT}\right)e^{\frac{q_0 u_д}{kT}}\frac{du_д}{dt} = C_э\frac{du_д}{dt},$$

где $C_э = \frac{s_д q_0}{2}\frac{q_0}{kT}(p_0 L_p + n_0 L_n)e^{\frac{q_0 u_д}{kT}}$.

Заметим, что $L_p = D_p\tau_p/L_p$, и при предположении о равенстве $\tau_p = \tau_n = \tau$ можно получить

$$C_э = \frac{I_s \tau q_0}{2kT}e^{\frac{q_0 u_д}{kT}}.$$

Эквивалентная схема, соответствующая полученной выше математической модели, приведена на рис. 19.22, *б*. Если обратить внимание на выражения для концентрации неосновных носителей и плотностей токов, можно заметить их сходство с уравнениями для цепей с распределенными параметрами. Это сходство не случайное, ибо заряды и токи в веществе диода, согласно основному допущению, распределены вдоль координаты x, и поэтому процессы протекают и в зависимости от x, и в зависимости от времени. Эта аналогия также говорит о том, что представление диода двумя элементами не может быть признано точным, так как частотные свойства цепей с распределенными параметрами r и C невозможно точно воспроизвести при помощи двух пассивных элементов.

Выпрямители с полупроводниковыми диодами (вентилями) находят исключительно широкое применение в электроизмерительных приборах, в устройст-

вах автоматики, в электронных вычислительных машинах, а также в различных мощных электроэнергетических установках — в электрическом транспорте, на электрохимических предприятиях и т. д.

19.7. Управляемые нелинейные элементы. Ионный прибор с управляющим электродом

Ряд особых, весьма ценных явлений в электрических цепях может быть получен при использовании *управляемых нелинейных элементов*. В настоящем параграфе рассмотрим один из весьма распространенных приборов этого тип — ионный прибор с управляющим электродом. В следующих параграфах будут рассмотрены два других получивших широкое распространение прибора — трехэлектродная лампа и полупроводниковый триод.

Ионный прибор с управляющим электродом выполняется или с жидким катодом, как ртутный вентиль, или с накаливаемым катодом, как газотрон. Отметим, что часто он носит название *тиратрон*. Управляющий электрод обычно выполняется в виде сетки той или иной конструкции, расположенной между катодом и анодом.

Сетка в ионном приборе не обладает полным управлением. С помощью отрицательного напряжения между сеткой и катодом, при котором потенциал сетки отрицателен по отношению к потенциалу катода, можно не допустить возникновения разряда между катодом и анодом, но невозможно прекратить уже возникший разряд. Действие сетки в таком приборе поясняется рис. 19.23. До момента времени t_1 напряжение на сетке u_c было отрицательным и разряд между катодом и анодом не образовывался, хотя в отдельные интервалы времени напряжение u_a между анодом и катодом было положительно. Электрическое поле сетки компенсировало поле анода. В момент времени t_1 на сетку подается импульс положительного напряжения. Так как при этом напряжение на аноде положительно, то между катодом и анодом возникает ионный разряд в форме электрической дуги. Однако изменение знака u_c на отрицательный в момент t_2 при положительном напряжении на аноде не приводит к погасанию дуги, так как положительные ионы, имеющиеся в большом количестве в пространстве, окружающем сетку, привлекаются к ней и нейтрализуют действие ее отрицательного заряда. Дуга гаснет в момент t_3 изменения знака напряжения u_a между анодом и катодом. Дуга загорается вновь в момент t_4 при подаче положительного напряжения на сетку при положительном напряжении u_a. Подача на сетку положительного импульса напряжения в момент t_5, когда напряжение на аноде отрицательно, не приводит к образованию дуги. Если в момент t_6 снять отрицательное напряжение на сетке и заменить его постоянным положительным, то дуга будет беспрепятственно гореть при положительных значениях анодного напряжения так же, как это происходит в неуправляемом вентиле.

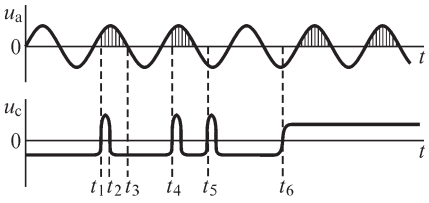


Рис. 19.23

Хотя управляющее действие сетки в ионных приборах ограничено, но и такое действие сетки, как будет показано, дает возможность осуществить регулирова-

ние напряжения выпрямительных установок, а также решить при помощи ионных приборов значительно более сложную и важную задачу преобразования переменного тока в постоянный.

19.8. Управляемые нелинейные элементы. Трехэлектродная электронная лампа

В отличие от ионных приборов, в трехэлектродных электронных лампах сетка обладает полным управлением (рис. 19.24). Ток в цепи сетки в нормальных режимах значительно меньше тока в цепи анода. Поэтому током в цепи сетки будем пренебрегать. Анодный ток $i_а$ определяется совместным действием анодного $u_а$ и сеточного $u_с$ напряжений: $i_а = F(u_а, u_с)$. Характер зависимости тока $i_а$ от напряжений $u_а$ и $u_с$ приведен на рис. 19.25. Кривые на рис. 19.25, носящие название анодно-сеточных характеристик, выражают изменение анодного тока $i_а$ при изменении сеточного напряжения $u_с$ для различных постоянных значений анодного напряжения: $i_а = F(u_с)$ при $u_а$ = const. Из рис. 19.25 видно, что зависимости $i_а = F(u_с)$ являются нелинейными при больших изменениях сеточного напряжения. Однако они имеют значительные прямолинейные участки, заканчивающиеся с одной стороны переходом к току насыщения i_s и с другой стороны — переходом к нулевому значению тока.

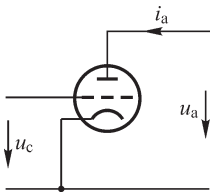


Рис. 19.24

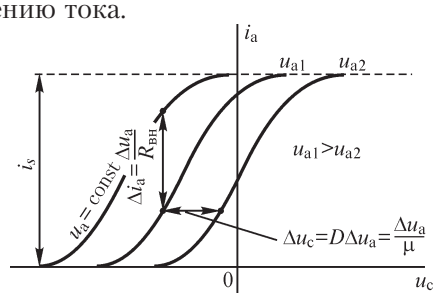


Рис. 19.25

Приращение тока $i_а$ определяется приращениями обоих напряжении $u_а$ и $u_с$ и равно

$$di_а = \frac{\partial i_а}{\partial u_а} du_а + \frac{\partial i_а}{\partial u_с} du_с. \qquad (*)$$

Величина $\frac{\partial i_а}{\partial u_а} = \left(\frac{di_а}{du_а}\right)_{u_с = \text{const}} = G_{вн}$ представляет собой *внутреннюю проводимость* лампы, а обратная ей величина $R_{вн} = 1/G_{вн}$ — *внутреннее сопротивление* лампы; величина $\frac{\partial i_а}{\partial u_с} = \left(\frac{di_а}{du_с}\right)_{u_а = \text{const}} = S$ является крутизной характеристики лампы. Величина S определяется с учетом масштабов тангенсом угла наклона касательной к характеристике в данной точке.

Кроме параметров $R_{вн}$ и S лампы, вводят еще два зависящих от них параметра. Пусть приращения $du_а$ и $du_с$ подобраны так, что ток $i_а$ не меняется, т. е. $di_а = 0$ и, следовательно,

$$0 = \frac{\partial i_{\text{а}}}{\partial u_{\text{а}}} du_{\text{а}} + \frac{\partial i_{\text{а}}}{\partial u_{\text{с}}} du_{\text{с}} = \frac{1}{R_{\text{вн}}} du_{\text{а}} + S du_{\text{с}},$$

откуда

$$-\left(\frac{du_{\text{а}}}{du_{\text{с}}}\right)_{i_{\text{а}}=\text{const}} = -\frac{\partial u_{\text{а}}}{\partial u_{\text{с}}} = SR_{\text{вн}}.$$

Величину $\left(\frac{du_{\text{а}}}{du_{\text{с}}}\right)_{i_{\text{а}}=\text{const}} = \mu$ называют коэффициентом усиления лампы. Величину, обратную коэффициенту усиления, $D = 1/\mu$ называют проницаемостью лампы.

Величины μ и D определяются формой и геометрическими размерами электродов лампы. Сетка расположена ближе к катоду, чем анод. Поэтому $\mu > 1$ и $D < 1$. Чем гуще сетка и чем ближе она к катоду, тем больше влияние сеточного напряжения на анодный ток по сравнению с влиянием анодного напряжения и, соответственно, тем больше μ и меньше D. На этом основывается использование ламп в качестве усилителей напряжения.

Между параметрами лампы, как видно из последних формул, существует связь

$$\mu = \frac{1}{D} = SR_{\text{вн}}, \text{ т. е. } SR_{\text{вн}}D = 1.$$

Параметры μ и D, определяемые геометрическими размерами, практически не зависят от процессов в лампе, тогда как величины S и $R_{\text{вн}}$ зависят от процессов, т. е. от значений $u_{\text{а}}$, $u_{\text{с}}$ и $i_{\text{а}}$. На прямолинейных участках характеристики также $S = \text{const}$ и $R_{\text{вн}} = \text{const}$.

19.9. Трехэлектродная электронная лампа как элемент электрической цепи

Предположим, что колебания анодного тока в электронной лампе происходят в пределах линейного участка характеристики. Если процесс совершается на нелинейном участке характеристики, то будем предполагать амплитуду колебаний достаточно малой, чтобы можно было линеаризовать участок характеристики в пределах, в которых совершаются колебания. В таком случае уравнения, описывающие эти колебания около некоторой точки характеристики, оказываются линейными. Пусть $I_{\text{а}}(p)$, $U_{\text{а}}(p)$ и $U_{\text{с}}(p)$ — операторные изображения изменяющихся во времени отклонений $\Delta i_{\text{а}} = i_{\text{а}} - i_{\text{а}0}$, $\Delta u_{\text{а}} = u_{\text{а}} - u_{\text{а}0}$, $\Delta u_{\text{с}} = u_{\text{с}} - u_{\text{с}0}$ анодного тока $i_{\text{а}}$, анодного напряжения $u_{\text{а}}$ и сеточного напряжения $u_{\text{с}}$ от их значений $i_{\text{а}0}$, $u_{\text{а}0}$, $u_{\text{с}0}$, соответствующих этой точке характеристики. Уравнение (*) предыдущего параграфа для них имеет вид

$$I_{\text{а}}(p) = G_{\text{вн}}U_{\text{а}}(p) + SU_{\text{с}}(p)$$

или

$$-SU_{\text{с}}(p) = G_{\text{вн}}U_{\text{а}}(p) - I_{\text{а}}(p).$$

Обозначив $\Im(p) = -SU_c(p)$ и $I(p) = -I_a(p)$, запишем уравнение в виде

$$\Im(p) = G_{вн}U_a(p) + I(p).$$

Величину $\Im(p) = -SU_c(p)$ будем рассматривать как ток з а в и с и м о г о и с т о ч н и к а т о к а, так как $\Im(p)$ зависит от $U_c(p)$. Величину $G_{вн}U(p)$ при этом будем рассматривать как ток через внутреннюю проводимость $G_{вн}$ этого источника тока. Величина $I(p)$ является током, идущим от источника к приемнику. Соответственно, эквивалентная схема электронной лампы (рис. 19.26, *а*) получает вид, показанный на рис. 19.26, *б*. На эквивалентной схеме принято изображать также входные зажимы *1–0* в цепи сетки. Выходными являются зажимы *2–0* в анодной цепи.

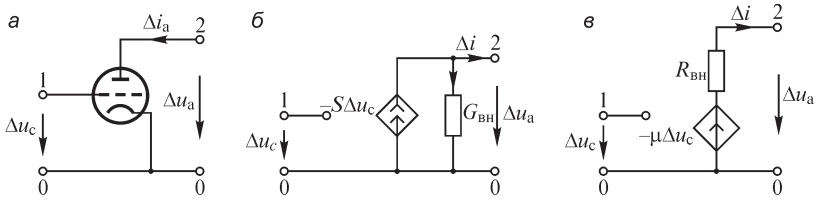


Рис. 19.26

Заменяя источник тока эквивалентным источником ЭДС, получаем ЭДС этого источника равной $E(p) = \dfrac{\Im(p)}{G_{вн}} = -\dfrac{S}{G_{вн}}U_c(p) = -\mu U_c(p)$ и его внутреннее сопротивление равным $R_{вн} = 1/G_{вн}$. Соответственно, схема, эквивалентная электронной лампе, может быть представлена также в виде, изображенном на рис. 19.26, *в*.

При весьма высоких частотах необходимо учитывать емкости между электродами лампы, и, соответственно, эквивалентная схема дополняется конденсаторами (рис. 19.27).

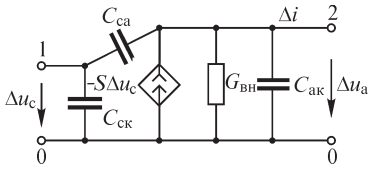


Рис. 19.27

Пусть сопротивление приемника, приключенного к выходным зажимам *2–0*, равно R. Тогда, согласно схеме рис. 19.26, *в*, имеем

$$I(p) = -\frac{\mu U_c(p)}{R_{вн} + R} \quad \text{и} \quad U_a(p) = I(p)R = -\frac{\mu U_c(p)R}{R_{вн} + R}.$$

Таким образом, передаточная функция четырехполюсника от зажимов *1–0* к зажимам *2–0*, представляющая собой коэффициент усиления напряжения, приобретает вид

$$\frac{U_a(p)}{U_c(p)} = -\frac{\mu R}{R_{вн} + R} = k.$$

Обычно μ заметно больше единицы, и при заданном $R_{вн}$ величину R выбирают достаточно большой, так чтобы имело место неравенство $\mu > \dfrac{R_{вн} + R}{R}$; при этом $k > 1$ и имеем усиление напряжения.

19.10. Управляемые нелинейные элементы. Полупроводниковые триоды

Совершенно новые возможности в области создания усилителей переменных токов, генераторов колебаний и различных автоматических измерительных и счетно-решающих систем открылись с осуществлением полупроводниковых управляемых элементов — так называемых полупроводниковых триодов или транзисторов.

Рассмотрим принцип действия плоскостных германиевых триодов. На рис. 19.28 схематически изображен такой триод, в котором две области германия типа *p* разделены тонким слоем германия типа *n*. С помощью электродов в виде металлических пластин, называемых эмиттером, базой и коллектором, эти три области могут быть соединены с внешней электрической цепью. В таком триоде имеются два перехода между полупроводниками различного типа: *p*–*n*-переход от эмиттерной области к области базы и *n*–*p*-переход от области базы к области коллектора. Триоды такого типа называют биполярными. Если электроды не присоединены к внешней цепи, то вдоль триода в районе этих переходов устанавливается распределение электрического потенциала, показанное внизу на рис. 19.28. Как было разъяснено при рассмотрении принципа действия полупроводникового диода в § 19.6, такое распределение потенциала является результатом появления около поверхностей раздела германия различного типа объемных зарядов. В германии типа *p* этот объемный заряд обусловлен отрицательными зарядами закрепленных в решетке кристалла ионов акцепторной примеси, а в германии типа *n* — положительными зарядами закрепленных в решетке ионов донорной примеси (на рис. 19.28 эти ионы показаны большими кружками с соответствующими знаками в них). Электрическое поле, созданное этими объемными зарядами, препятствует диффузии дырок (маленькие белые кружки) из области *p* в область *n* и свободных электронов (маленькие черные кружки) — в противоположном направлении.

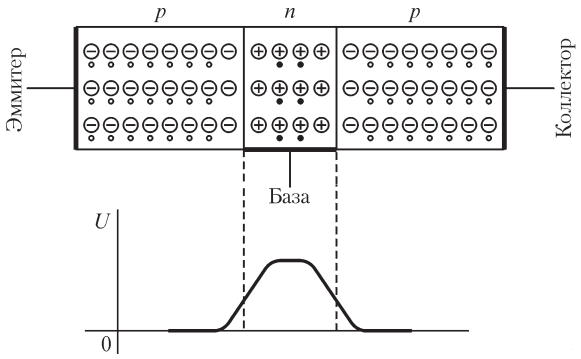


Рис. 19.28

Присоединим к триоду внешнюю цепь, как показано на рис. 19.29. Напряжение $U_э$ батареи, включенной между базой и эмиттером, снижает потенциальный барьер в *p*–*n*-переходе от эмиттерной области к области базы, так как эта батарея

включена в прямом (способствующем прохождению прямого тока) направлении. Напряжение же $U_к$ батареи, включенной между базой и коллектором, увеличивает потенциальный барьер в n–p-переходе от области базы к области коллектора, так как эта батарея включена в обратном (запирающем) направлении. Распределение потенциала, которое при этом устанавливается в районе переходов вдоль триода, показано внизу на рис. 19.29. Снижение потенциального барьера между эмиттерной областью и областью базы вызывает движение дырок из области эмиттера в область базы (в область n). Ввиду весьма малой толщины слоя n германия (порядка сотых миллиметра) почти все дырки, прошедшие в этот слой из области эмиттера, продрейфуют через всю толщину слоя до следующего n–p-перехода и свободно пройдут через этот переход в область коллектора, так как электрическое поле в этом переходе не препятствует, а, наоборот, способствует движению дырок слева направо. Этому движению дырок способствует и напряжение батареи, включенной между базой и коллектором.

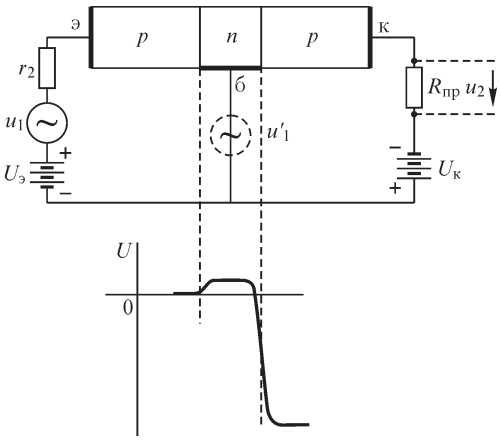


Рис. 19.29

Все же будет происходить рекомбинация в слое n некоторого числа дырок со свободными электронами этого слоя, что приведет к небольшому снижению тока в коллекторе по сравнению с током в эмиттере вследствие ответвления небольшой части тока эмиттера в базу. Кроме того, должен протекать электронный ток из области базы в область эмиттера, но при правильном конструировании триода этот ток значительно меньше тока, обусловленного движением дырок. Этот электронный ток создает дополнительную составляющую тока через базу и, соответственно, несколько увеличивает ток в эмиттере.

Существенное значение имеет характер зависимости тока в коллекторе от напряжения в цепи коллектора при заданном токе эмиттера. При увеличении напряжения сначала ток в коллекторе быстро возрастает (рис. 19.30), а затем наступает как бы истощение носителей тока в области коллектора, так как поступление их из эмиттера через p–n- и n–p-переходы ограничено током эмиттера, зависящим от значения потенциального барьера между эмиттером и базой (см. рис. 19.29). Соответственно, несмотря на значительное возрастание напряжения в цепи коллектора, ток в коллекторе увеличивается очень медленно, и, следовательно, сопротивление области коллектора резко возрастает, достигая весьма большого значения. Обычно напряжение $U_к$ батареи в цепи коллектора принимается достаточно большим, порядка нескольких десятков вольт, и, соответственно, сопротивление области коллектора достигает сотен тысяч и даже нескольких миллионов ом. Такой же порядок

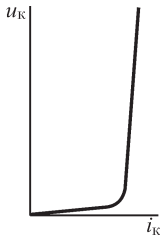


Рис. 19.30

имеет и сопротивление $R_{пр}$ приемника во внешней цепи коллектора. Так как значение потенциального барьера между эмиттером и базой имеет порядок одного вольта и сопротивление области эмиттера по сравнению с сопротивлением области коллектора незначительно, то в цепи эмиттера требуется незначительное напряжение $U_э$ батареи.

Предположим теперь, что в цепи эмиттера действует источник переменного напряжения u_1 с малой амплитудой и с внутренним сопротивлением r_2, малым по сравнению с сопротивлением области коллектора (см. рис. 19.29). Это напряжение изменяет значение потенциального барьера между областью эмиттера и областью базы и сильно влияет на значение тока, проходящего из эмиттера через область базы в цепь коллектора. Так как ток в цепи коллектора лишь немного меньше тока в цепи эмиттера, а сопротивление в цепи коллектора весьма велико, то на зажимах приемника возникает переменное напряжение u_2, значительно превышающее напряжение u_1. Таким образом, триод работает как усилитель напряжения. Коэффициент усиления напряжения $\alpha_u = u_2/u_1$ получается порядка десятков. Коэффициент же усиления тока, согласно вышеизложенному, получается несколько меньше единицы, т. е. $\alpha_i = i_2/i_1 < 1$, причем и i_2, и i_1 — переменные составляющие токов в цепях коллектора и эмиттера. Соответственно коэффициент усиления мощности $\alpha_p = \alpha_u\alpha_i$ несколько меньше α_u.

Большее усиление мощности можно получить, если включить источник первичного переменного напряжения u_1' в цепь базы, как это показано штриховыми линиями на рис. 19.29. Очевидно, что источник будет так же эффективно изменять значение потенциального барьера между областью эмиттера и областью базы и сильно влиять на значение тока в цепи коллектора, так что коэффициент усиления напряжения α_u получается также большим. Но так как ток в цепи базы весьма мал по сравнению с током в цепи коллектора, то значительным получается также коэффициент усиления тока α_i, а соответственно, и коэффициент усиления мощности $\alpha_p = \alpha_u\alpha_i$ оказывается при этом больше, чем в случае включения первичного источника напряжения u_1 в цепь эмиттера.

Наряду с рассмотренными биполярными триодами распространение нашли полевые, или униполярные триоды, в которых используется не два перехода между полупроводниками различного типа (см. рис. 19.28), а один (p–n либо n–p) переход.

Рассмотрим принцип действия полевого триода с p–n-переходом. На рис. 19.31 схематически изображен такой триод, в котором p–n-переход осуществлен на части нижней поверхности полупроводника типа n путем нанесения тонкого слоя полупроводника типа p.

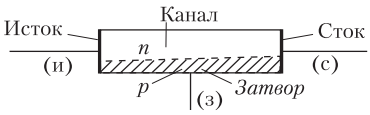


Рис. 19.31

Присоединение триода к внешней цепи осуществляется через металлические электроды, называемые истоком (и), затвором (з) и стоком (с). Через полупроводник типа n протекает ток от стока к истоку, и эта часть устройства называется *каналом*.

Как следует из изложенного в § 19.6, при отсутствии внешних источников в зоне p–n перехода создается избыточный заряд, электрическое поле которого

является поперечным к каналу и направлено сверху вниз. Область расположения объемного заряда ограничена на рис. 19.31 пунктирной линий.

Полевой триод с присоединенной к нему внешней электрической цепью изображен на рис. 19.32. Полярность батареи $U_з$ такова, что она препятствует протеканию тока затвора, так что ток $i_з$ затвора оказывается весьма малым, и им можно пренебречь. Напряжение $U_з$ увеличивает потенциальный барьер в p–n-переходе, и область объемного заряда в канале также увеличивается (см. рис. 19.31).

Ток стока, протекающего по каналу, и напряжение u_2 приемника $r_{пр}$ зависят от размера области объемного заряда, изменяющей проводимость канала. При изменении напряжения между затвором и истоком, например, при включении источника переменного напряжения u_1, изменяются размер области объемного заряда и проводимость канала между стоком и истоком. Так как размеры области объемного заряда и канала в поперечном направлении соизмеримы, то относительно небольшое изменение напряжения между затвором и истоком ведет к значительному изменению проводимости канала и напряжения u_2 приемника, и поэтому $\alpha_u \gg 1$.

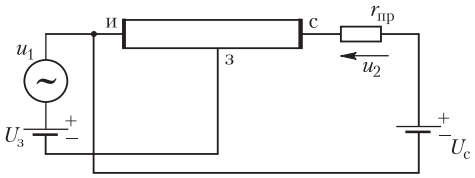


Рис. 19.32

Таким образом, усиление полевого триода обусловлено воздействием поперечного в области канала электрического поля на его проводимость в продольном направлении.

Зависимость тока $i_с$ стока от напряжения $u_{си}$ между стоком и истоком при неизменном напряжении $u_{зи}$ между затвором и истоком имеет вид, аналогичный зависимости $i_к$.

Наряду с рассмотренными полевыми триодами распространение получили также полевые триоды с изоляционным слоем между электродом затвора и полупроводником канала (металл—диэлектрик—полупроводник), называемые МДП-триодами. Сопротивление между затвором и каналом в таких триодах возрастает до $10^8...10^9$ Ом при использовании в качестве диэлектрика окисла кремния SiO_2, так что ток затвора можно принять равным нулю во всех режимах их работы.

Полевые триоды позволяют получить значительные коэффициенты усиления мощности вследствие именно малого тока затвора. Другая особенность полевых триодов, также связанная с малым током затвора и возможностью управления током стока с помощью электрического поля затвора, заключается в том, что входное сопротивление триода оказывается весьма большим и источник напряжения u_1 на входе триода работает в режиме холостого хода.

19.11. Полупроводниковый триод как элемент электрической цепи

На рис. 19.33, *а* приведено условное обозначение полупроводникового триода с p–n–p-переходами. Здесь *э* — эмиттер, *б* — база, *к* — коллектор. В случае n–p–n-переходов стрелка у эмиттера направляется в противоположном направ-

лении. На рис. 19.34 изображены три возможные схемы включения триода: *а* — с общей для входных и выходных зажимов базой, *б* — с общим эмиттером и *в* — с общим коллектором. Во всех случаях один из входных зажимов соединен с базой, и во всех случаях один из выходных зажимов соединен с коллектором.

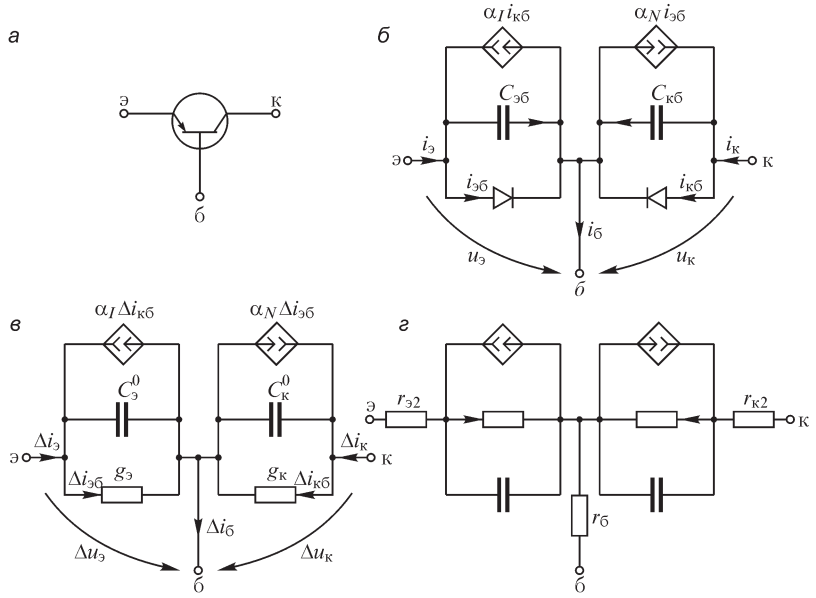


Рис. 19.33

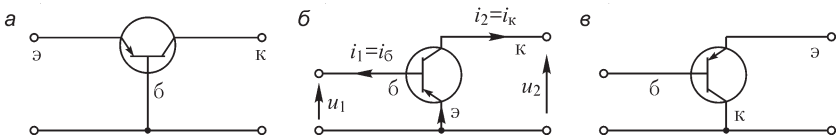


Рис. 19.34

Математическое описание процессов, происходящих в полупроводниковом триоде, может быть произведено относительно различных физических величин. Такими величинами могут быть заряды, токи и напряжения. В соответствии с математическим описанием будут различны и математические модели триода, и эквивалентные схемы.

В полупроводниковом триоде *p–n*- и *n–p*-переходы аналогичны двум диодам, соединенным, как это показано на рис. 19.33, *б*. На этом рисунке параллельно к двум эквивалентным схемам диодов, представляющим процессы только в переходах эмиттер—база и коллектор—база, присоединены также и два источника тока, один из которых учитывает процесс проникновения части носителей из эмиттерной зоны сквозь базу в коллекторную ($\alpha_N i_{эб}$), другой — аналогичное проникновение части коллекторного обратного тока в эмиттерную зону ($\alpha_I i_{кб}$). Величину α_N называют коэффициентом усиления по току в прямой активной области (эмиттерный переход смещен в прямом направлении, а коллекторный —

в обратном). Величину α_I называют коэффициентом усиления по току для схемы с общей базой в инверсной активной области (эмиттерный переход смещен в обратном направлении, а коллекторный — в прямом). При анализе процессов в полупроводниковых диодах было отмечено, что распределение заряда в полупроводниковом материале зависит от времени и пространственной координаты. В связи с этим коэффициенты α_N и α_I оказываются сложными функциями комплексной частоты, т. е. зависящими от времени функциями. Это обстоятельство является большим недостатком рассматриваемой эквивалентной схемы, известной под названием схемы Эберса—Молла. В целом, приведенная на рис. 19.33, *б* эквивалентная схема, приближенно представляющая процессы в триоде по частоте, может описать процессы в широком диапазоне изменения токов и напряжений и поэтому пригодна для расчета цепей при любых (больших и малых) изменениях токов и напряжений.

Во многих устройствах полупроводниковый триод используется в режиме «малого сигнала», когда при больших постоянных токах и напряжениях происходят относительно малые изменения некоторых входных и выходных величин. Для анализа таких процессов целесообразно составлять эквивалентные схемы, пригодные для анализа режима «малого сигнала».

Для токов и напряжений схемы (рис. 19.33, *б*) имеем

$$i_э = i_{эб} + C_{эб}\frac{du_э}{dt} - \alpha_I i_{кб}; \quad i_к = i_{кб} + C_{кб}\frac{du_к}{dt} - \alpha_N i_{эб},$$

где $i_{эб} = I_{sэб}(e^{\frac{q_0 u_э}{kT}} - 1)$; $i_{кб} = I_{sкб}(e^{\frac{q_0 u_к}{kT}} - 1)$; $C_{эб} = C_{0э}e^{\frac{q_0 u_э}{kT}}$; $C_{кб} = C_{0к}e^{\frac{q_0 u_к}{kT}}$.

Пусть $i_э = i_{э0} + \Delta i_э$, $i_к = i_{к0} + \Delta i_к$; $u_э = u_{э0} + \Delta u_э$; $u_к = u_{к0} + \Delta u_к$. Разложим все функции в ряд по малому параметру Δu и ограничимся в этом ряде только членами первого порядка малости. Тогда

$$i_э - i_{э0} = \Delta i_э = \left(I_{sэб}\frac{q_0}{kT}e^{\frac{q_0 u_{э0}}{kT}}\right)\Delta u_э + C_{эб}e^{\frac{q_0 u_{э0}}{kT}}\frac{d\Delta u_э}{dt} - \alpha_I I_{sкб}\frac{q_0}{kT}e^{\frac{q_0 u_{к0}}{kT}}\Delta u_к;$$

$$i_к - i_{к0} = \Delta i_к = \left(I_{sкб}\frac{q_0}{kT}e^{\frac{q_0 u_{к0}}{kT}}\right)\Delta u_к + C_{кб}e^{\frac{q_0 u_{к0}}{kT}}\frac{d\Delta u_к}{dt} - \alpha_N I_{sэб}\frac{q_0}{kT}e^{\frac{q_0 u_{к0}}{kT}}\Delta u_э$$

или

$$\Delta i_э = g_э \Delta u_э + C_э^0\frac{d\Delta u_э}{dt} - \alpha_I \Delta i_{кб};$$

$$\Delta i_к = g_к \Delta u_к + C_к^0\frac{d\Delta u_к}{dt} - \alpha_N \Delta i_{эб}.$$

Следовательно, эквивалентная схема для малосигнального режима будет иметь вид, представленный на рис. 19.33, *в*. В этой схеме параметры всех элементов линейны относительно малых сигналов, однако зависят нелинейно от $u_э$ и $u_к$.

В эквивалентных схемах диода и триода не учтены падения напряжения, которые имеют место при протекании токов в самом полупроводнике: в зоне

эмиттера, в зоне базы и в зоне коллектора. Сопротивления, учитывающие эти падения напряжения, должны быть включены последовательно к каждому из зажимов. С учетом этих сопротивлений, например, малосигнальная эквивалентная схема будет иметь вид, показанный на рис. 19.33, *г*.

Рассмотрим расчет малосигнального режима при низких частотах (токами в конденсаторах пренебрегаем), когда эмиттерный переход смещен в прямом направлении (переход открыт), а коллекторный — в обратном (переход закрыт). Тогда $\Delta i_к$ мало, и поэтому можно пренебречь током $\alpha_I \Delta i_{кб}$ сравнению с током $\Delta i_э$. Проводимость $g_к$ будет весьма мала, т. е. будет велико сопротивление $r_к$. Эквивалентная схема может быть упрощена и представлена в виде, показанном на рис. 19.35.

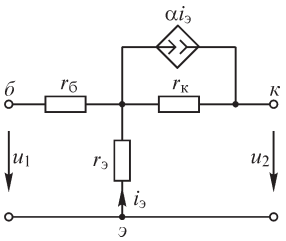


Рис. 19.35

Ранее (см. § 19.10) было указано, что высокий коэффициент усиления мощности получается для схемы на рис. 19.34, *б*, так как при этом происходит значительное усиление как тока, так и напряжения. Поэтому рассмотрим расчет именно этой схемы, обозначая все токи и напряжения малыми буквами и имея в виду, что все эти величины являются малыми сигналами.

Коэффициент усиления по току $k_i = i_{пр}/i_б$, коэффициент усиления по напряжению $k_u = u_{пр}/u_1$ и, соответственно, $k_p = p_{пр}/p_1 = k_u k_i$.

Применим метод контурных токов; для этого источник тока преобразуем в источник ЭДС (рис. 19.36). Имеем

$$u_1 = r_{11} i_1 + r_{12} i_2; \quad -u_2 = r_{21} i_1 + r_{22} i_2 - e,$$

где $e = r_m i_э = r_m (i_2 - i_1)$. Тогда

$$u_1 = (r_б + r_э) i_1 - r_э i_2; \quad -u_2 = (-r_э + r_m) i_1 + (r_э + r_к - r_m) i_2$$

или

$$u_1 = r'_{11} i_1 + r'_{12} i_2; \quad -u_2 = r'_{21} i_1 + r'_{22} i_2.$$

Можно заметить, что если зависимый источник e представить в виде падения напряжения, нарушится условие $r'_{12} = r'_{21}$, ибо $r'_{12} = -r_э$, а $r'_{21} = -r_э + r_m$. Численный анализ результатов произведем при следующих значениях параметров эквивалентных схем: $r_б = 500$ Ом, $r_э = 25$ Ом, $r_к = 2{,}04 \cdot 10^6$ Ом, $r_m = \alpha r_к = 2 \cdot 10^6$ Ом, $\alpha = 0{,}98$. Пусть $r_{пр} = 2000$ Ом. Тогда, учитывая, что $r_к - r_m = (1 - \alpha) r_к = 0{,}04 \cdot 10^6 \gg r_э$ и $r_m \gg r_э$, можем приблизительно считать

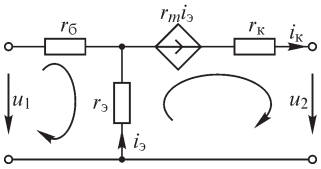


Рис. 19.36

$$k_i = \frac{i_2}{i_1} \approx -\frac{\alpha r_к}{(1-\alpha) r_к - r_{пр}} = -\frac{2 \cdot 10^6}{0{,}04 \cdot 10^6 - 2000} = -52{,}6;$$

$$k_u = \frac{u_{пр}}{u_1} = 57{,}18 \quad \text{и} \quad |k_p| = 52{,}6 \cdot 57{,}18 \approx 3010.$$

На рис.19.37 показано условное обозначение полевого триода с каналом типа *n* (здесь *и* — исток, *з* — затвор, *с* — сток). У триодов с каналом типа *p* направления стрелок у стока и затвора меняются на противоположные.

Аналогично биполярным триодам для полевых триодов также возможны три схемы включения: с общим затвором, с общим истоком и с общим стоком. Наибольшее распространение получила схема с общим истоком, в которой входным напряжением служит $u_{зи}$, а выходным — $u_{си}$.

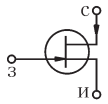


Рис. 19.37

На рис.19.38 приведено семейство характеристик $i_с = f(u_{си})$ при ряде напряжений $u_{зи}$ const.

Аналогично схеме для трехэлектродной электронной лампы (см. § 19.8) можем записать

$$di_с = \frac{\partial i_с}{\partial u_{зи}} du_{зи} + \frac{\partial i_с}{\partial u_{си}} du_{си}.$$

Величина $\frac{\partial i_с}{\partial u_{си}} = \left(\frac{\partial i_с}{\partial u_{си}}\right)_{u_{зи}=\text{const}} = G_{вн}$ представляет собой *внутреннюю проводимость*, а обратная величина $R_{вн} = \frac{1}{G_{вн}}$ — *внутреннее сопротивление* триода.

Величину $\frac{\partial i_с}{\partial u_{зи}} = \left(\frac{\partial i_с}{\partial u_{зи}}\right)_{u_{си}=\text{const}} = S$ называют *крутизной* характеристики триода.

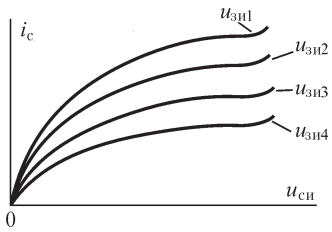


Рис. 19.38

В малосигнальном режиме, считая $G_{вн}$ и S постоянными и записывая выражение $-S\Delta u_{зи} = G_{вн}\,\Delta u_{си} - \Delta i_с$, можем рассматривать величину $-S\Delta u_{зи} = \Im$ в качестве зависимого источника тока, а $G_{вн}\Delta u_{си}$ — в качестве тока через внутреннюю проводимость этого источника. Эквивалентная схема полевого транзистора показана на рис. 19.39.

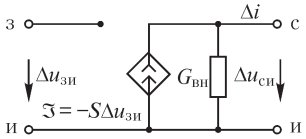


Рис. 19.39

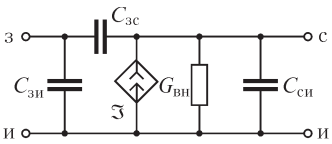


Рис. 19.40

Она находит применение, когда напряжения между электродами неизменны во времени либо изменяются с низкой частотой, при которой можно пренебречь токами смещения между электродами полевого триода. Для учета токов смещения в эквивалентные схемы следует ввести соответствующие емкостные элементы $C_{зи}$, $C_{зс}$, $C_{си}$ между электродами триода. Упрощенная схема триода в малосигнальном режиме изображена на рис. 19.40. Из-за особенностей геометрии полевого триода (см. рис. 19.31) емкость $C_{си}$ обычно на порядок меньше емкостей $C_{зи}$ и $C_{зс}$.

Эквивалентные схемы (рис. 19.36, 19.39) могут быть использованы для расчета сложных электрических цепей, содержащих полупроводниковые триоды.

Следует отметить, что при больших амплитудах переменных составляющих токов и напряжений в триоде уже нельзя не считаться с нелинейностью его характеристик. При высоких частотах необходимо считаться с тем, что сопротивления эквивалентной схемы комплексные.

19.12. Управляемые нелинейные элементы. Тиристоры

Тиристор представляет собой управляемый полупроводниковый прибор, содержащий несколько p–n-областей и способный находиться подобно диоду в открытом либо закрытом состоянии.

На рис. 19.41 показана характерная для тиристоров кремниевая 4-слойная полупроводниковая структура, содержащая три перехода $П_1$, $П_2$, $П_3$ между полупроводниками различного типа с металлическими электродами, называемыми анодом, катодом и управляющим электродом.

Напряжение $U_{ак}$ батареи снижает потенциальный барьер в p–n-переходах $П_1$ и $П_3$, в связи с чем, как и в полупроводниковом триоде, дырки из области анода дрейфуют и через переход $П_2$ частично достигают области p_2, а электроны из области катода, проходя через область p_2, частично достигают области n_1. При некоторых малых напряжениях $U_{ак}$ и $u_у$ проходящий через сопротивление $R_н$ нагрузки ток будет небольшим и тиристор закрыт (или, другими словами, выключен). Если при $U_{ак} = \text{const}$ увеличивать напряжение $u_у$ управления, то с возрастанием тока перехода $П_3$ будет расти и ток перехода $П_2$, что приводит к росту тока перехода $П_1$ и еще большему увеличению тока тиристора. Если при некотором значении $U_{ак}$ напряжение $u_у$ достигает значения $u_{у0}$, называемого напряжением открывания, то начинается лавинообразный процесс возрастания тока тиристора, достигающего наибольшего значения, когда тиристор полностью открыт.

На рис. 19.42 изображены зависимости $i = f(U_{ак}, u_у)$ для ряда значений управляющего напряжения.

Четырехслойную полупроводниковую структуру тиристора можно представить в виде эквивалентной ей структуры из двух триодов: типа p–n–p и n–p–n (рис. 19.43) — и, используя схемы, эквивалентные триоду, составить эквивалентную схемы тиристора.

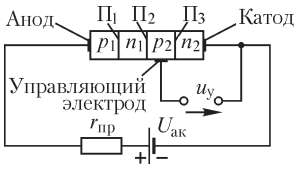


Рис. 19.41

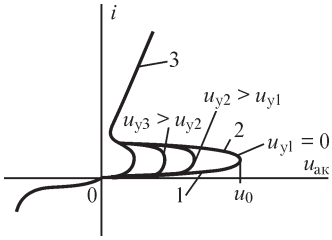


Рис. 19.42

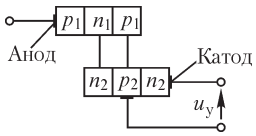


Рис. 19.43

Как видно, тиристор может открываться и при $u_у = 0$, если напряжение $U_{ак}$ достигает значения u_0. На нелинейной характеристике $i = f(U_{ак})$ тиристора для

каждого из значений управляющего напряжения $u_у$ можно выделить участок *1*, соответствующий закрытому состоянию тиристора, *2* — падающий участок, на котором при возрастании тока i напряжение $U_{ак}$ уменьшается, и участок *3*, соответствующий открытому состоянию тиристора.

Особенность тиристора заключается в независимости тока i от значения напряжения $u_у$ при его открытом состоянии. Поэтому после открывания тиристора и перехода его на участок *3* характеристики при уменьшении $u_у$ до нуля открытое состояние тиристора сохраняется и переход его в закрытое состояние может быть осуществлен только при уменьшении напряжения $U_{ак}$.

Тиристоры применяют в электрических цепях средней и большой мощности при построении преобразователей напряжения, для управления устройствами электромеханики и электроэнергетики, в которых тиристоры работают в ключевом режиме.

19.13. Нелинейные свойства ферромагнитных материалов

Индуктивности электрических контуров, а также магнитные сопротивления магнитных цепей зависят от магнитных свойств среды, в которой существует магнитное поле.

Магнитная проницаемость μ ферромагнитных веществ, основными представителями которых являются железо, никель, кобальт и их сплавы, значительно превышает магнитную постоянную ($\mu \gg \mu_0$) и сильно зависит от напряженности магнитного поля, т. е. $\mu = f(H)$.

Магнитная индукция в ферромагнитных веществах может иметь при одном и том же значении напряженности поля различные значения, зависящие от предыдущих магнитных состояний материала. Поэтому для того, чтобы величиной $\mu = B/H$ можно было пользоваться в качестве характеристики магнитных свойств ферромагнитных материалов, необходимо точно оговорить метод определения этой характеристики.

Рассмотрим процесс намагничивания ферромагнитного вещества. Предположим, что первоначально вещество было полностью размагничено, т. е. поле элементарных токов во внешнем пространстве не обнаруживалось. При монотонном увеличении напряженности внешнего поля индукция растет сначала быстро (кривая $0D_1$ на рис. 19.44) вследствие того, что элементарные токи ориентируются так, что их магнитные потоки добавляются к внешнему потоку. При больших значениях индукции скорость ее возрастания уменьшается. Магнитное состояние вещества приближается к *насыщению*. При этом уже почти все элементарные токи ориентированы так, что их магнитные поля совпадают по направлению с внешним полем. Кривая OD_1, получающаяся при условии, что вещество предварительно было размагничено, называется начальной кривой намагничивания.

Предположим, что напряженность поля была доведена до некоторого значения $+H_m$ (точка D_1 на рис. 19.44) и затем вновь уменьшается. Кривая $B = f(H)$ при убывающей напряженности поля располагается выше начальной кривой намагничивания. При уменьшении величины H до нуля наблюдается остаточная намагниченность и соответствующая ей *остаточная индукция*. Это свидетельст-

вует о том, что элементарные токи в известной мере сохранили свою упорядоченную ориентацию. Чтобы индукция стала равной нулю, напряженность поля должна принять отрицательное значение, называемое коэрцитивной силой. Если довести H до отрицательного значения $-H_m$, по абсолютной величине равного наибольшему положительному значению, то индукция примет отрицательное значение, соответствующее точке C_1. Вновь увеличивая напряженность до $+H_m$, получаем ветвь C_1D_2. Точка D_2 лежит ниже точки D_1, так как кривая в нее приходит из точки отрицательной остаточной индукции, тогда как в точку D_1 кривая приходит из начала координат, т. е. из точки, соответствующей нейтральному состоянию вещества. Повторному уменьшению величины H соответствует кривая D_2C_2, последующему затем возрастанию напряженности соответствует кривая C_2D_3, и т. д.

Таким образом, значение индукции при заданном значении напряженности поля зависит от истории процесса намагничивания. Это явление называется явлением магнитного гистерезиса. Только после достаточного числа (примерно десяти) перемагничиваний получаем симметричную гистерезисную петлю (CD), изображенную на рис. 19.44 штриховой линией. На рис. 19.45 изображено семейство симметричных гистерезисных петель, полученных при различных значениях H_m. Кривая $B = f(H)$, проходящая через вершины симметричных гистерезисных петель, называется основной кривой намагничивания и является вполне определенной для данного сорта материала. Поэтому принято определять магнитную проницаемость ферромагнитных материалов именно из основной кривой намагничивания. Точно так же остаточную индукцию B_r и коэрцитивную силу H_c обычно определяют из симметричной гистерезисной петли (рис. 19.45), причем H_m должно быть достаточно велико, чтобы при H_m вещество было близко к состоянию магнитного насыщения.

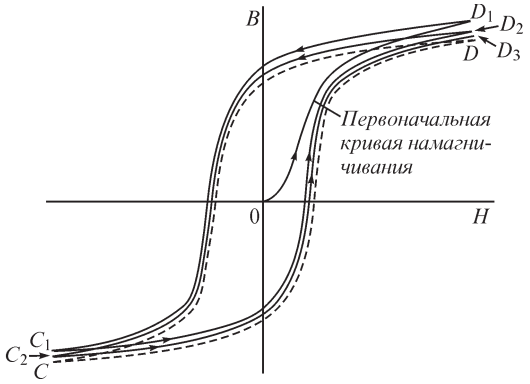


Рис. 19.44

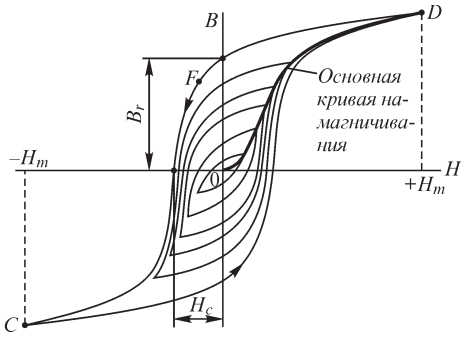


Рис. 19.45

При перемагничивании ферромагнитного вещества в нем происходят потери энергии на гистерезис.

Нетрудно убедиться, что площадь замкнутой гистерезисной петли в координатах B и H, умноженная на масштабы абсцисс и ординат, определяет собой потери за один цикл перемагничивания.

Предположим, что намагничиваемое тело из ферромагнитного вещества имеет форму тонкого кольца, длина которого l и поперечное сечение s. Кольцо намагничивается током i в обмотке, имеющей w витков, равномерно распределенных по длине кольца. Работа внешнего источника ЭДС, связанная с изменением $d\Psi$ потокосцепления $\Psi = w\Phi$ с обмоткой, определяется той частью $(+d\Psi/dt)$ напряжения на зажимах обмотки, которая преодолевает ЭДС $(-\,d\Psi/dt)$, индуцируемую изменяющимся потокосцеплением:

$$dA = i\frac{d\Psi}{dt}\,dt = i\,d\Psi = iw\,d\Phi.$$

Работа, затрачиваемая внешним источником ЭДС на изменение магнитного состояния в единице объема вещества, равна

$$dA' = \frac{dA}{ls} = \frac{iw}{l}\,d\left(\frac{\Phi}{s}\right) = H\,dB.$$

Эта работа определяется площадью полоски, имеющей длину H и ширину dB и густо заштрихованной на рис. 19.46, *а*. При увеличении напряженности поля от $-H_m$ до $+H_m$ работа определяется разностью абсолютных значений площадей EDL и CLG. Площадь EDL положительна, так как $H > 0$ и $dB > 0$. Площадь CLG отрицательна, так как $H < 0$, а $dB > 0$. Поэтому необходимо взять разность абсолютных значений этих площадей. При уменьшении напряженности поля работа определяется разностью абсолютных значений площадей KCG и KED (рис. 19.46, *б*). Площадь KCG положительна, так как $H < 0$ и $dB < 0$, площадь же KED отрицательна, так как $H > 0$, а $dB < 0$. Накладывая друг на друга рис. 19.46, *а* и 19.46, *б*, получаем рис. 19.46, *в*.

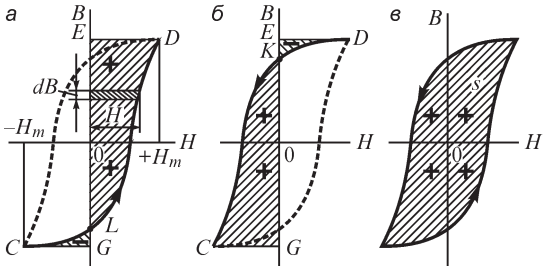


Рис. 19.46

Таким образом, работа внешнего источника, затрачиваемая на циклическое перемагничивание единицы объема вещества, определяется площадью s гистерезисной петли. Эта работа равна

$$A' = \oint H\,dB = shb,$$

где h — масштаб по оси абсцисс и b — масштаб по оси ординат. После обхода замкнутой гистерезисной петли магнитное состояние вещества возвращается к тому, которое было до начала обхода. Следовательно, никаких изменений в запасе энергии в системе не происходит, и необходимо заключить, что работа A' идет на необратимые процессы, связанные с перемагничиванием вещества.

Обозначая энергию, отнесенную к единице объема вещества, теряемую вследствие явления гистерезиса за один полный симметричный цикл перемагничивания, через $W'_{\text{г}}$, имеем

$$W'_{\text{г}} = A' \quad \text{или} \quad W'_{\text{г}} = \oint H\,dB.$$

Штейнмец предложил эмпирическую формулу вида

$$W'_{\text{г}} = \eta' B_m^{1,6},$$

где B_m — амплитуда магнитной индукции и η' — коэффициент, зависящий от рода материала. Формула с показателем 1,6 удовлетворительно сходится с опытом, если B_m лежит в интервале 0,1 Тл $< B_m <$ 1 Тл. При $0 < B_m <$ 0,1 Тл, а также при 1 Тл $< B_m <$ 1,6 Тл более правильные результаты дает формула

$$W'_{\text{г}} = \eta'' B_m^2.$$

Обе последние формулы можно объединить в одну, имеющую вид

$$W'_{\text{г}} = \eta B_m^n.$$

При весьма больших значениях индукции для ряда материалов показатель n сначала возрастает с увеличением B_m, становится больше двух и затем вновь уменьшается. Поэтому приведенные эмпирические формулы следует рассматривать лишь как приближенно выражающие зависимость потерь энергии на гистерезис от амплитуды индукции при не слишком больших значениях B_m и в соответствующих интервалах изменения B_m.

Следует отметить, что при быстрых периодических изменениях напряженности магнитного поля вид петли, выражающей зависимость $B \quad f(H)$, вообще говоря, отличается от *статической петли* гистерезиса, получаемой при медленных изменениях напряженности поля, так как при этом магнитная индукция является функцией не только напряженности поля, но и ее производных по времени. Причиной этого являются вихревые токи, возникающие в ферромагнитном материале, и магнитная вязкость. В и х р е в ы м и т о к а м и называют электрические токи проводимости, возникающие и замыкающиеся внутри проводящего сплошного тела, находящегося в переменном магнитном поле. Площадь *динамической петли*, выражающей зависимость $B = f(H)$, определяет собой при этом полные потери в единице объема ферромагнитного вещества на перемагничивание и на вихревые токи за один период изменения напряженности поля.

Приведем магнитные характеристики некоторых ферромагнитных материалов, рассматривая их как иллюстрацию к вышеизложенному.

Железо всегда имеет некоторые трудно удалимые примеси, оказывающие влияние на его магнитные свойства. Так, наличие углерода и кислорода в небольших количествах заметно снижает магнитную проницаемость. На рис. 19.47 изображены основная кривая намагничивания и части циклов гистерезиса для промышленного чистого железа (кривая *1*), имеющего 0,1 % примесей, и для лабораторной пробы, полученной путем специальной обработки (кривая *2*), при которой содержание примесей было уменьшено до 0,01 %. При помощи особой обработки чистого железа был получен материал с исключительно высокой

абсолютной магнитной проницаемостью, имеющей максимальное значение $\mu_{max} = 180\,000\ \mu_0$. Потери на гистерезис в этих пробах были очень малы и составляли всего 0,045 Вт/кг при $f = 50$ Гц и при амплитуде индукции $B_m = 1$ Тл. В электротехнических устройствах, предназначенных для работы при переменном магнитном потоке, чистое железо не применяется, так как оно обладает сравнительно малым удельным сопротивлением и потери на вихревые токи оказываются большими. В указанных устройствах используется электротехническая сталь, в которой основной примесью является кремний (Si). Присадки кремния в небольшом количестве значительно увеличивают удельное сопротивление материала. Присадка кремния в количестве до 1,7 % уменьшает также потери на гистерезис. Такого порядка содержание кремния имеет электротехническая сталь, применяемая в электромашиностроении. Листовая сталь, предназначенная для магнитопроводов трансформаторов и участков магнитных цепей машин переменного тока, которые работают при больших переменных индукциях, содержит около 4 % Si. Этим достигается значительное уменьшение потерь на вихревые токи. Общие потери на вихревые токи и на гистерезис в хороших сортах трансформаторной стали толщиной 0,35 мм имеют значение порядка 1 Вт/кг при $f = 50$ Гц и $B_m = 1$ Тл.

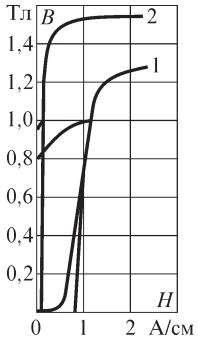


Рис. 19.47

Из других сплавов особенный интерес представляют сплавы железа с никелем (Ni). Сплав, содержащий 78,5 % Ni, имеет очень высокое значение максимальной магнитной проницаемости: μ_{max} (100 000...200 000)μ_0. Этот сплав называется *пермаллоем*. На рис. 19.48 приведены для сравнения кривые намагничивания пермаллоя и промышленного чистого железа.

Высокие качества пермаллоя достигаются только при особо тщательном соблюдении режима его тепловой обработки. Кроме того, механические напряжения и сотрясения легко снижают эти качества пермаллоя. Как нетрудно усмотреть из рис. 19.48, насыщение пермаллоя достигается уже при очень слабых полях. В слабых полях пермаллой имеет проницаемость в 15–20 раз выше по сравнению с обычной электротехнической сталью. Некоторые примеси, например молибден, еще более повышают магнитную проницаемость пермаллоя, одновременно улучшая его свойства в отношении увеличения удельного сопротивления и, соответственно, уменьшения потерь при перемагничивании в переменных полях. Например, сплав, содержащий 79 % Ni, 16 % Fe и 5 % Mo, имеет максимальную магнитную проницаемость $\mu/\mu_0 = 800\,000$. В соответствии с указанными свойствами сплавы типа пермаллоя могут быть с успехом использованы в устройствах, работающих при слабых магнитных полях, например в трансформаторах тока.

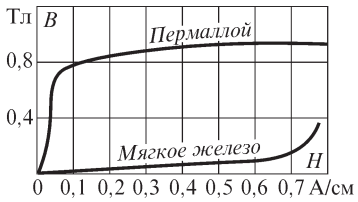


Рис. 19.48

Совершенно иные требования предъявляются к материалам, которые предназначаются для изготовления постоянных магнитов. Магнитное состояние вещества постоянного магнита характеризуется некоторой точкой F (см. рис. 19.45)

части гистерезисной петли, расположенной во втором квадранте. От таких материалов требуется, чтобы они обладали высокой остаточной индукцией B_r и большой коэрцитивной силой H_c. Последнее необходимо для того, чтобы намагниченность постоянного магнита была устойчивой. Одним из лучших материалов, отвечающих этим требованиям, является сплав *магнико,* состоящий из железа, никеля, алюминия, кобальта и меди и имеющий $B_r = 1{,}25$ Тл и $H_c = 44\,000$ А/м. Магнитные свойства этого сплава обусловлены не только его составом, но и специальной обработкой: после отливки магнит охлаждается в сильном магнитном поле.

Для изготовления сердечников катушек и трансформаторов, предназначенных для работы в полях высокой частоты, используются специальные ферромагнитные материалы — так называемые *магнитодиэлектрики* и *ферриты.*

Магнитодиэлектрики состоят из основы — порошка ферромагнитного материала — и связки — изолирующего вещества. Они изготовляются прессованием основы со связкой. Основа придает магнитодиэлектрикам необходимые магнитные свойства — для уменьшения потерь на вихревые токи она должна быть из очень мелких зерен, а связка изолирует зерна основы друг от друга. Магнитная проницаемость магнитодиэлектриков сравнительно невелика. Она имеет порядок нескольких единиц или десятков и мало меняется с ростом напряженности магнитного поля вплоть до насыщения. Наибольшее распространение получили магнитодиэлектрики, изготовляемые на основе карбонильного железа, имеющего максимальную магнитную проницаемость $\mu/\mu_0 = 21\,000$ и получаемого сразу в виде очень мелкого порошка. Эти магнитодиэлектрики имеют $\mu/\mu_0 = 8$. По сравнению с другими магнитодиэлектриками они имеют наименьшие потери и обладают довольно хорошей стабильностью во времени и при изменении температуры.

Ферриты — керамические материалы, изготовляемые из смеси твердых окислов железа с твердыми окислами других металлов (например, никеля и цинка). Измельченные и перемешанные окислы прессуют, а затем обжигают при температуре от 800 до 1400 °С, причем происходит их спекание. Изменяя состав, размер зерен, продолжительность и температуру обжига, можно получить ферриты с разными свойствами. По сравнению с магнитодиэлектриками ферриты обладают большей магнитной проницаемостью, порядка нескольких сотен или тысяч, и меньшими потерями.

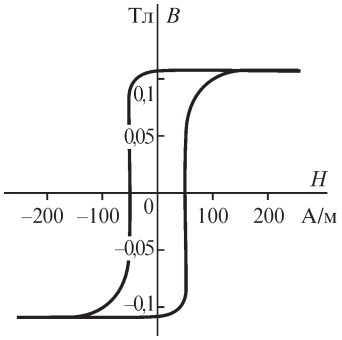


Рис. 19.49

Магниево-цинковые ферриты отличаются прямоугольной петлей гистерезиса (рис. 19.49). Прямоугольную петлю гистерезиса приобретают также никель-цинковые ферриты в результате механического сжатия, что связано с проявлением в них эффекта, обратного магнитострикции. Тороиды из феррита с прямоугольной петлей гистерезиса получили широкое применение в быстродействующих вычислительных машинах и в различных устройствах импульсной техники. Следует при этом иметь в виду, что

при весьма быстрых изменениях магнитного потока, как было отмечено выше, петля гистерезиса деформируется вследствие магнитной вязкости и вихревых токов.

19.14. Нелинейные характеристики и параметры катушки с сердечником из ферромагнитного материала

Характеристика индуктивной катушки $\Psi_L = F(i)$, выражающая зависимость потока самоиндукции от тока в катушке, является *линейной* (рис. 19.50), если магнитная проницаемость среды, в которой существует магнитный поток, не зависит от напряженности поля.

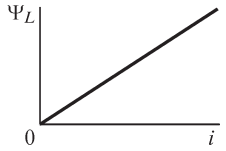


Рис. 19.50

Как было видно в предыдущем параграфе, магнитная проницаемость ферромагнитных материалов зависит от напряженности магнитного поля. Соответственно характеристика $\Psi_L = F(i)$ катушки с ферромагнитным сердечником оказывается *нелинейной*.

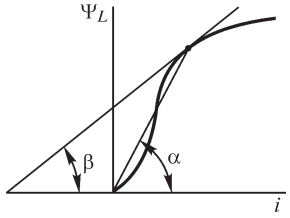


Рис. 19.51

Связь между потокосцеплением с витками катушки и током в катушке отражена в виде кривой на рис. 19.51 для случая возрастания тока от нуля при условии, что сердечник был предварительно размагничен. Эта кривая имеет тот же характер, что и первоначальная кривая намагничивания $B = f(H)$ материала сердечника, так как потокосцепление Ψ_L определяется значениями магнитной индукции B, а ток i — значениями напряженности поля. При однородном намагничивании замкнутого сердечника потокосцепление Ψ_L пропорционально B, ток i пропорционален H и кривые $\Psi_L = F(i)$ и $B = f(H)$ подобны. Потокосцепление Ψ_L не пропорционально току. Индуктивность такой катушки *зависит от тока*.

Динамическая характеристика катушки, получающаяся при достаточно быстрых изменениях тока, отличается от *статической характеристики* вследствие явлений вихревых токов и магнитной вязкости. Соответственно различают статическую индуктивность катушки

$$L_{\text{ст}} = \frac{\Psi_L}{i} = F_1(i),$$

определяемую из статической характеристики, и динамическую индуктивность

$$L_{\text{д}} = \frac{d\Psi_L}{di} = F_2(i),$$

определяемую из динамической характеристики.

При достаточно медленном изменении тока и потока динамические характеристики повторяют статические. Определяемую из статических характеристик индуктивность в виде производной $d\Psi_L/di$ называют дифференциальной. Обозначим ее через L_d. Для общности всегда будем говорить о динамической индуктивности $L_{\text{д}}$, имея в виду, что при очень медленном изменении тока она сов-

падает с дифференциальной, т. е. $L_д = L_d$. На рис. 19.51 приведены способы определения $L_{ст}$ и $L_д$:

$$L_{ст} = \frac{\Psi_L}{i} = k\,\mathrm{tg}\alpha = F_1(i) \quad \text{и} \quad L_д = \frac{d\Psi_L}{di} = k\,\mathrm{tg}\beta = F_2(i),$$

где k зависит от масштабов по осям абсцисс и ординат.

При периодических процессах динамическая характеристика имеет вид замкнутой петли, причем при достаточно низкой частоте тока она практически совпадает со статической петлей гистерезиса.

Когда нас интересует значение постоянного потокосцепления Ψ_L при заданном постоянном токе i, мы должны пользоваться статической индуктивностью. Если же необходимо вычислить ЭДС, индуцируемую в цепи при изменяющемся потоке, то следует пользоваться динамической индуктивностью.

Индуктивная катушка с ферромагнитным сердечником при отсутствии постоянного подмагничивания представляет собой нелинейный элемент с *симметричной характеристикой* $\Psi_L = F(i)$. На рис. 19.52 изображена кривая, выражающая связь между мгновенными потокосцеплением Ψ_L и током i в такой катушке при пренебрежении явлением гистерезиса, а также дана кривая динамической индуктивности $L_д = d\Psi_L/di$. На рис. 19.53 те же кривые приведены с учетом расхождения восходящей и нисходящей ветвей петли гистерезиса. Заметим, что вследствие появления вихревых токов в сердечнике связь между результирующим потокосцеплением Ψ_L и током в обмотке при переменном токе видоизменяется и отступает от петли, изображенной на рис. 19.53. Под влиянием вихревых токов углы петли закругляются (рис. 19.54), и чем больше их влияние, тем ближе кривая $\Psi_L = F(i)$ при периодическом токе к эллипсу.

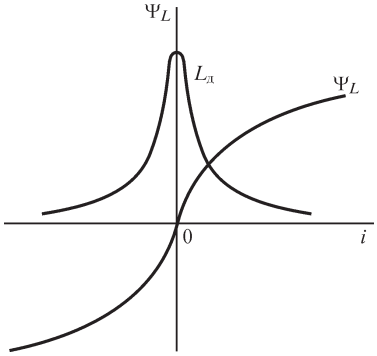


Рис. 19.52

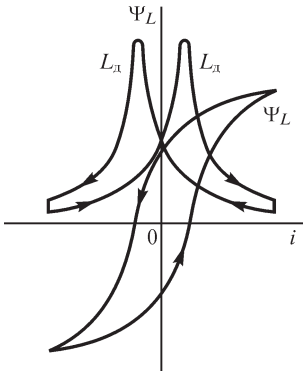


Рис. 19.53

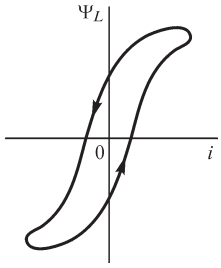


Рис. 19.54

Часто интересуются действующими напряжением U на зажимах катушки и током I в катушке. Зависимость $U = F(I)$ изображена на рис. 19.55. Эту зависимость также называют характеристикой катушки. Нелинейный характер этой зависимости является следствием насыщения сердечника катушки при больших токах. Существенно отметить, что такая характеристика зависит от форм кривых тока и напряжения. Так, характеристика, получаемая при синусои-

дальном напряжении, несколько отличается от характеристики, получаемой при синусоидальном токе.

Наложив на сердечник катушки дополнительную обмотку, питаемую постоянным током, получим *несимметричный* нелинейный индуктивный элемент, так как при одном направлении тока в основной обмотке МДС обеих обмоток будут суммироваться, а при другом — вычитаться.

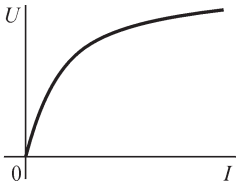


Рис. 19.55

Изменяя значение тока подмагничивания в дополнительной обмотке, получаем возможность изменять характеристику катушки со стороны зажимов основной обмотки, осуществляя таким образом управляемый нелинейный индуктивный элемент. Такие элементы могут быть использованы в различных нелинейных устройствах, в частности в ферромагнитном усилителе мощности, о чем будет сказано в дальнейшем.

19.15. Конденсаторы с нелинейной характеристикой

Если диэлектрическая проницаемость диэлектрика конденсатора не зависит от напряженности электрического поля, то и емкость C конденсатора не зависит от напряжения на конденсаторе. Это соблюдается для большинства конденсаторов, применяемых на практике. Зависимость заряда q такого конденсатора от напряжения u выражается прямой линией (рис. 19.56). Говорят, что такой конденсатор имеет *линейную характеристику* $q \quad f(u) = Cu$.

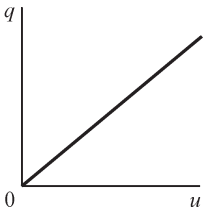


Рис. 19.56

Существуют вещества, называемые сегнетоэлектриками, для которых величина ε сильно зависит от напряженности электрического поля. При некоторых значениях напряженности поля относительная диэлектрическая проницаемость этих веществ достигает весьма больших значений. Если при отсутствии внешнего электрического поля сегнетоэлектрик не был поляризован, то при увеличении напряженности поля E электрическое смещение D возрастает соответственно кривой, изображенной на рис. 19.57. Связь между D и E оказывается *нелинейной*. Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ с увеличением E сначала возрастает, достигает максимума и затем убывает. При периодическом изменении напряженности поля в пределах от $+E_m$ до $-E_m$ наблюдается так называемое явление диэлектрического гистерезиса — кривая $D = f(E)$ при уменьшении напряженности поля не совпадает с соответствующей кривой (рис. 19.58) при увеличении напряженности поля. При уменьшении напряженности поля до нуля сохраняются некоторая *остаточная поляризация* и, соответственно, *остаточное смещение* D_r.

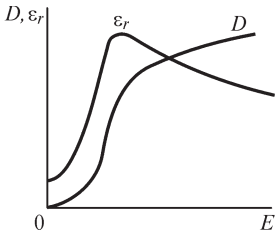


Рис. 19.57

Наименование «сегнетоэлектрики» связано с наименованием вещества сегнетова соль, для которого впервые были обнаружены указанные свойства. Сегнетова соль представляет собой двойную натрокалиевую соль винной кислоты

($NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$). Высокая поляризуемость наблюдается в кристаллах сегнетовой соли в направлении одной из ее кристаллографических осей. Эти особые свойства сегнетовой соли очень сильно зависят от температуры и проявляются только в диапазоне температуры от –18 до +22,5 °С. Впервые глубокие исследования свойств сегнетоэлектриков были проведены И. В. Курчатовым и П. П. Кобеко.

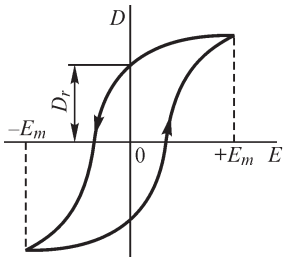


Рис. 19.58

К группе сегнетоэлектриков относится также метатитанат бария ($TiO_2 \cdot BaO$), сегнетоэлектрические свойства которого открыты советским ученым Б. М. Вулом. Относительная диэлектрическая проницаемость ε_r титаната бария при комнатной температуре превышает 1000. Он сохраняет свои сегнетоэлектрические свойства до температуры +80 °С.

Существование сегнетоэлектриков имеет принципиальное значение. Их свойства в группе диэлектриков в значительной степени аналогичны свойствам ферромагнитных веществ. Это дает основание дать физическое объяснение свойств сегнетоэлектриков, сходное с объяснением свойств ферромагнитных веществ (см. § 19.13). Предполагают, что отдельные области сегнетоэлектриков самопроизвольно поляризованы в определенном направлении. Внешне эта поляризация не проявляется, пока различные области поляризованы в противоположных направлениях. Под действием внешнего поля поляризация областей изменяется в направлении поля. Это изменение происходит очень мелкими скачками, соответствующими изменению направления поляризации отдельных областей. Вследствие этого изменения направления поляризации областей и происходит быстрое увеличение поляризованности вещества и значения электрического смещения D, что соответствует крутой части кривой $D = f(E)$ на рис. 19.57. При некоторой напряженности поля достигается насыщение, когда почти все области самопроизвольной поляризации оказываются поляризованными в направлении поля. Соответственно, при достаточно больших напряженностях поля величина D растет все медленней при увеличении E.

В опытах с кристаллом сегнетовой соли большой толщины, описанных И. В. Курчатовым, максимальное значение относительной диэлектрической проницаемости имело порядок 100 000 и насыщение достигалось уже при напряженности 30 В/см. У титаната бария насыщение достигается при значительно больших напряженностях поля. Температура 22,5 °С для сегнетовой соли и, соответственно, 80 °С для титаната бария характерна тем, что при ней тепловым движением разрушается самопроизвольная поляризация областей и сегнетоэлектрик приобретает электрические свойства обычных диэлектриков.

Если диэлектриком в конденсаторе является сегнетоэлектрик, то зависимость $q \quad f(u)$ заряда q на обкладке конденсатора от напряжения u между обкладками будет нелинейной и аналогичной по характеру зависимости $D \quad f(E)$, изображенной на рис. 19.57 и 19.58. В простейшем случае для плоского конденсатора, поле в котором однородно, кривые $q = f(u)$ и $D = f(E)$ различаются толь-

ко масштабами, так как для плоского конденсатора $q = Ds$ и $u = Ed$, где s — поверхность обкладки и d — толщина диэлектрика.

Говорят, что такой конденсатор обладает *нелинейной характеристикой* $q = f(u)$. На рис. 19.59 изображена эта характеристика, соответствующая увеличению напряжения при условии, что при отсутствии напряжения диэлектрик не был поляризован. При периодическом изменении напряжения в пределах от $+U_m$ до $-U_m$ характеристика имеет вид *петли гистерезиса,* представленной на рис. 19.60. Кривая $q \quad f(u)$, проходящая через вершины петель гистерезиса, соответствующих различным значениям амплитуд напряжения U_m, изображенная штриховой линией на рис. 19.60, близка к кривой $q \quad f(u)$ на рис. 19.59.

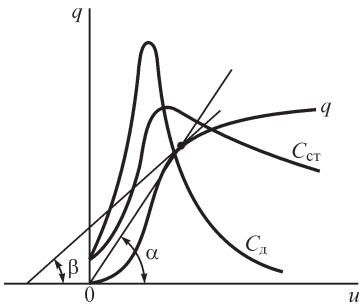


Рис. 19.59

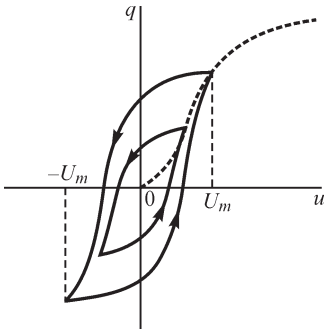


Рис. 19.60

Площадь петли гистерезиса в соответствующем масштабе $A = \oint u\,dq = abs$ (a и b — масштабы по осям абсцисс и ординат) равна потерям $W_г$ энергии в диэлектрике конденсатора за один период изменения напряжения. Эти потери называют потерями на диэлектрический гистерезис. В единице объема диэлектрика эти потери соответственно равны $W'_г = \oint E\,dD$ и определяются в соответствующих масштабах площадью петли на рис. 19.58. Наличие этих довольно значительных потерь в таких веществах, как титанат бария, значительно затрудняет использование их при переменных полях, особенно при высоких частотах.

Необходимо различать *статические характеристики* и *динамические характеристики* конденсатора.

Статическая характеристика определяет собой значения не изменяющихся во времени зарядов конденсатора при соответствующих значениях не изменяющихся во времени напряжений. Практически она может быть получена путем измерения ряда значений зарядов q, соответствующих ряду значений напряжений u, причем при переходе от одного значения напряжения u к другому необходима достаточная выдержка времени, чтобы новое значение заряда q успело установиться. Это новое значение заряда q устанавливается не сразу вследствие явления так называемой диэлектрической вязкости. При достаточно быстром изменении напряжения явление диэлектрической вязкости приводит к тому, что зависимость $q = f(u)$ будет отлична от зависимости, определяемой из

статической характеристики. Связь $q = f(u)$ при этом изображается динамической характеристикой. В частности, при быстрых периодических изменениях напряжения динамические петли гистерезиса отличаются от статических. При достаточно медленном изменении напряжения динамические характеристики практически совпадают со статическими.

Нелинейный характер зависимости $q = f(u)$ приводит к тому, что емкость такого конденсатора зависит от напряжения u на его обкладках. При этом различают так называемую статическую емкость, определяемую как отношение q к u:

$$C_{\text{ст}} = \frac{q}{u}$$

и динамическую емкость, определяемую как предел отношения приращения заряда Δq к соответствующему приращению напряжения Δu при стремлении последнего к нулю:

$$C_{\text{д}} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta u} = \frac{dq}{du}.$$

Статическая емкость определяется из статической характеристики и для конденсатора с нелинейной характеристикой является функцией напряжения. Динамическая емкость определяется из динамической характеристики, и так как вид последней зависит от скорости изменения напряжения при различных его значениях, то динамическая емкость является функцией не только значения напряжения, но, вообще говоря, и его производных по времени. Статическая и динамическая емкости конденсатора с нелинейной характеристикой различаются между собой также и при достаточно медленном изменении напряжения, хотя и определяются при этом из одной и той же статической характеристики, причем в этом случае динамическая емкость $C_{\text{д}}$ равна дифференциальной C_d. Это видно хотя бы из рис. 19.59, так как статическая емкость равна

$$C_{\text{ст}} = \frac{q}{u} = k\,\text{tg}\alpha = f_1(u),$$

динамическая же емкость

$$C_{\text{д}} = \frac{dq}{du} = k\,\text{tg}\beta = f_2(u),$$

где k зависит от масштабов по осям абсцисс и ординат.

Конденсаторы с нелинейной характеристикой находят применение в устройствах автоматического управления. О некоторых возможных использованиях нелинейных свойств таких конденсаторов будет сказано дальше.

19.16. Источники ЭДС и источники тока с нелинейными характеристиками

В § 3.8, т. I было указано, что внешняя характеристика $u = f(i)$ реального источника ЭДС может быть *нелинейной*. Это может быть результатом того, что или ЭДС e источника нелинейно зависит от тока i, или зависит от тока его внутрен-

нее сопротивление $r_{вн}$. Внешняя характеристика $i = f(u)$ реального источника тока также может быть *нелинейной*. На рис. 19.61 приведена нелинейная характеристика источника электромагнитной энергии с не изменяющимися во времени ЭДС и током. Выразив эту характеристику уравнением $u = e - i r_{вн}$, рассматриваем источник энергии как источник ЭДС. Если условно принять e = const (горизонтальная штриховая линия на рис. 19.61), то все изменение напряжения на зажимах источника при изменении тока i придется объяснить падением напряжения $i r_{вн}$ внутри источника, причем мы должны считать внутреннее сопротивление источника нелинейным, т. е. полагать $r_{вн} = f(i)$. На эквивалентной схеме такого источника (рис. 19.62) величина $r_{вн}$ является функцией тока i.

Выражая характеристику уравнением $i = \quad - u g_{вн}$, рассматриваем этот же источник энергии как источник тока. Если принять $\Im$ = const (вертикальная штриховая линия на рис. 19.61), то мы должны считать нелинейной внутреннюю проводимость источника $g_{вн} = f(u)$. На эквивалентной схеме такого источника (рис. 19.63) величина $g_{вн}$ является функцией напряжения u.

При расчете цепи, питаемой от таких источников, можно относить нелинейное внутреннее сопротивление источников ЭДС или, соответственно, нелинейную внутреннюю проводимость источников тока к приемной цепи, на которую работают источники. Очевидно, при этом приемная цепь становится нелинейной, даже если все остальные ее элементы имеют линейные характеристики. Источники же ЭДС и тока при этом рассматриваются как идеальные.

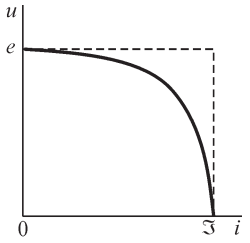


Рис. 19.61

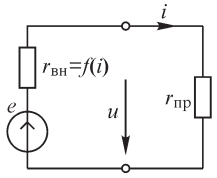


Рис. 19.62

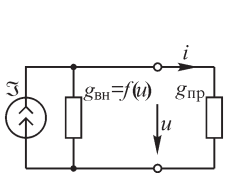


Рис. 19.63

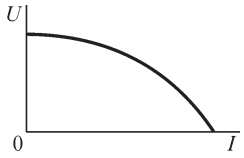


Рис. 19.64

Для источников периодической во времени ЭДС, например синхронных генераторов, реальная внешняя характеристика также оказывается *нелинейной*. На рис. 19.64 приведена внешняя характеристика трехфазного синхронного генератора при активной нагрузке ($\cos \varphi_{пр} = 1$), дающая зависимость действующего напряжения U на зажимах генератора от действующего тока I, отдаваемого генератором в приемник. Ход этой характеристики определяется реакцией якоря и активным и индуктивным падениями напряжения в обмотке статора от потоков рассеяния.

Глава двадцатая

Расчет нелинейных электрических и магнитных цепей при постоянном токе

20.1. О расчете нелинейных электрических цепей при постоянном токе

При постоянном токе неизменными во времени являются потокосцепления и заряды, поэтому индуцируемые в цепи ЭДС и токи в конденсаторах равны нулю. По этой причине в схемах распределение токов и напряжений определяется резисторами и активными сопротивлениями обмоток индуктивных катушек и активными проводимостями неидеальных конденсаторов.

Система топологических уравнений для напряжений и токов ветвей цепи аналогична таковой для линейной электрической цепи (см. § 3.12, т. I) и может быть составлена согласно первому и второму законам Кирхгофа. Соответственно, и методы составления этих уравнений, и форма записи одинаковы для линейных и нелинейных цепей.

В матричной форме системы уравнений для токов в узлах и сечениях, а также для напряжений в контурах будут иметь вид (см. § 3.13–3.15, т. I)

$$\mathbf{Ai} = -\mathbf{A}\mathfrak{I}; \quad \mathbf{Di} = -\mathbf{D}\mathfrak{I}; \quad \mathbf{Cu} = \mathbf{Ce}.$$

Здесь **A** — матрица соединений; **D** — матрица сечений; **C** — матрица контуров; $\mathbf{i} = \text{colon}\,(i_1, i_2, ..., i_p)$ — матрица-столбец токов в линейных и нелинейных элементах ветвей; $\mathfrak{I} = \text{colon}(\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \ldots, \mathfrak{I}_p)$ — матрица-столбец источников токов в ветвях; $\mathbf{e} = \text{colon}\,(e_1, e_2, ..., e_p)$ — матрица-столбец источников ЭДС в ветвях. Эти системы должны быть дополнены уравнениями, которые связывают напряжения и токи в элементах цепи. Для нелинейных цепей напряжения и токи связаны между собой нелинейными соотношениями, и поэтому в целом система уравнений цепи оказывается нелинейной. В матричной форме запишем эти нелинейные соотношения в виде

$$\text{colon}[f_1(i_1, u_1);\ f_2(i_2, u_2);\ \ldots;\ f_p(i_p, u_p)] = \mathbf{0}$$

или $\mathbf{F}(\mathbf{i}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

Для постоянных токов все уравнения будут алгебраическими, причем система уравнений с учетом нелинейных зависимостей между токами и напряжениями будет нелинейной.

Аналитическое решение системы нелинейных уравнений, даже когда нелинейные ВАХ заданы в аналитической форме, является весьма трудной задачей, и во многих случаях такое решение вообще отсутствует. По этой причине для решения задач теории нелинейных цепей приходится широко использовать различные приближенные методы решения, такие как метод итераций и графоаналитические методы. В последующих параграфах эти методы будут рассмотрены. Их рассмотрение представляет интерес также и потому, что во многих случаях сами характеристики нелинейных элементов бывают заданы графически.

При решении нелинейных алгебраических уравнений электрических цепей может представлять интерес также проблема единственности решения. Рассмотрение особенностей вольт-амперных характеристик показывает, что вопрос единственности решения существенно зависит от типа ВАХ и от способа соединения нелинейного элемента с источником энергии или с внешней по отношению к этому элементу частью цепи. Как будет показано далее, выбором соответствующего дерева графа и отнесением ветвей с управляемыми током ВАХ к ветвям дерева и ветвей с управляемыми напряжением ВАХ — к связям графа можно обеспечить единственность решения.

В случаях, когда в цепи такое разделение невозможно, может иметь место множество состояний равновесия (множество решений). Однако, как увидим в последней главе этой части, состояния равновесия не всегда будут устойчивыми. В частности, неустойчивые состояния могут быть при наличии падающих участков в ВАХ нелинейных элементов. Исследование устойчивости потребует учета индуктивных и емкостных элементов цепи, так как при этом необходимо будет рассматривать переходные процессы, возникающие при отклонениях от состояния равновесия. Эти более сложные вопросы будут рассмотрены в гл. 22.

Сложность решения системы нелинейных уравнений электрических цепей постоянного тока предопределяет широкое применение для анализа процессов в них ЦВМ. Однако и эти мощные средства вычислений не решают в полной мере ряда проблем, среди которых следует отметить проблему получения полной совокупности решений системы нелинейных уравнений цепи, без знания которых невозможно дальнейшее исследование свойств цепи.

20.2. Последовательное, параллельное и смешанное соединения участков электрической цепи, содержащих нелинейные элементы и не содержащих источников ЭДС

Пусть электрическая цепь (рис. 20.1, *а*) состоит из двух последовательно соединенных нелинейных элементов, характеристики которых $u_1 = F_1(i_1)$ и $u_2 = F_2(i_2)$ известны. В этом случае

$$u = u_1 + u_2; \quad i_1 = i_2 = i.$$

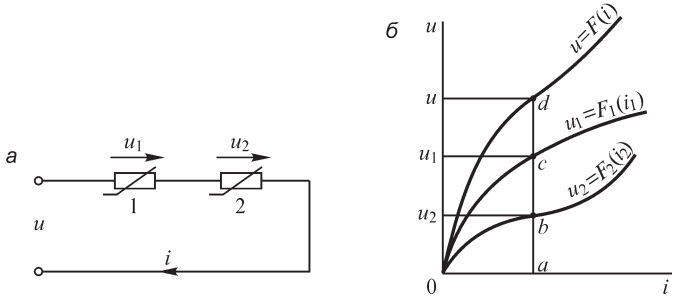


Рис. 20.1

Изобразив на рис. 20.1, *б* заданные характеристики отдельных элементов в виде кривых и складывая ординаты этих кривых для разных значений тока,

получаем точки характеристики $u = F(i)$, относящейся ко всей цепи в целом. Например, $ab + ac = ad$. Располагая этой характеристикой, уже нетрудно находить значения i, u_1 и u_2 при любом заданном значении u. Очевидно, этот метод может быть распространен на любое число последовательно включенных нелинейных и линейных элементов.

Значения i_1 и u_2 можно найти также, если нелинейный элемент *1* и идеальный источник ЭДС рассмотреть в качестве реального источника с нелинейной вольт-амперной характеристикой (рис. 20.2, *а*). Эта характеристика описывается формулой $u_0 = E_0 - u_1$, где $u_1 = F_1(u_1)$, и изображается на рис. 20.2, *б* падающей кривой. Очевидно, условие равенств $u_2 \quad u_0$ и $i_1 = i_2 = i$, при котором имеет место равновесие состояния, и даст решение уравнения цепи. Графически точка равновесия есть точка *b* пересечения ВАХ реального источника (заключенного на рис. 20.2, *а* внутри вычерченного штриховой линией прямоугольника) и ВАХ нелинейного элемента *2*. Напряжение u_1 равно отрезку *bd*, напряжение u_2 — отрезку *ab*, а ток — отрезку 0*a*. На рис. 20.2, *б* штриховой линией изображена суммарная ВАХ из рис. 20.1, *б*.

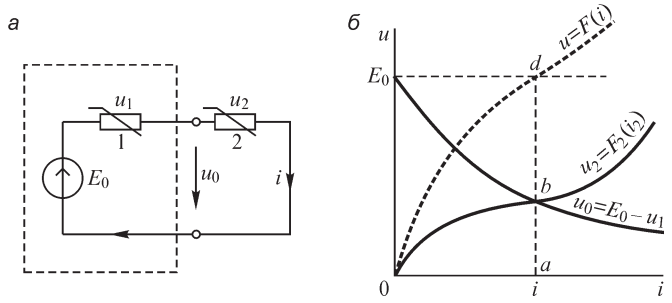


Рис. 20.2

Пусть электрическая цепь (рис. 20.3) состоит из двух параллельно соединенных нелинейных элементов с известными характеристиками. В этом случае

$$i = i_1 + i_2; \quad u_1 = u_2 = u.$$

Складывая на рис. 20.4 абсциссы кривых $u_1 = F_1(i_1)$ и $u_2 = F_2(i_2)$, получаем точки характеристики $u = F(i)$, относящейся ко всей цепи в целом. Например, $ab + ac = ad$.

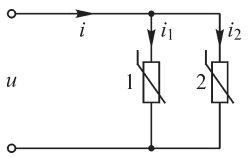


Рис. 20.3

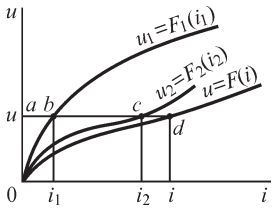


Рис. 20.4

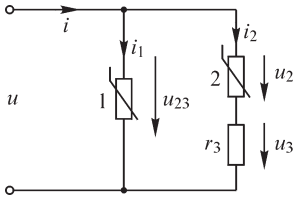


Рис. 20.5

При смешанном соединении, состоящем из последовательного и параллельного соединений отдельных участков цепи, для получения характеристики всей

цепи в целом могут быть использованы те же приемы. На рис. 20.5 приведен пример смешанного соединения трех элементов, причем один из них, а именно третий элемент, обладает линейной характеристикой. Имеем уравнения

$$u = u_{23} = u_2 + u_3; \quad u_3 = r_3 i_2;$$
$$i = i_1 + i_2 \quad (i_3 = i_2;\ u_{23} = u_1 = u).$$

Складываем сначала ординаты кривых $u_2 = F_2(i_2)$ и $u_3 = r_3 i_3 = r_3 i_2$ (рис. 20.6). Получаем кривую $u = F_{23}(i_2)$, изображающую характеристику последовательно соединенных второго и третьего элементов. Например, $ab + ac = ad$. Складывая затем абсциссы кривых $u = F_{23}(i_2)$ и $u = F_1(i_1)$, изображающих характеристики параллельно соединенных ветвей, получаем характеристику $u = F(i)$ всей цепи. Например, $gk + gd = gm$. Располагая совокупностью характеристик на рис. 20.6, нетрудно найти напряжения и токи на всех участках цепи, если задано одно из этих напряжений (u_1, u_2 или u_3) или один из этих токов (i, i_1 или i_2).

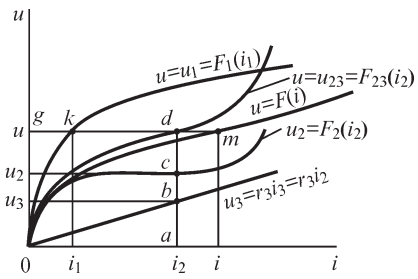


Рис. 20.6

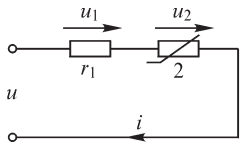


Рис. 20.7

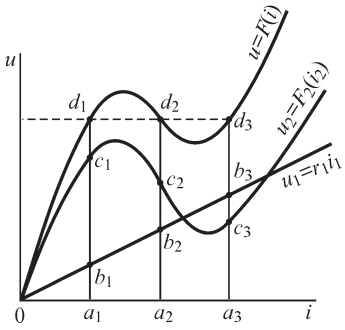


Рис. 20.8

В рассмотренных примерах все характеристики имели возрастающий характер, т. е. как статические, так и динамические сопротивления нелинейных элементов были положительными во всем диапазоне изменения токов в этих элементах. При этом решение задачи получалось однозначным, т. е. при заданном значении напряжения на зажимах цепи устанавливаются определенные значения всех токов. При наличии характеристик с падающими участками, при которых динамическое сопротивление отрицательное, может оказаться, что решение будет многозначным, т. е. при заданном напряжении может быть несколько совокупностей токов в ветвях, удовлетворяющих в равной мере уравнениям Кирхгофа. Иными словами, может существовать несколько состояний равновесия. Рассмотрим пример цепи (рис. 20.7), состоящей из последовательно соединенных двух участков, первый из которых обладает линейной характеристикой $u_1 \quad r_1 i_1$ ($r_1 = \text{const}$), а второй — нелинейной характеристикой $u_2 = F_2(i_2)$ с падающим участком (рис. 20.8). При этом $i_1 = i_2 = i$. В рассматриваемом случае результирующая характеристика $u = F(i)$ также имеет падающий участок.

Если приложенное к зажимам цепи напряжение u таково, что горизонтальная линия (на рис. 20.8 штриховая линия), определяемая этим напряжением, пересекает характеристику в нескольких точках, то возможно несколько состояний

равновесия. На рис. 20.8 токи при равновесии определяются точками a_1, a_2, a_3 и соответствующее им напряжение u_1 — точками b_1, b_2 и b_3, а напряжение u_2 — точками c_1, c_2 и c_3. Вопрос об устойчивости этих состояний будет рассмотрен в гл. 22.

20.3. Последовательное, параллельное и смешанное соединения участков электрической цепи, содержащих нелинейные элементы и источники ЭДС

Пусть имеется ветвь с последовательно соединенными нелинейным элементом и источником ЭДС (рис. 20.9), причем заданы характеристика $u_{ab} = F(i)$ нелинейного элемента, значение и направление ЭДС e. Напряжение на всей ветви между точками a и c равно

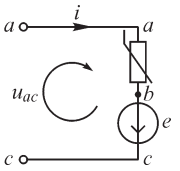


Рис. 20.9

$$u_{ac} = u_{ab} + u_{bc} = u_{ab} - e_{bc}.$$

Это соотношение получается, если применить второй закон Кирхгофа к контуру, указанному на рис. 20.9 круговой стрелкой:

$$e_{bc} = u_{ca} + u_{ab} = -u_{ac} + u_{ab} \quad \text{или} \quad u_{ac} = u_{ab} - e_{bc}.$$

Если ЭДС e действует в направлении выбранного положительного направления тока, т. е. $e_{bc} > 0$, то при положительном токе она способствует прохождению тока и при $e_{bc} < u_{ab}$ уменьшает значение u_{ac}. На рис. 20.10, *а* изображена характеристика нелинейного элемента $u_{ab} = F(i)$ и отложена прямая, соответствующая $e_{bc} > 0$. Здесь же нанесена результирующая характеристика $u_{ac} = F_1(i)$ для всей ветви.

На рис. 20.10, *б* произведено то же построение при $e_{bc} < 0$, т. е. когда ЭДС источника в рассматриваемой ветви действует против принятого положительного направления тока.

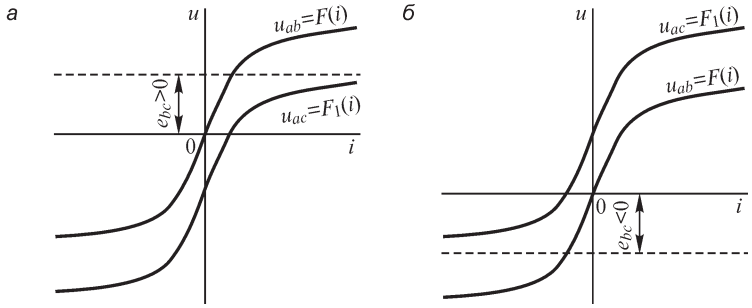


Рис. 20.10

Предположим, что электрическая цепь (рис. 20.11) между зажимами ab состоит из любого числа последовательно и параллельно соединенных участков, содержащих линейные и нелинейные элементы и источники ЭДС. К зажимам a и b приложено заданное напряжение u_{ab}. Задаемся положительными направлениями токов во всех ветвях цепи. Направления и значения ЭДС во всех ветвях, а также характеристики всех элементов заданы. Строим только что изложенным методом результирующие характеристики всех ветвей (рис. 20.12–20.16).

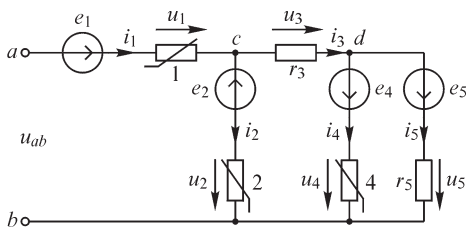


Рис. 20.11

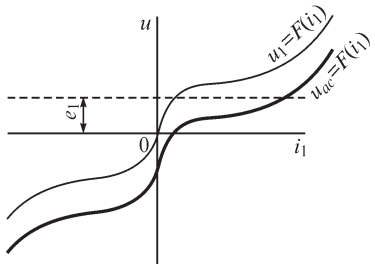


Рис. 20.12

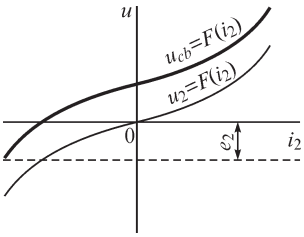


Рис. 20.13

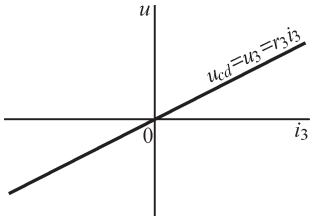


Рис. 20.14

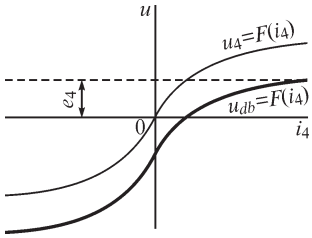


Рис. 20.15

Располагая этими характеристиками, пользуемся дальше для расчета смешанного соединения теми приемами, которые были изложены в предыдущем параграфе. Так, для цепи, изображенной на рис. 20.11, складываем абсциссы кривых $u_{db} = F(i_4)$ и $u_{db} = F(i_5)$, изображающих характеристики ветвей d–4–b и d–5–b, так как эти ветви соединены параллельно. Получаем характеристику $u_{db} = F(i_3)$ этих параллельно соединенных ветвей, изображенную на рис. 20.17. Складывая затем ординаты кривой $u_{db} = F(i_3)$ с ординатами кривой $u_{cd} = u_3 = r_3 i_3$, так как третий участок соединен последовательно с параллельно соединенными четвертым и пятым участками, получаем характеристику всех этих трех участков $u_{cb} = F(i_3)$ (рис. 20.18).

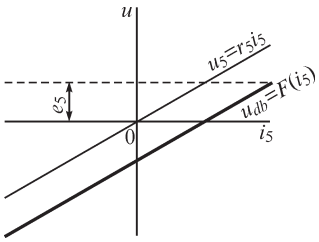


Рис. 20.16

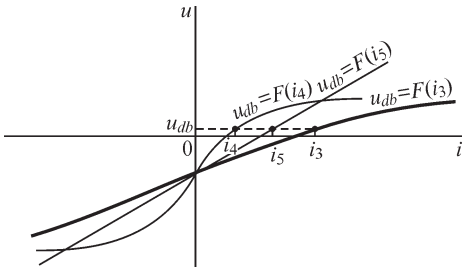


Рис. 20.17

К абсциссам этой кривой прибавляем абсциссы кривой $u_{cb} = F(i_2)$, изображающей характеристику второй ветви. Получаем характеристику $u_{cb} = F(i_1)$ части цепи между зажимами c и b (рис. 20.19). Наконец, складывая ординаты этой кривой с ординатами кривой $u_{ac} = F(i_1)$, находим характеристику всей цепи между зажимами a и b (рис. 20.20). Располагая построенными характеристиками,

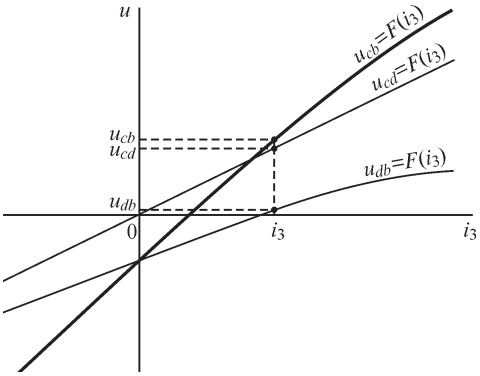


Рис. 20.18

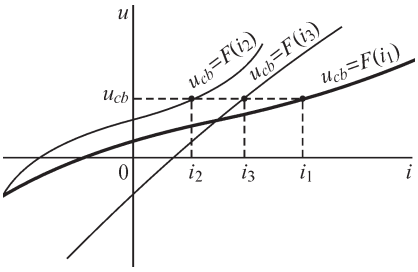


Рис. 20.19

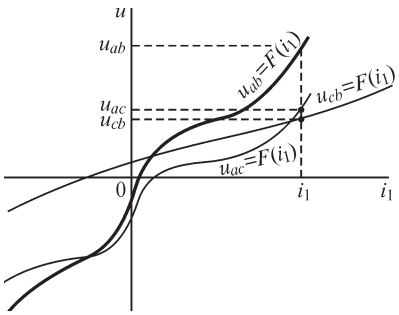


Рис. 20.20

легко находим токи во всех ветвях и напряжения на всех ветвях, если задано приложенное ко всей цепи напряжение u_{ab}. Если задан один из токов или задано напряжение на каком-либо участке ветви, то из этих характеристик определяются токи и напряжения во всех остальных ветвях и напряжение u_{ab} на зажимах всей цепи. Штриховыми линиями на рис. 20.17–20.20 показано решение для одного из таких частных режимов. Заметим, что если зажимы a и b замкнуты накоротко, то токи в цепи возникают только под действием всех источников ЭДС, содержащихся в самой цепи. При этом $u_{ab} = 0$, и, следовательно, решение определяется точкой пересечения характеристики $u_{ab} = F(i_1)$ на рис. 20.20 с осью абсцисс.

20.4. Расчет сложной электрической цепи с одним нелинейным элементом

Для расчета электрической цепи любой сложности, в общем случае не образованной последовательно или параллельно соединенными участками, имеющей любое число источников ЭДС, но содержащей только один нелинейный элемент, может быть применен метод эквивалентного генератора.

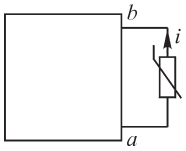


Рис. 20.21

Пусть нелинейный элемент включен в ветвь ab сложной цепи. Выделим на рис. 20.21 эту ветвь, изобразив всю остальную часть сложной цепи условно прямоугольником. Часть цепи, содержащаяся внутри этого прямоугольника, состоит только из линейных элементов и источников ЭДС, и, следовательно, к ней в отдельности применим принцип наложения. Принцип наложения не применим к ветви ab с нелинейным элементом и вследствие этого не применим ко всей цепи в целом, содержащей этот элемент.

Принцип наложения не применим к ветви с нелинейным элементом потому, что сопротивление r этого элемента зависит от тока i в нем. В самом деле, пред-

положим, что искомый действительный режим с током i в нелинейном элементе мы разложили на два частных режима с токами i' и i'' в этом элементе, причем $i = i' + i''$. Напряжения на нелинейном элементе в действительном и в этих частных режимах равны: $u \quad ri$, $u' = r'i'$ и $u'' = r''i''$. Так как r зависит от i, то, вообще говоря, $r' \neq r''$ и, следовательно, $u \neq u' + u''$. Поэтому, налагая друг на друга частные режимы, мы не получим действительного режима с током i и напряжением u.

Однако результат наложения будет правильным, если в одном из частных режимов ток i' в нелинейном элементе и напряжение u' на нем отсутствуют, т. е. $i' = 0$ и $u' = 0$, а в другом частном режиме ток i'' равен току i в действительном режиме, а следовательно, и напряжение u'' равно напряжению u в действительном режиме. При этом имеем

$$i = 0 + i'' \quad \text{и} \quad u = 0 + u''.$$

Для того чтобы эти два частных режима при наложении давали действительные токи и напряжения во всей сложной цепи, содержащей данный нелинейный элемент, необходимо, чтобы ЭДС e'_k и e''_k в этих режимах в любой k-й ветви в сумме были равны действительной ЭДС e_k в этой ветви, т. е. чтобы было $e'_k + e''_k = e_k$.

Всем этим требованиям удовлетворяет метод эквивалентного генератора. Пользуясь этим методом, введем для получения требуемого первого режима в ветвь ab с нелинейным элементом такую дополнительную ЭДС e'_0, чтобы при действии во всех остальных ветвях ЭДС e'_k, равных заданным ЭДС e_k, ток в нелинейном элементе стал равным нулю: $i' = 0$. Пусть характеристика нелинейного элемента такова, что при этом и $u' \quad 0$. ЭДС e'_0 равна и противоположна по знаку напряжению u_0, создаваемому всеми заданными источниками ЭДС при размыкании ветви с нелинейным элементом в месте разрыва этой ветви, т. е. $e'_0 = -u_0$.

Во втором частном режиме введем в ветвь с нелинейным элементом ЭДС $e''_0 = -e'_0 = u_0$, а все заданные источники ЭДС замкнем накоротко, сохранив в ветвях их внутренние сопротивления, т. е. примем $e''_k = 0$.

Налагая эти два частных режима друг на друга, получаем во всех ветвях линейной части цепи

$$e'_k + e''_k = e_k + 0 = e_k; \quad i'_k + i''_k = i_k$$

и в ветви ab

$$e'_0 + e''_0 = 0; \quad u' + u'' = 0 + u'' = u; \quad i' + i'' = 0 + i'' = i,$$

т. е. получаем искомый действительный режим во всей цепи.

Обозначая, как и ранее, через $r_г$ сопротивление всей линейной части цепи между зажимами a и b при замкнутых накоротко источниках ЭДС в ней, получаем

$$i = \frac{u_0}{r_г + r(i)},$$

где $r(i)$ — сопротивление нелинейного элемента при токе i в нем. Таким образом, всю сложную линейную часть цепи заменяем эквивалентным генератором ЭДС $e''_0 = u_0$ с внутренним сопротивлением $r_г$ (рис. 20.22). Вычисления величин u_0 и $r_г$ являются чисто линейными задачами и могут быть выполнены изложенными в § 5.8–5.16, т. 2 методами. Отыскание тока i в цепи, представленной на

рис. 20.22, легко выполняется графическим построением, изложенным в § 20.3, если задана кривая, изображающая характеристику $u = F(i)$ нелинейного элемента.

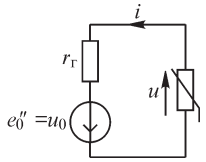


Рис. 20.22

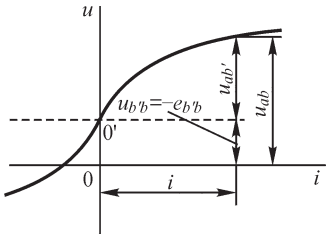


Рис. 20.23

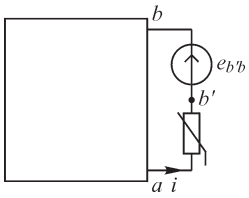


Рис. 20.24

В вышеизложенном была сделана только одна оговорка, что характеристика $u = F(i)$ проходит через начало координат, т. е. что при $i = 0$ также и $u = 0$. Если это не имеет места (рис. 20.23), то, перенеся ось абсцисс так, чтобы характеристика прошла через новое начало координат 0′, видим, что действительный нелинейный элемент с характеристикой $u_{ab} = F(i)$, не проходящей через начало координат, может быть заменен последовательным соединением (рис. 20.24) нелинейного элемента с характеристикой $u_{ab'} = F'(i) = F(i) - u_{b'b} = F(i) + e_{b'b}$, проходящей через начало координат, и источника ЭДС $e_{b'b}$ с внутренним сопротивлением, равным нулю. Если этот источник ЭДС отнести к линейной части цепи, то по отношению к зажимам a и b' будут справедливы все приведенные рассуждения.

20.5. Расчет сложной электрической цепи с двумя нелинейными элементами

Пусть сколь угодно сложная цепь с источниками ЭДС содержит две ветви ab и cd с нелинейными элементами. Выделим на рис. 20.25 эти ветви, обозначив всю остальную линейную часть цепи, представляющую собой активный линейный четырехполюсник, условно прямоугольником. Используем идею метода, изложенного в предыдущем параграфе, в применении к этой цепи.

Введем в ветви ab и cd такие ЭДС e'_{01} и e'_{02}, чтобы при действии в линейной части цепи всех заданных ЭДС токи в обоих нелинейных элементах *одновременно* стали равными нулю (рис. 20.26). Пусть характеристики обоих нелинейных элементов таковы, что напряжения на них равны нулю при отсутствии токов в них. В таком случае ЭДС e'_{01} и e'_{02} равны и противоположны по знаку напряжениям u_{01} и u_{02}, возникающим при *одновременном* размыкании обеих ветвей с нелинейными элементами в местах разрыва этих ветвей (рис. 20.27). Отыскание этих напряжений является линейной задачей.

Если теперь замкнуть накоротко все заданные источники ЭДС в линейной части цепи ($e''_k = 0$), сохранив в ветвях внутренние сопротивления этих источников, и ввести в ветви ab и cd источники с ЭДС $e''_{01} = -e'_{01} = u_{01}$ и $e''_{02} = -e'_{02} = u_{02}$ (рис. 20.28), то на основе рассуждений, приведенных в предыдущем параграфе, можно утверждать, что токи в нелинейных элементах в этом режиме будут рав-

ны искомым токам i_{ab} и i_{cd}, возникающим в них в действительной сложной цепи (рис. 20.25) под действием всех заданных ЭДС.

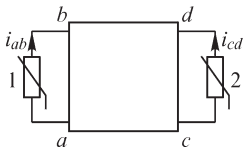


Рис. 20.25

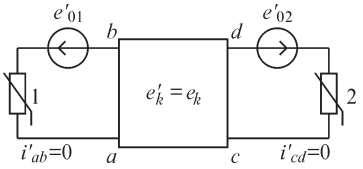


Рис. 20.26

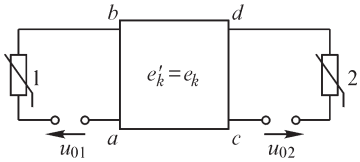


Рис. 20.27

Упрощение задачи заключается в том, что вместо большого числа заданных ЭДС, действующих в ветвях сложной цепи, теперь имеем только две эквивалентные ЭДС e''_{01} и e''_{02}, включенные в ветви с нелинейными элементами. При этом вся сложная линейная часть цепи стала пассивным четырехполюсником.

Таким образом, задача сводится к расчету линейной цепи, изображенной на рис. 20.27, и к расчету цепи, приведенной на рис. 20.28. Токи во всех ветвях получаются суммированием токов, найденных в этих двух задачах, в частности, токи в нелинейных ветвях получаются сразу из решения второй задачи, так как в первой задаче они равны нулю.

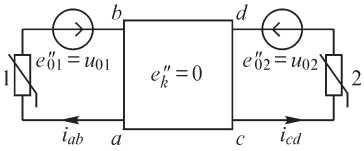


Рис. 20.28

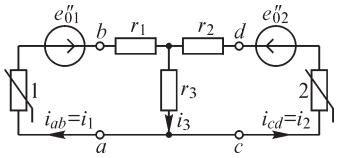


Рис. 20.29

Решение второй нелинейной задачи (рис. 20.28) выполняется путем замены линейного пассивного четырехполюсника его Т-образной эквивалентной схемой (рис. 20.29). Параметры r_1, r_2, r_3 этой эквивалентной схемы определяются методами, изложенными в § 13.2 и 13.3. Цепь, изображенная на рис. 20.29, легко рассчитывается с помощью графических построений, приведенных в § 20.3.

20.6. Расчет сложной электрической цепи с тремя нелинейными элементами

Пусть сколь угодно сложная электрическая цепь с источниками ЭДС содержит три ветви, *ab*, *cd* и *gk*, с нелинейными элементами. Выделим на рис. 20.30 эти ветви, обозначив всю остальную линейную часть условно шестиугольником. Эта часть, имеющая три пары зажимов, причем в каждой паре один является входным, а другой — выходным по отношению к соответствующей внешней цепи (или ветви), представляет собой так называемый ш е с т и п о л ю с н и к. В данном случае шестиполюсник является *активным*, так как содержит внутри себя источники ЭДС.

Введем во все вынесенные нелинейные ветви такие ЭДС e'_{01}, e'_{02} и e'_{03}, чтобы при действии всех заданных ЭДС токи i_{ab}, i_{cd} и i_{gk} в нелинейных элементах *одновременно* были равны нулю. Эти ЭДС e'_{01}, e'_{02} и e'_{03} равны по значению и противо-

положны по знаку напряжениям u_{01}, u_{02} и u_{03}, которые появляются в местах размыкания ветвей *ab*, *cd* и *gk* под действием всех заданных ЭДС.

Если теперь ввести в нелинейные ветви ЭДС $e''_{01} = -e'_{01} = u_{01}$, $e''_{02} = -e'_{02} = u_{02}$, $e''_{03} = -e'_{03} = u_{03}$ и замкнуть накоротко все заданные источники ЭДС, сохранив в соответствующих ветвях их внутренние сопротивления (рис. 20.31), то токи в нелинейных ветвях будут равны искомым токам i_{ab}, i_{cd} и i_{gk} в действительной задаче. При этом шестиполюсник между зажимами *a* и *b*, *c* и *d*, *g* и *k* является пассивным.

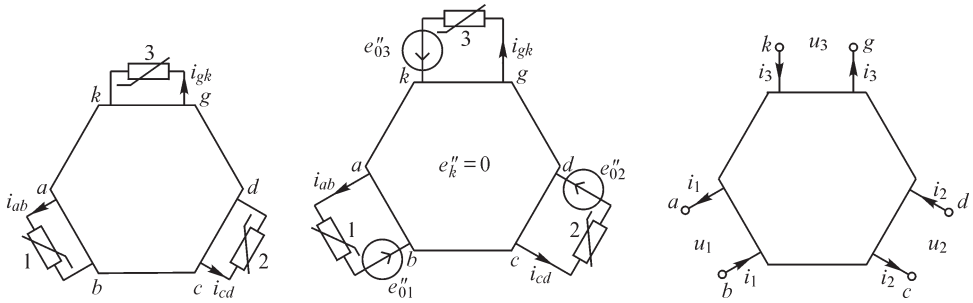


Рис. 20.30 Рис. 20.31 Рис. 20.32

Для пассивного линейного шестиполюсника (рис. 20.32) имеют место уравнения

$$u_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 + R_{13}i_3;$$
$$u_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 + R_{23}i_3;$$
$$u_3 = R_{31}i_1 + R_{32}i_2 + R_{33}i_3,$$

где $u_1 = u_{ba}$, $u_2 \quad u_{dc}$ и $u_3 = u_{kg}$ — приложенные извне к зажимам шестиполюсника напряжения.

Эти уравнения легко получить, использовав принцип наложения. Если приложить напряжение u'_1 только к зажимам *b* и *a*, а вторую и третью внешние цепи разомкнуть ($i_2 = 0$ и $i_3 = 0$), то будем иметь

$$u'_1 = R_{11}i_1; \;\; u'_2 = R_{21}i_1; \;\; u'_3 = R_{31}i_1.$$

Приложив напряжение u''_2 к зажимам *d* и *c* и разомкнув первую и третью внешние цепи, получим

$$u''_1 = R_{12}i_2; \;\; u''_2 = R_{22}i_2; \;\; u''_3 = R_{32}i_2.$$

Наконец, при действии внешнего напряжения u'''_3 между зажимами *k* и *g* при разомкнутых внешних первой и второй цепях имеем

$$u'''_1 = R_{13}i_3; \;\; u'''_2 = R_{23}i_3; \;\; u'''_3 = R_{33}i_3.$$

Накладывая эти три режима и полагая $u'_1 + u''_1 + u'''_1 = u_1$, $u'_2 + u''_2 + u'''_2 = u_2$ и $u'_3 + u''_3 + u'''_3 = u_3$, получим написанные выше уравнения пассивного линейного шестиполюсника. Входящие в эти уравнения параметры определяются расчетным или опытным путем из только что рассмотренных трех частных режимов.

На основе принципа взаимности можно утверждать, что $R_{21} = R_{12}$, $R_{32} = R_{23}$ и $R_{31} = R_{13}$. Таким образом, уравнения шестиполюсника содержат только шесть

независимых параметров, и, следовательно, простейшая *эквивалентная схема* шестиполюсника должна иметь шесть элементов. На рис. 20.33 изображена одна из таких возможных схем, имеющая три независимых контура с контурными токами i_1, i_2 и i_3. Уравнения шестиполюсника и представляют собой уравнения контурных токов для этой эквивалентной схемы.

Собственные сопротивления контуров равны

$$R_{11} = r_1 + r_4 + r_5; \quad R_{22} = r_2 + r_5 + r_6; \quad R_{33} = r_3 + r_6 + r_4.$$

Взаимные сопротивления R_{12}, R_{23} и R_{31} отрицательны, так как положительные направления контурных токов в общих ветвях противоположны, а в уравнениях шестиполюсника все члены нами написаны со знаком «плюс». Имеем

$$R_{12} = R_{21} = -r_5; \quad R_{23} = R_{32} = -r_6; \quad R_{13} = R_{31} = -r_4.$$

Из этих уравнений определяются сопротивления элементов эквивалентной схемы через параметры шестиполюсника.

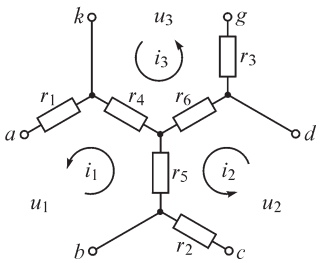


Рис. 20.33

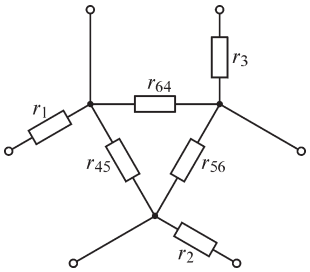


Рис. 20.34

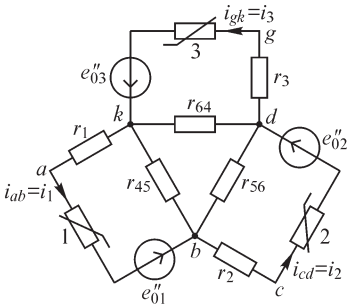


Рис. 20.35

Заменим соединение звездой сопротивлений r_4, r_5 и r_6 на рис. 20.33 эквивалентным соединением треугольником. Получим другую возможную эквивалентную схему шестиполюсника (рис. 20.34), использовав которую, приведем схему на рис. 20.31 к виду, изображенному на рис. 20.35.

В этой схеме ветви с индексами 1 и 45, 2 и 56, а также 3 и 64 соединены попарно параллельно, а образованные этими парами ветвей контуры соединены между собой последовательно. В трех ветвях содержатся нелинейные элементы и источники ЭДС. Такая цепь легко рассчитывается с помощью графических построений, приведенных в § 20.3.

Отметим, что в частном случае, когда в заданной действительной сложной цепи все три ветви с нелинейными элементами сходятся к одному узлу, образуя соединение звездой, при одновременном размыкании этих ветвей узел оказывается отключенным от всей цепи, его потенциал по отношению к другим точкам цепи получается неопределенным, а следовательно, неопределенными оказываются и напряжения на местах разрыва. Однако в этом случае достаточно разорвать только две ветви с нелинейными элементами, так как ток в третьей ветви с нелинейным элементом при этом также будет равен нулю. Соответственно, при расчете токов в нелинейных элементах достаточно будет ввести только два эквивалентных источника ЭДС, например e''_{01} и e''_{02}. В случае, когда характеристика

нелинейного элемента не проходит через начало координат, этот нелинейный элемент может быть заменен нелинейным элементом с характеристикой, проходящей через начало координат, и источником ЭДС, как было показано в конце § 20.4.

20.7. Расчет сложной нелинейной цепи постоянного тока численными методами

Наглядность и простота графоаналитического метода не компенсируют ограниченных его возможностей при расчете сложных нелинейных цепей. С развитием вычислительной техники широкое применение находят различные численные методы расчета нелинейных цепей, которые дают возможность рассчитать весьма сложные схемы. Для расчета нелинейных цепей наибольшее распространение получил метод последовательных приближений (метод итераций).

Наиболее просто метод последовательных приближений можно применить для решения уравнений, записанных в виде

$$x = f(x).$$

Тогда

$$x^{k+1} = f(x^k), \text{ а } x_{\text{иск}} = \lim_{k\to\infty} x^k.$$

Здесь x^k и x^{k+1} — значения интересующей нас (искомой) величины $x_{\text{иск}}$ на k-м и $(k + 1)$-м шагах итераций; $f(x^k)$ — значение нелинейной функции на k-м шаге итераций. Графически метод простых итераций можно представить, изобразив на плоскости функции $f(x)$ и $x = x$. Точка пересечения этих функций и есть решение уравнения. Траектория сближения к этой точке равновесия и отражает значения $f(x^k)$ и x^k при различных k. На рис. 20.36 изображен случай, когда пересечение указанных функций происходит в трех точках, т. е. существуют три решения уравнения (три точки равновесия, a, b, c). Итерационный процесс следует начинать с произвольного значения x, обозначенного на рис. 20.36 буквой x^0. На этом рисунке изображены итерационные процессы для четырех различных начальных значений x^0, а именно x_1^0, x_2^0, x_3^0 и x_4^0. Итерационный процесс может сходиться к точке равновесия, если характер функции $f(x)$ в окрестности точки равновесия позволяет это (случай с x_2^0, x_3^0, x_4^0). Но итерационный процесс может и не сходиться к точке равновесия (случай с x_1^0 в окрестности точки a). Достаточным условием сходимости является неравенство $|f'(x)| < 1$ в окрестности точки равновесия.

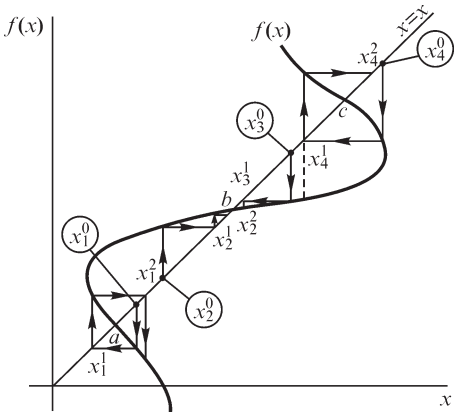


Рис. 20.36

Рис. 20.36 показывает, что метод простых итераций не всегда обеспечивает сходимость процесса итераций и что для нахождения всех решений следует

задавать подходящие, наперед неизвестные начальные приближения. При рассмотрении системы уравнений цепи весьма важно сформировать уравнение $x = f(x)$ относительно таких величин, которые дают возможность однозначно определить $f(x)$ при данном x. Например, на рис. 20.36 для значения x_4^0 можно найти два значения $f(x_4^0)$. Применительно к ВАХ элементов электрических цепей это условие проанализируем на примере последовательно соединенных источника ЭДС E и двух нелинейных элементов (см. рис. 20.2, *а*).

Уравнения цепи имеют вид

$$E = u_1 + u_2;\ \ u_1 = f_1(i)\ \ \text{или}\ \ i = f_3(u_1);\ \ u_2 = f_2(i)\ \ \text{или}\ \ i = f_4(u_2).$$

Здесь, согласно принятому в § 19.2 разделению, $u \quad f(i)$ означает, что ВАХ управляема током, т. е. при заданном токе напряжение определяется однозначно. Функция $i = f(u)$ означает, что ВАХ управляема напряжением, т. е. при заданном напряжении ток определяется однозначно. В форме $x \quad f(x)$ можно записать следующие уравнения:

$$u_1 = E - u_2 = E - f_2(i) = E - f_2[f_3(u_1)]\ \ \text{или}\ \ u_1 = E - f_2[f_3(u_1)];$$
$$u_2 = E - u_1 = E - f_1(i) = E - f_1[f_4(u_2)]\ \ \text{или}\ \ u_2 = E - f_1[f_4(u_2)];$$
$$i = f_3(u_1) = f_3[E - f_2(i)]\ \ \text{или}\ \ i = f_4(u_2) = f_4[E - f_1(i)].$$

Можно найти u_1 и u_2 также из выражений

$$u_1 = f_1(i) = f_1[f_4(E - u_1)]\ \ \text{и}\ \ u_2 = f_2(i) = f_2[f_3(E - u_2)].$$

Все шесть уравнений (по два для i, u_1 и u_2) имеют форму $x = f(x)$ и поэтому могут быть использованы для метода простых итераций. Однако в зависимости от характера ВАХ некоторые из них более предпочтительны. Пусть ВАХ первого нелинейного элемента управляема током $u_1 = f_1(i)$, а ВАХ второго элемента управляема напряжением $i = f_4(u_2)$. Из шести выражений, следовательно, необходимо брать лишь те, в которые входят только функции f_1 и f_4. Таковыми являются

$$u_2 = E - f_1[f_4(u_2)];\ \ u_1 = f_1[f_4(E - u_1)];\ \ i = f_4[(E - f_1(i)].$$

Во всех этих выражениях значение x^k однозначно определяет x^{k+1} из-за свойств ВАХ f_1 и f_4.

Заметим, что использование других выражений приведет к неопределенности. Например, пусть f_2 и f_3 таковы, что данным значениям u_1 и i соответствуют по три значения i и u_2, иначе говоря, функции f_2 и f_3 многозначны. Если использовать для u_1 уравнение $u_1 \quad E - f_2[f_3(u_1)]$, то для заданного u_1^k из функции f_3 определим три значения i, по которым из функции f_2 определим девять значений u_1^{k+1}. Такая многозначность неприемлема с точки зрения рациональной организации процесса последовательных приближений. Не имеет значения и то обстоятельство, что такая множественность решения для u_1 возможна для ограниченного интервала значений u_1, поскольку в процессе итераций u_1 может оказаться именно в этом интервале.

При практических расчетах итерационный процесс следует заканчивать при достижении определенного значения x^{k+1}, которое отличается от предыдущего

на величину $|x^{k+1} - x^k| \le \varepsilon$, где ε заранее следует задавать в качестве критерия ошибки в определении x.

Недостатки метода простых итераций частично устраняются в методе Ньютона. Суть этого метода заключается в следующем. Пусть нелинейное уравнение задано в виде $f(x) = 0$. Допустим, что два приближенных значения x^{k+1} и x^k отличаются на малую величину $\Delta x = x^{k+1} - x^k$. Тогда, разложив функцию $f(x^k + \Delta x)$ в ряд по Δx и ограничившись только двумя первыми членами ряда (что справедливо, если Δx — малая величина), получим

$$f(x^k + \Delta x) \approx f(x^k) + f'(x^k)\Delta x.$$

Целесообразно выбрать Δx таким, чтобы $f(x^k + \Delta x) = 0$. Тогда

$$\Delta x = x^{k+1} - x^k = -f(x^k)/f'(x^k) \quad \text{и} \quad x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}.$$

Последняя формула также определяет некоторый итерационный процесс, которому присущи все особенности метода итераций. И в методе Ньютона следует задавать некоторое начальное значение x^0, определить $f(x)$ и $f'(x)$. Здесь также следует прекратить вычисления при выполнении условия $|x^{k+1} - x^k| \le \varepsilon$. В методе Ньютона возможны случаи, когда производная функции близка (или равна) нулю, и поэтому Δx может быть весьма велико (или равно бесконечности). При этом новое значение x^{k+1} может сильно отличаться от x^k, что ухудшает условия сходимости. Эти затруднения, как правило, обходят, задавая новые значения x^0, которые позволяют миновать точки (рис. 20.37) экстремума. Применительно к методу Ньютона остается в силе все сказанное выше о выборе величин, относительно которых записывается уравнение $f(x) = 0$. Эти величины и вид функции должны обеспечить однозначность $f(x^k)$ при заданном значении x^k. Для цепи, на примере которой выше иллюстрировался метод простых итераций, в качестве нелинейных функций следует также брать функции $f_1(i)$ и $f_4(u_2)$, которые однозначно определяют напряжение u_1 через ток и ток через напряжение u_2. Составим уравнение вида $f(x) = 0$ относительно u_2:

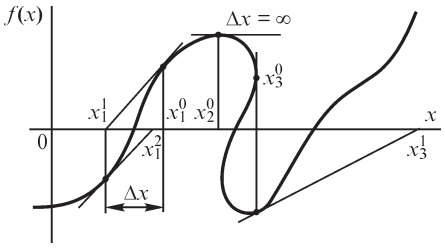


Рис. 20.37

$$f(x) = f(u_2) = E - u_2 - f_1[f_4(u_2)] = 0.$$

Тогда

$$f'(x) = f'(u_2) = -1 - \frac{\partial f_1}{\partial f_4}\frac{\partial f_4}{\partial u_2}.$$

Принимая во внимание, что $f_4(u_2) = i$ и $f_1(i) = u_1$, а следовательно,

$$\frac{\partial f_1(i)}{\partial f_4} = \frac{\partial f_1(i)}{\partial i} = \frac{\partial u_1}{\partial i} = r_{д1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f_4(u_2)}{\partial u_2} = \frac{\partial i}{\partial u_2} = g_{д2},$$

получим

$$f'(u_2) = -1 - r_{д1} g_{д2}$$

и

$$u_2^{k+1} = u_2^k + \frac{E - u_2^k - f_1[f_4(u_2^k)]}{1 + g_{д2}^k r_{д1}^k},$$

где $r_{д1}^k$ и $g_{д2}^k$ — дифференциальные сопротивление и проводимость, соответственно, первого и второго нелинейных элементов на k-м шаге итерации.

При численном расчете нелинейных цепей существенным является способ представления характеристик нелинейных элементов, оказывающих влияние на точность и свойства решения. Применение таких методов аппроксимации нелинейных характеристик, как методы Лагранжа и Ньютона, не приводит к увеличению точности при росте числа точек, когда находят коэффициенты полинома, описывающего нелинейную характеристику во всем диапазоне изменения аргумента. Лучшие результаты можно получить при разбиении нелинейной характеристики на участки с ее последующей аппроксимацией на участках.

При кусочно-линейной аппроксимации производные $y'_n = S_n$ (n = 1, 2, ..., N) на границах участков разрывны, что при численных расчетах недопустимо. Применение полиномов, порядок которых превышает единицу, позволяет обеспечить на границах участков непрерывность производных заданного порядка. Так, при использовании кубических полиномов $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ непрерывными будут не только функция $y(x)$, но и ее первая и вторая производные.

Записывая нелинейную характеристику на n-м участке в виде

$$f_n(x) = y_n + S_n(x - x_n) + \left(3\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n^2} - \frac{S_{n+1} + 2S_n}{h_n}\right)(x - x_n)^2 +$$

$$+\left(-2\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n^2} + \frac{S_{n+1} - S_n}{h_n}\right)(x - x_n)^2, \quad n = 1, \ldots, N, \quad h_n = x_{n+1} - x_n$$

и используя условие непрерывности первой $y'(x)$ и второй $y''(x)$ производных на общих границах участков, приходим к системе линейных уравнений (n = 1, ..., N)

$$h_{n+1}S_n + 2(h_n + h_{n+1})S_{n+1} + h_nS_{n+2} = 3\left(h_n\frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{h_{n+1}} + h_{n+1}\frac{y_{n+1} - y_n}{h_n}\right)$$

относительно величин S_n. Для получения решения необходимо задать значения S_n при n = 1 и n = N + 1, которые можно определить приближенно из исходной нелинейной характеристики $y(x)$.

Рассмотренный подход носит название метода аппроксимации с помощью сплайн-функций. Наряду с кубическими находят применение также сплайн-функции других порядков.

20.8. Составление системы нелинейных уравнений электрической цепи постоянного тока при условии обеспечения единственности решения

При расчете сложной нелинейной цепи всегда будет стоять вопрос, единственно ли полученное численное решение или существуют и другие решения, которые должны быть определены путем задания других начальных приближений. Если заранее известно, что в данной цепи возможно единственное решение, то необходимость такого численного исследования отпадает. Это — очень важное обстоятельство с точки зрения экономии времени расчета, так как получение полного набора решений системы нелинейных алгебраических уравнений электрической цепи при помощи ЭВМ — и в настоящее время труднорешаемая задача.

Единственность решения системы уравнений цепи возможна, если наложить определенные ограничения на ВАХ элементов и на выбор дерева графа схемы. Если цепь содержит хотя бы один элемент с неуправляемой ВАХ, то для такой цепи невозможна единственность решения. Поэтому отсутствие элементов с неуправляемыми ВАХ является обязательным условием существования единственности решения.

Матрично-топологический аппарат позволяет определять токи в обобщенных ветвях дерева через токи связей и напряжения связей через напряжения обобщенных ветвей дерева при помощи соотношений (см. § 3.16, т. I)

$$\tilde{\mathbf{i}}_{\text{в}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{i}}_{\text{д}} \\ \hline \tilde{\mathbf{i}}_{\text{с}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^t \\ \hline \mathbf{1} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{i}}_{\text{с}} \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{u}}_{\text{в}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{д}} \\ \hline \tilde{\mathbf{u}}_{\text{с}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \hline -\mathbf{F} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_{\text{д}}.$$

Здесь $\tilde{\mathbf{i}}_{\text{в}}, \tilde{\mathbf{i}}_{\text{д}}, \tilde{\mathbf{i}}_{\text{с}}, \tilde{\mathbf{u}}_{\text{в}}, \tilde{\mathbf{u}}_{\text{д}}, \tilde{\mathbf{u}}_{\text{с}}$ —матрицы-столбцы, соответственно, токов и напряжений обобщенных ветвей цепи, ветвей дерева и связей графа. Таким образом,

$$\tilde{\mathbf{i}}_{\text{д}} = \mathbf{F}^t \tilde{\mathbf{i}}_{\text{с}} \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{u}}_{\text{с}} = -\mathbf{F}\tilde{\mathbf{u}}_{\text{д}}.$$

Если ВАХ элемента управляема током, то такой элемент в топологической схеме может быть рассмотрен только как ветвь дерева, напряжение которой однозначно определится токами связей. Если ВАХ элемента управляема напряжением, то такой элемент в топологической схеме может быть рассмотрен только как связь, ток в которой однозначно определится напряжением ветвей дерева. Смысл этих ограничений довольно просто понять, если рассмотреть два определенных случая.

Если во всех ветвях дерева имеются только источники ЭДС, то напряжения связей будут заданы этими ЭДС. Единственность решения может быть обеспечена, если ВАХ элементов таковы, что токи в связях однозначно определяются через напряжения, т. е. когда ВАХ управляемы напряжением. Если же во всех связях имеются только источники тока, то токи в ветвях дерева будут заданы токами источников. Единственность решения может быть обеспечена, если ВАХ элементов таковы, что напряжения ветвей дерева однозначно определяются через токи ветвей, т. е. когда ВАХ управляемы током. Таким образом, токи в связях единственным образом определяются через напряжения ветвей дерева, а напря-

жения ветвей дерева — через токи связей. Такая взаимная однозначность позволит, например, методом последовательных приближений определить искомые токи в связях и напряжения ветвей дерева. Следовательно, конфигурация исходной цепи и ВАХ элементов этой цепи сужают свободу выбора дерева графа. Элементы с управляемыми током ВАХ с самого начала построения дерева графа должны быть отнесены к ветвям дерева, а элементы с управляемыми напряжением ВАХ — к связям графа.

Элементы с монотонными ВАХ, и в частном случае с линейными ВАХ, могут войти и в состав дерева графа, и в связи графа. Такие ВАХ управляемы и током, и напряжением.

Возникает вопрос о минимальном числе искомых величин и о форме записи уравнений нелинейных цепей. Для цепи с p ветвями, как правило, должны быть заданы p ВАХ элементов ветвей. В общем случае неизвестны p напряжений и p токов в ветвях. Поэтому общее число уравнений должно быть равно p, как и в линейных цепях, что совместно с p ВАХ даст систему из $2p$ уравнений. Матричные уравнения $\tilde{\mathbf{i}}_{\text{д}} = \mathbf{F}^t\tilde{\mathbf{i}}_{\text{с}}$ и $\tilde{\mathbf{u}}_{\text{с}} = -\mathbf{F}\tilde{\mathbf{u}}_{\text{д}}$ определяют $q - 1$ скалярных уравнений для токов в $q - 1$ сечениях и n скалярных уравнений для контуров, т. е. всего p скалярных уравнений.

Пусть $q - 1$ ветвей, содержащих элементы с управляемыми током ВАХ, составляют дерево графа и n ветвей, содержащих элементы с управляемыми напряжением ВАХ, — связи графа. Обозначим напряжения и токи ветвей дерева через $u_{\text{д}k}$ и $i_{\text{д}k}$, причем k 1... $(q - 1)$. Напряжения и токи связей обозначим через $u_{\text{с}j}$ и $i_{\text{с}j}$, причем $j = q \div p$. Тогда будем иметь $q - 1$ ВАХ вида $u_{\text{д}k} = f_k(i_{\text{д}k}) = R_k(i_{\text{д}k})$ и $n = p - q + 1$ ВАХ вида $i_{\text{с}j} = \varphi_j(i_{\text{с}j}) = G_j(u_{\text{с}j})$. Следовательно, искомыми величинами должны быть $q - 1$ напряжений ветвей дерева и n токов связей, которые однозначно определяются согласно следующим матричным соотношениям:

$$\mathbf{u}_{\text{д}} = \mathbf{f}(\mathbf{i}_{\text{д}}) = \mathbf{R}(\mathbf{i}_{\text{д}}) \quad \text{и} \quad \mathbf{i}_{\text{с}} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_{\text{с}}) = \mathbf{G}(\mathbf{u}_{\text{с}}),$$

где

$$\mathbf{u}_{\text{д}} = \text{colon}(u_{\text{д}1}, u_{\text{д}2}, \ldots, u_{\text{д}q-1});$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{i}_{\text{д}}) = \text{colon}[f_1(i_1), \ldots, f_{q-1}(i_{q-1})] = \text{colon}[R_1(i_1), \ldots, R_{q-1}(i_{q-1})];$$

$$\mathbf{i}_{\text{с}} = \text{colon}(i_{\text{с}q}, \ldots, i_{\text{с}p}); \quad \mathbf{G}(\mathbf{u}_{\text{с}}) = \text{colon}[\varphi_q(u_q), \ldots, \varphi_p(u_p)] = \text{colon}[G_q(u_q), \ldots, G_p(u_p)].$$

В последних выражениях символы $\mathbf{R}(\mathbf{i})$ и $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ обозначают нелинейные матричные функции, и не следует делать ошибку, принимая их за матрицы сопротивлений и проводимостей.

Имея в виду, что для обобщенных ветвей графа схемы существуют (см. § 3.12, т. I) соотношения:

$$\tilde{\mathbf{i}} = \mathbf{i} + \boldsymbol{\mathfrak{I}} \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{E},$$

получим

$$\mathbf{i}_{\text{д}} + \boldsymbol{\mathfrak{I}}_{\text{д}} = \mathbf{F}^t\mathbf{i}_{\text{с}} + \mathbf{F}^t\boldsymbol{\mathfrak{I}}_{\text{с}}; \quad \mathbf{u}_{\text{с}} - \mathbf{E}_{\text{с}} = -\mathbf{F}\mathbf{u}_{\text{д}} + \mathbf{F}\mathbf{E}_{\text{д}}$$

или

$$\mathbf{i}_{\text{д}} = \mathbf{F}^t\mathbf{i}_{\text{с}} - \mathbf{D}\boldsymbol{\mathfrak{I}}; \quad \mathbf{u}_{\text{с}} = -\mathbf{F}\mathbf{u}_{\text{д}} + \mathbf{C}\mathbf{E};$$

$$\mathbf{u}_{\text{д}} = \mathbf{f}(\mathbf{i}_{\text{д}}) = \mathbf{R}(\mathbf{i}_{\text{д}}) \quad \text{и} \quad \mathbf{i}_{\text{с}} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{u}_{\text{с}}) = \mathbf{G}(\mathbf{u}_{\text{с}}),$$

Здесь **i** и **u** — матрицы токов и напряжений элементов цепи.

Для применения итерационного метода или метода Ньютона эти выражения должны быть приведены соответственно к виду $x = f(x)$ или $f(x) = 0$, но только в матричной форме. Ход получения решения продемонстрируем на примере отыскания итерационной формулы для $\mathbf{i}_д$. Имеем

$$\mathbf{i}_д = \mathbf{F}^t\mathbf{i}_с - \mathbf{D}\mathfrak{I} = \mathbf{F}^t[\mathbf{G}(\mathbf{u}_с)] - \mathbf{D}\mathfrak{I} = \mathbf{F}^t[\mathbf{G}(-\mathbf{F}\mathbf{u}_д + \mathbf{CE})] - \mathbf{D}\mathfrak{I} =$$
$$= \mathbf{F}^t[\mathbf{G}(-\mathbf{FR}(\mathbf{i}_д) + \mathbf{CE})] - \mathbf{D}\mathfrak{I}.$$

Мы выразили $\mathbf{i}_д$ через матричную функцию от $\mathbf{i}_д$, т. е. получили выражение, пригодное для применения метода простых итераций. Аналогично можно найти выражения

$$\mathbf{i}_с = \mathbf{G}\{-\mathbf{F}[\mathbf{R}(\mathbf{F}^t\mathbf{i}_с - \mathbf{D}\mathfrak{I})] + \mathbf{CE}\};\ \mathbf{u}_с = -\mathbf{F}\{\mathbf{R}[\mathbf{F}^t\mathbf{G}(\mathbf{u}_с) - \mathbf{D}\mathfrak{I}]\} + \mathbf{CE};$$
$$\mathbf{u}_д = \mathbf{R}\{\mathbf{F}^t[\mathbf{G}(-\mathbf{F}\mathbf{u}_д + \mathbf{CE})] - \mathbf{D}\mathfrak{I}\}.$$

Заметим, что нелинейные матричные уравнения можно получить относительно любой матричной величины, и, таким образом, общее число скалярных уравнений может соответствовать либо $q - 1$, либо n. Заметим также, что поскольку функции $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ и $\mathbf{R}(\mathbf{i})$ управляемы, соответственно, напряжением и током, то во всех приведенных выше выражениях правые части однозначно определяют левые. Переносом всех членов уравнений в левую от знака равенства сторону получим выражение, пригодное для метода Ньютона: $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = 0$. Формально для матричных величин можем записать итерационную процедуру согласно методу Ньютона в следующей форме:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - [\mathbf{\Phi}'(\mathbf{x}^k)]^{-1}\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}^k).$$

Здесь $\mathbf{x}^k$ — столбцовая матрица, верхний индекс у которой показывает шаг итерации; $\mathbf{\Phi}'(\mathbf{x})$ — матричная производная матрицы-столбца $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$.

Формально можно записать

$$\mathbf{\Phi}'(\mathbf{x}) = \frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\mathbf{x}}.$$

Пусть $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \text{colon}\ (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$. Тогда

$$\mathbf{\Phi}'(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Квадратную матрицу, состоящую из n строк и n столбцов, элементы которой представляют собой частные производные φ_i по составляющим x_j, называют матрицей Якоби. Величина $[\mathbf{\Phi}'(\mathbf{x})]^{-1}$ есть обратная матрица Якоби, которая существует при условии неравенства нулю определителя матрицы Якоби.

Применительно к электрическим цепям для случая, когда $\mathbf{x} = \mathbf{i}_c$, т. е. для токов в связях, имеем

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}\{-\mathbf{F}[\mathbf{R}(\mathbf{F}^t\mathbf{i}_c - \mathbf{D}\mathfrak{I})] + \mathbf{CE}\} - \mathbf{i}_c = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{i}_c = \mathbf{x} = \mathrm{colon}(i_q, i_{q+1}, \ldots, i_p).$$

По правилам формального дифференцирования имеем

$$\mathbf{\Phi}'(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{i}_c} = \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u}_c)}{\partial \mathbf{u}_c}(-\mathbf{F})\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{i}_д)}{\partial \mathbf{i}_д}(\mathbf{F}^t) - \mathbf{1}.$$

Выражения $\dfrac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u}_c)}{\partial \mathbf{u}_c}$ и $\dfrac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{i}_д)}{\partial \mathbf{i}_д}$ определяют некоторые квадратные матрицы, имеющие размерности проводимости и сопротивления. Если

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}_c) = \begin{vmatrix} G_q(u_q) \\ \vdots \\ G_p(u_p) \end{vmatrix}, \text{ то } \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{u}_c)}{\partial \mathbf{u}_c} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial i_q}{\partial u_q} & \cdots & \dfrac{\partial i_q}{\partial u_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial i_p}{\partial u_q} & \cdots & \dfrac{\partial i_p}{\partial u_p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_q & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & g_{q+1} & 0 & . & . & & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & g_p \end{vmatrix} = \mathbf{g}_c,$$

где g_q, ..., g_p — дифференциальные проводимости нелинейных элементов связей $q \ldots p$. Эта последняя матрица диагональна, так как ток каждой связи определяется напряжением именно этой связи, и поэтому $\partial i_s/\partial u_j = 0$, если $s \neq j$. Следовательно, в методе Ньютона будем иметь

$$\mathbf{i}_c^{k+1} = \mathbf{i}_c^k + [\mathbf{g}_c^k\mathbf{F}\mathbf{r}_д^k\mathbf{F}^t + \mathbf{1}]^{-1}\{\mathbf{G}(-\mathbf{F}[\mathbf{R}(\mathbf{F}^t\mathbf{i}_c^k - \mathbf{D}\mathfrak{I})] + \mathbf{CE}) - \mathbf{i}_c^k\},$$

если аналогично определить $\partial\mathbf{u}_д/\partial\mathbf{i}_д = \mathbf{r}_д$ — диагональную матрицу дифференциальных сопротивлений ветвей дерева. Индексы у матриц $\mathbf{g}_c^k$ и $\mathbf{r}_д^k$ означают, что элементы этих матриц определены для значений токов и напряжений на k-м шаге итераций. Именно необходимость такого пересчета на каждом шаге итераций и последующее обращение матриц порядка $(n \times n)$ или $[(q - 1) \times (q - 1)]$ и являются существенными недостатками метода Ньютона.

Выражение $\mathbf{g}_c\mathbf{F}\mathbf{r}_д\mathbf{F}^t + \mathbf{1}$ можно преобразовать следующим образом. Представим $\mathbf{1} = \mathbf{g}\mathbf{g}_c^{-1}$. Тогда

$$\mathbf{g}_c(\mathbf{F}\mathbf{r}_д\mathbf{F}^t + \mathbf{r}_c) = \mathbf{g}_c\mathbf{C}\mathbf{r}\mathbf{C}^t.$$

Здесь $\mathbf{C}$ — матрица контуров графа цепи; $\mathbf{r}$ — диагональная матрица дифференциальных сопротивлений цепи. С учетом этого тождества для метода Ньютона можно получить выражение

$$\mathbf{i}_c^{k+1} = \mathbf{i}_c^k + [\mathbf{C}\mathbf{r}^k\mathbf{C}^t]^{-1}\mathbf{r}_c^k\{\mathbf{G}(-\mathbf{F}[\mathbf{R}(\mathbf{F}^t\mathbf{i}_c^k - \mathbf{D}\mathfrak{I})] + \mathbf{CE}) - \mathbf{i}_c^k\}.$$

В заключение заметим, что итерационный метод Ньютона может быть непосредственно использован для получения решения линейной задачи. Причем первый же шаг определит истинное значение поправки. Поскольку ВАХ линейны, то значения дифференциальных параметров совпадают со значениями статических параметров. Кроме того, для простоты можно считать $\mathbf{i}_c^0 = \mathbf{0}$. Тогда

$$\mathbf{i}_c^t = [\mathbf{C}\mathbf{r}\mathbf{C}^t]^{-1}\mathbf{r}_c\mathbf{G}_c(\mathbf{F}\mathbf{R}_д\mathbf{D}\mathfrak{I} + \mathbf{CE}) = [\mathbf{C}\mathbf{r}\mathbf{C}^t]^{-1}(\mathbf{CE} + \mathbf{F}\mathbf{R}_д\mathbf{D}\mathfrak{I}).$$

Матрица $\mathbf{D}\mathfrak{I}$ переносит все источники тока в ветви дерева. Умножение $\mathbf{R}_{д}\mathbf{D}\mathfrak{I}$ эквивалентно преобразованию всех источников токов в ветвях дерева в источники ЭДС. Умножение на $\mathbf{F}$ определяет вклад этих эквивалентных ЭДС в контурные уравнения.

Таким образом, применение матрично-топологических методов для решения задач расчета нелинейных цепей постоянного тока позволяет формализовать составление уравнений цепи, сокращать число решаемых уравнений и в некоторых случаях обеспечивает формирование такой системы уравнений, которая гарантировала бы единственность решения. В сочетании с возможностями ЭВМ этот метод позволяет решать широкий класс задач нелинейных цепей.

20.9. Аналитическое исследование особых свойств нелинейных электрических цепей постоянного тока при малых отклонениях от заданного режима

Нелинейная зависимость между токами и напряжениями в нелинейных электрических цепях придает этим цепям ряд особых замечательных свойств, которые с успехом используются в различных устройствах, особенно в электроизмерительных и автоматических. Эти особые свойства проявляются в своеобразном поведении нелинейных цепей при отклонении токов и напряжений от их значений при заданном режиме. Некоторые из этих свойств были отмечены в § 20.2 при рассмотрении нелинейных элементов электрической цепи.

Так, например, можно осуществить устройства, в которых при отклонении в известных пределах напряжения u_1 на входных зажимах от номинального его значения напряжение u_2 на выходных зажимах остается неизменным или практически неизменным. Такое устройство служит стабилизатором напряжения. Примером является стабиловольт, описанный в § 20.2. Аналогично можно с помощью нелинейных элементов, например бареттера, добиться стабилизации тока.

С помощью мостовой электрической цепи с нелинейными элементами можно установить, что напряжение u_2 на выходных зажимах в диагонали моста будет равно нулю только при одном определенном заданном значении напряжения u_1 на входных зажимах в другой диагонали моста. При отклонении величины u_1 от этого значения появляется напряжение u_2, отличное от нуля. При этом увеличению u_1 соответствует напряжение u_2 одного знака, уменьшению u_1 — напряжение u_2 другого знака. Такое устройство может служить указателем (индикатором) отклонения напряжения u_1 от заданного его значения и может быть использовано для автоматического поддержания этого напряжения вблизи заданного значения.

Для аналитического исследования поведения нелинейной электрической цепи при небольших отклонениях от заданного режима нет необходимости располагать аналитическим выражением всей характеристики каждого нелинейного элемента, входящего в состав цепи. Достаточно выразить уравнением небольшую часть характеристики вблизи точки A, соответствующей заданному режиму. Обычно бывает достаточно заменить этот участок характеристики отрезком прямой, касательной к характеристике в точке A (рис. 20.38). Уравнение этой прямой имеет вид

$$u = u_0 + r_{д} i,$$

где u_0 определяется точкой пересечения прямой с осью ординат (рис. 20.38), а $r_д = k \operatorname{tg} \beta$ есть динамическое сопротивление нелинейного элемента в точке A характеристики, причем k — отношение масштаба напряжения к масштабу тока. Величина u_0 может быть как положительной (рис. 20.38), так и отрицательной (рис. 20.39). Величина $r_д$ также может быть положительной, если u растет при увеличении i, и отрицательной при падающей характеристике.

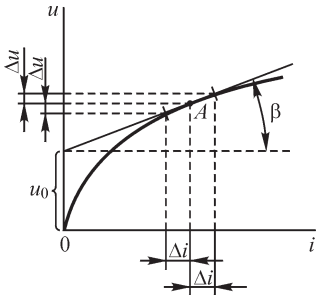


Рис. 20.38

Метод замены характеристики на некотором ее участке отрезком прямой называют линеаризацией задачи в соответствующих пределах. Воспользуемся этим методом для аналитического исследования работы стабиловольта вблизи некоторого заданного режима.

Схема стабиловольта показана на рис. 19.15. Обозначим сопротивление приемника N через r_2. Имеем систему уравнений

$$u_1 = ri_1 + u_2; \quad u_2 = r_2 i_2; \quad u_2 = u_0 + r_д i; \quad i_1 = i + i_2.$$

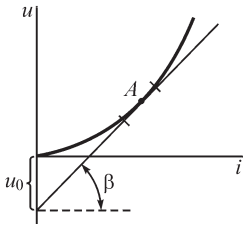


Рис. 20.39

Подставив в третье уравнение $i = i_1 - i_2$ из четвертого и заменив i_2 через u_2/r_2 из второго, выразим i_1 через u_2. Подставив это выражение для i_1 в первое уравнение, получаем связь между u_2 и u_1 в виде

$$u_2 = \frac{r_2 r_д}{rr_д + r_2 r + r_2 r_д} u_1 + \frac{rr_2}{rr_д + r_2 r + r_2 r_д} u_0.$$

Качество работы стабилизатора напряжения характеризуют так называемым коэффициентом стабилизации k, равным отношению относительного изменения $\Delta u_1/u_1$ первичного напряжения к относительному изменению $\Delta u_2/u_2$ вторичного напряжения, т. е. равным

$$k = \frac{\Delta u_1/u_1}{\Delta u_2/u_2} = \frac{u_2/u_1}{\Delta u_2/\Delta u_1}.$$

Из уравнения связи между u_2 и u_1 имеем

$$\frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = \frac{r_2 r_д}{rr_д + r_2 r + r_2 r_д};$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{r_2 r_д}{rr_д + r_2 r + r_2 r_д} + \frac{rr_2}{rr_д + r_2 r + r_2 r_д} \frac{u_0}{u_1} = \frac{\Delta u_2}{\Delta u_1}\left(1 + \frac{r}{r_д}\frac{u_0}{u_1}\right).$$

Следовательно, искомый коэффициент стабилизации имеет выражение

$$k = 1 + \frac{r}{r_д}\frac{u_0}{u_1}.$$

Желательно иметь k возможно большим, так как при этом большому относительному изменению первичного напряжения будет соответствовать малое относительное изменение вторичного напряжения. Из последнего выражения

видно, что $k = \infty$ при $r_д = 0$, т. е. если точка A лежит на горизонтальном участке характеристики. В этом случае вторичное напряжение u_2 остается постоянным при изменении первичного u_1.

Полученное выражение позволяет вычислить коэффициент стабилизации для любой точки характеристики и любого значения u_1.

В действительности характеристика нелинейного элемента стабиловольта в используемой рабочей ее части имеет некоторый наклон к оси абсцисс, различный в разных точках. Пользуясь графическим методом, изложенным в § 20.2, можно найти для различных значений первичного напряжения u_1 и сопротивления r_2 нагрузки положение точки A на характеристике и соответствующие ей значения $r_д$ и u_0. Располагая этими значениями, нетрудно по последней формуле получить величину k. Таким путем можно найти зависимости $k = F(u_1)$ при различных r_2.

Подчеркнем, что стабилизация напряжения достигается только благодаря нелинейным свойствам цепи. Действительно, если заменить нелинейный элемент линейным с постоянным сопротивлением, то мы имели бы $u_0 = 0$ и $k = 1$, т. е. относительные изменения первичного и вторичного напряжений были бы равны друг другу и никакой стабилизации не было бы.

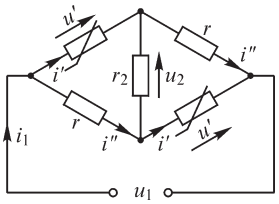


Рис. 20.40

В качестве другого примера исследуем симметричный мост с двумя одинаковыми нелинейными элементами в двух противоположных плечах (рис. 20.40) и двумя одинаковыми постоянными (линейными) сопротивлениями r в других плечах. Имеем уравнения

$$u_1 = u' + ri''; \quad u' = u_2 + ri'';$$

$$i' = i'' - i_2; \quad u' = u_0 + r_д i'; \quad u_2 = r_2 i_2.$$

Подставим i' из третьего уравнения в четвертое. Найденное выражение для u' подставим в первое и второе уравнения и выразим i_2 через u_2 согласно пятому уравнению. Получим два уравнения, содержащих u_1, u_2 и i'', исключая из которых i'', найдем связь между u_2 и u_1 в виде

$$u_2 = \frac{r_д - r}{r + r_д + \dfrac{2rr_д}{r_2}} u_1 + \frac{2r}{r + r_д + \dfrac{2rr_д}{r_2}} u_0.$$

При $r_д = r$ напряжение u_2 на выходе не зависит от u_1 на входе, т. е. мост работает как стабилизатор напряжения. Коэффициент стабилизации равен

$$k = \frac{u_2/u_1}{\Delta u_2/\Delta u_1} = 1 + \frac{2r}{r_д - r}\frac{u_2}{u_1}.$$

При $r_д = r$ имеем $k = \infty$, т. е. полную стабилизацию вторичного напряжения, которое при этом равно

$$u_2 = \frac{1}{1 + r/r_2} u_0.$$

Тот же мост можно использовать и как указатель отклонения Δu_1 первичного напряжения от некоторого заданного его значения u_1. С этой целью уравновесим мост при этом значении напряжения u_1 на его входе. Очевидно, равновесие, т. е. $u_2 = 0$, будет достигнуто, когда статическое сопротивление нелинейных элементов в плечах моста будет равно сопротивлению r в других линейных плечах, т. е. при $r_{ст} = r$.

Воспользовавшись уравнением, связывающим u_2 и u_1, и взяв приращения Δu_2 и Δu_1, найдем

$$\frac{\Delta u_2}{\Delta u_1} = \frac{r_д - r}{r + r_д + \dfrac{2rr_д}{r_2}} = \mu.$$

Величину μ называют коэффициентом усиления моста.

Мощность, передаваемая во вторичную цепь, равна

$$p_2 = \frac{(\Delta u_2)^2}{r_2} = (\Delta u_1)^2 \frac{(r_д - r)^2}{r_2\left(r + r_д + \dfrac{2rr_д}{r_2}\right)^2}.$$

Можно подобрать сопротивление r_2 вторичной цепи таким, чтобы мощность p_2 была наибольшей при заданных Δu_1, $r_д$ и r. Взяв производную от p_2 по r_2 и приравняв ее к нулю, получим

$$r_2 = \frac{2rr_д}{r + r_д} \quad \text{или} \quad r_2 = \frac{2r_{ст}r_д}{r_{ст} + r_д},$$

так как $r = r_{ст}$.

Коэффициент усиления в этом случае

$$\mu = \frac{r_д - r_{ст}}{2(r_{ст} + r_д)} = \frac{1}{2}\frac{r_д/r_{ст} - 1}{r_д/r_{ст} + 1}.$$

При любых $r_д > 0$ абсолютное значение μ не превышает 0,5. Тем не менее, такое устройство дает возможность наблюдать весьма малые относительные отклонения $\Delta u_1/u_1$ первичного напряжения от заданного его значения u_1, так как при заданном значении u_1 напряжение u_2 во вторичной цепи равно нулю, и, следовательно, для отсчета величины Δu_2 может быть взят прибор с весьма большой чувствительностью. Отклонения прибора во вторичной цепи можно использовать путем воздействия на соответствующие регулирующие устройства для автоматического поддержания заданного значения u_1 с очень большой точностью.

Из рассмотренных примеров видим, что метод линеаризации характеристики нелинейного элемента вблизи ее рабочей точки A может быть с успехом использован для аналитического исследования ряда важных свойств нелинейных электрических цепей.

Отметим, что, кроме рассмотренных особых свойств нелинейных электрических цепей, можно получить в этих цепях и другие весьма ценные свойства. Так, при наличии в цепи нелинейных элементов с падающей характеристикой возможны, как убедимся в последующем, неустойчивые режимы. При этом оказывается возможным осуществить устройства, в которых при плавном изменении напряжения u_1 на входных зажимах в момент достижения им некоторого заданного значения напряжение u_2 на выходных зажимах изменяется скачком. Это свойство может быть использовано в релейных устройствах.

20.10. Законы и параметры магнитных цепей

В электрических цепях нам удается создавать весьма протяженные направленные пути для электрического тока, что является результатом очень большого различия удельной проводимости $\gamma_{пр}$ проводников и удельной проводимости $\gamma_{из}$ окружающей их изолирующей среды. Так, для меди $\gamma_{пр} = 5{,}8 \cdot 10^7$ 1/Ом·м, а для пропитанной кабельной бумаги $\gamma_{из} = 10^{-13}$ 1/Ом·м, т. е. при этом $\gamma_{пр}/\gamma_{из} = 5{,}8 \cdot 10^{20}$. Для магнитных цепей не имеем столь большого различия между абсолютной магнитной проницаемостью $\mu_{фер}$ ферромагнитных материалов участков магнитной цепи, которые должны образовывать путь для магнитных линий, и абсолютной магнитной проницаемостью $\mu_в = \mu_0$ окружающей среды, обычно воздуха. Их отношение имеет порядок $\mu_{фер}/\mu_0 \approx 10^3 ... 10^4$, а при насыщении ферромагнитных материалов становится еще меньше. Поэтому значительная часть потока ответвляется от основной магнитной цепи и проходит через воздух в виде так называемого потока рассеяния. Следовательно, даже при коротких магнитных цепях имеем *магнитные цепи с распределенными параметрами*. Кроме того, вдоль основной магнитной цепи часто располагают воздушные промежутки. Таковым, например, является воздушный промежуток между полюсами электромагнита (рис. 20.41). Магнитная проницаемость этих промежутков равна магнитной проницаемости окружающей магнитную цепь среды, вследствие чего здесь трудно говорить об определенном пути для магнитных линий.

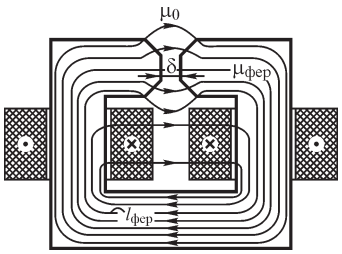


Рис. 20.41

Зависимость магнитной индукции от напряженности магнитного поля нелинейна и вследствие явления гистерезиса неоднозначна. Поэтому *магнитные цепи*, как правило, *являются нелинейными*.

Все сказанное весьма усложняет расчеты магнитных цепей даже при постоянном магнитном потоке, т. е. при постоянном токе в намагничивающих катушках. Строгий расчет здесь может быть выполнен только с привлечением методов теории электромагнитного поля. Однако приближенное решение можно и здесь получить, вводя понятие о магнитной цепи и, соответственно, используя теорию, основанную на этом понятии, т. е. теорию магнитных цепей.

Пренебрегая потоками рассеяния, получаем магнитную цепь с сосредоточенными параметрами. Если магнитная цепь не имеет разветвлений (рис. 20.41), то

магнитный поток Ф при таком допущении оказывается одинаковым во всех сечениях цепи.

Отношение магнитодвижущей силы (МДС) вдоль всей цепи, равной интегралу напряженности магнитного поля вдоль всей цепи $\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = iw$, к магнитному потоку Ф называют магнитным сопротивлением такой цепи:

$$R_{\text{м}} = \frac{iw}{\Phi}.$$

Величина, обратная магнитному сопротивлению, называется магнитной проводимостью магнитной цепи:

$$\Lambda = \frac{1}{R_{\text{м}}} = \frac{\Phi}{iw}.$$

Величины $R_{\text{м}}$ и Λ являются основными параметрами магнитной цепи.

Соотношение

$$\Phi = \frac{iw}{R_{\text{м}}}$$

называют законом магнитной цепи. Оно по форме аналогично закону Ома для замкнутой электрической цепи при постоянном токе:

$$i = \frac{e}{r},$$

где e — ЭДС, действующая в электрической цепи; i — ток в ней и r — ее электрическое сопротивление.

Всю МДС вдоль замкнутой магнитной цепи можно представить в виде суммы МДС на отдельных разнородных участках магнитной цепи, так как интеграл $\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l}$ вдоль замкнутого пути может быть представлен в виде суммы интегралов вдоль отдельных участков этого пути. Для электромагнита (см. рис. 20.41) такими участками являются ферромагнитный сердечник со средней длиной $l_{\text{фер}}$ и воздушный промежуток длиной δ. Имеем

$$\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = \int_{l_{\text{фер}}} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} + \int_{\delta} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} = F_1 + F_2.$$

Соответственно, получаем

$$R_{\text{м}} = \frac{\oint \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l}}{\Phi} = \frac{F_1}{\Phi} + \frac{F_2}{\Phi} = R_{\text{м}1} + R_{\text{м}2},$$

где $R_{\text{м}1}$ — магнитное сопротивление сердечника; $R_{\text{м}2}$ — магнитное сопротивление воздушного промежутка. Если сечение s какого-либо участка постоянно и напряженность магнитного поля, магнитную индукцию и, соответственно, магнитную проницаемость μ в разных точках сечений участка можно приближенно считать одинаковыми, то имеют место приближенные выражения

$$\Phi = \int_{s} \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{s} \approx Bs = \mu Hs \quad \text{и} \quad \int_{l} \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{l} \approx H_{\text{ср}}\,l_{\text{ср}},$$

где $l_{\text{ср}}$ —средняя длина вдоль участка.

Например, принимая такие допущения для сердечника электромагнита (см. рис. 20.41), получим

$$R_{м1} \approx \frac{Hl_{фер}}{\mu Hs} = \frac{l_{фер}}{\mu s}.$$

Вычисление по аналогичной формуле магнитного сопротивления $R_{м2}$ воздушного зазора между полюсами электромагнита было бы слишком грубым. Здесь для вычисления $R_{м2}$ надо рассчитать картину поля.

Итак, для замкнутого контура магнитной цепи имеем

$$\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = iw = F_1 + F_2 = R_{м1}\Phi + R_{м2}\Phi = \sum_{k=1}^{k=2} R_{мk}\Phi.$$

В рассмотренном примере одноконтурной магнитной цепи поток Ф во всех участках цепи один и тот же.

В разветвленной (многоконтурной) магнитной цепи магнитный поток разветвляется в узлах цепи.

Для каждого узла на основании принципа непрерывности магнитного потока можно написать

$$\oint_s \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{s} = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k = 0, \qquad (*)$$

т. е. *сумма магнитных потоков, отходящих по всем ветвям магнитной цепи от узла цепи, равна нулю*. Это соотношение аналогично уравнению для узла электрической цепи, написанному согласно первому закону Кирхгофа:

$$\sum i_k = 0.$$

Для любого контура разветвленной магнитной цепи в соответствии со сказанным выше можем написать уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} i_k w_k = \sum_{k=1}^{n} R_{мk}\Phi_k, \qquad (**)$$

т. е. *МДС вдоль замкнутого контура магнитной цепи равна сумме произведений магнитного сопротивления на магнитный поток во всех участках* (*ветвях*) *цепи, входящих в этот контур*. Это уравнение аналогично уравнению для контура электрической цепи

$$\sum e_k = \sum r_k i_k,$$

составленному на основании второго закона Кирхгофа при постоянном токе.

Уравнений типа (*) должно быть $q - 1$, если q — число узлов магнитной цепи. Уравнений типа (**) должно быть $n = p - q + 1$, где p — число ветвей магнитной цепи.

Таким образом, расчет магнитных цепей, если можно пренебречь потоками рассеяния, аналогичен расчету нелинейных электрических цепей с сосредоточенными параметрами, причем МДС iw соответствует ЭДС e, потоку Ф соответствует ток i и магнитному сопротивлению $R_м$ соответствует электрическое сопротивление r.

Однако такой приближенный расчет возможен только для сравнительно простых магнитных цепей, так как для сложных магнитных цепей уже нельзя пренебрегать потоками рассеяния. Наличие потоков рассеяния в сложных магнитных цепях чрезвычайно усложняет расчеты. Такие расчеты можно проводить *методом последовательного приближения*. Сначала находим распределение МДС по участкам, пренебрегая потоками рассеяния. Затем на основе этого распределения, пользуясь методами расчета поля, находим потоки рассеяния и уточняем потоки в участках магнитной цепи. Это дает возможность уточнить распределение МДС и, соответственно, значения потоков рассеяния и т. д.

Приведенная аналогия магнитных и электрических цепей формальна. По своему физическому содержанию закон магнитной цепи и закон Ома для электрической цепи существенно различаются между собой. Существование постоянной ЭДС возможно без возникновения под ее действием электрического тока в электрической цепи, если цепь из проводников разомкнута и сопротивление всей цепи бесконечно велико. Напротив, существование магнитодвижущей силы всегда связано с одновременным существованием магнитного потока.

20.11. Расчет магнитной цепи с последовательным соединением участков

Магнитные цепи в практических устройствах обычно содержат участки из ферромагнитных материалов, магнитная проницаемость которых зависит от напряженности магнитного поля, т. е. обычно мы имеем дело с нелинейными магнитными цепями.

Если в первом приближении можно не учитывать так называемые магнитные потоки рассеяния, ответвляющиеся в воздух от главной магнитной цепи, то, как было сказано в предыдущем параграфе, расчет сложной магнитной цепи оказывается аналогичным расчету соответствующей сложной нелинейной электрической цепи.

В простейшем случае последовательного соединения всех участков магнитной цепи полная магнитодвижущая сила $F = wi$, определяемая током i в обмотке, имеющей w витков, равна сумме магнитодвижущих сил на отдельных участках, т. е.

$$F = \oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = wi = \sum F_k .$$

Если можно пренебречь потоками рассеяния, то потоки Ф во всех последовательно соединенных участках, во всех сечениях s_k данного участка будут одинаковы. Применяя закон магнитной цепи для всей магнитной цепи и для ее участков, будем иметь

$$F = \Phi R_{\text{м}}; \quad F_k = \Phi R_{\text{м}k},$$

где $R_{\text{м}}$ — магнитное сопротивление всей магнитной цепи; $R_{\text{м}k}$ — магнитное сопротивление ее k-го участка. Подставляя эти выражения в равенство $F = \Sigma F_k$ и сокращая на Ф, получаем

$$R_{\text{м}} = \sum R_{\text{м}k},$$

т. е. *при последовательном соединении общее магнитное сопротивление вычисляется как сумма магнитных сопротивлений всех участков.*

Пусть в частном случае сечение s_k участка постоянно вдоль него, и можно, пренебрегая потоками рассеяния, считать, что поток распределен равномерно по сечению. В этом частном случае и при таких допущениях магнитная индукция будет одинакова во всех точках данного участка. Соответственно одинакова во всех точках будет и магнитная проницаемость, если весь участок состоит из однородного материала. В таком случае можно написать

$$R_{мk} = \frac{l_k}{s_k \mu_k},$$

где l_k — длина и μ_k — абсолютная магнитная проницаемость k-го участка, и, соответственно,

$$R_м = \sum \frac{l_k}{s_k \mu_k}.$$

На рис. 20.42 схематически изображена магнитная цепь двухполюсной электрической машины. Хотя поток в ярме и разветвляется на две части, такую цепь можно рассматривать как неразветвленную, удвоив сечение ярма. Так можно поступить ввиду того, что обе части ярма имеют равные магнитные сопротивления. Конечно, цепь можно рассматривать как неразветвленную, только пренебрегая потоками рассеяния. Практически расчет ведут по следующей схеме. Большей частью заданным является магнитный поток Ф, который должен быть образован в рассчитываемой магнитной цепи, например в воздушном зазоре машины. На основе общих данных выполняют эскиз магнитной цепи проектируемого устройства и выбирают материал для каждого участка цепи. Задают среднее значение магнитной индукции в каждом участке цепи. Это среднее значение индукции выбирают в зависимости от рода материала участка и от назначения данного участка цепи в общем устройстве. После этого определяют сечение s каждого участка как отношение потока к индукции.

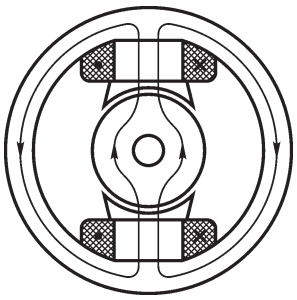


Рис. 20.42

Далее, поскольку выбраны значения индукции и материал, можно по кривым намагничивания найти для каждого участка значение напряженности поля H. Но напряженность поля численно равна МДС, приходящейся на единицу длины. Поэтому МДС, необходимая для проведения потока через данный участок цепи, равна произведению $H_k\ l_k$. В случае последовательного соединения всех участков цепи полная искомая МДС, необходимая для образования заданного потока, равна сумме МДС на отдельных участках, т. е.

$$wi = \sum H_k l_k = H_1 l_1 + H_2 l_2 + \ldots$$

В случае если при заданной конструкции магнитной цепи заданной является МДС wi, а не поток Ф, следует пользоваться для расчета общим методом, изложенным в следующем параграфе.

При более точном подсчете должны быть учтены и потоки рассеяния. Вследствие наличия потоков рассеяния магнитный поток может быть различным в от-

дельных следующих друг за другом участках магнитной цепи, а также в различных сечениях одного и того же участка. Необходимо учесть также и то, что поток распределяется в отдельных местах неравномерно по сечению. Так, например, около краев полюсов машины (см. рис. 20.42) происходит сгущение линий магнитной индукции и магнитная индукция в полюсных наконечниках в этих местах принимает очень большие значения. Соответственно, эти места полюсных наконечников сильно насыщены и магнитная проницаемость их сравнительно невелика. Последнее обстоятельство учитывают соответствующими опытными коэффициентами.

Мы видим, что точный расчет даже сравнительно простой магнитной цепи оказывается весьма сложным.

20.12. Расчет разветвленных магнитных цепей

Если пренебречь потоками рассеяния, то, как было сказано в § 20.10, расчет разветвленной магнитной цепи аналогичен расчету соответствующей электрической цепи с сосредоточенными параметрами. Так как магнитные цепи являются нелинейными, то метод их расчета при этих условиях аналогичен методам расчета нелинейных электрических цепей, изложенным в § 20.2 и 20.3. Пусть имеется разветвленная магнитная цепь, изображенная на рис. 20.43, *а*. При расчете необходимо использовать кривую намагничивания материала $B = f(H)$, дающую зависимость магнитной индукции от напряженности магнитного поля (рис. 20.43, *б*).

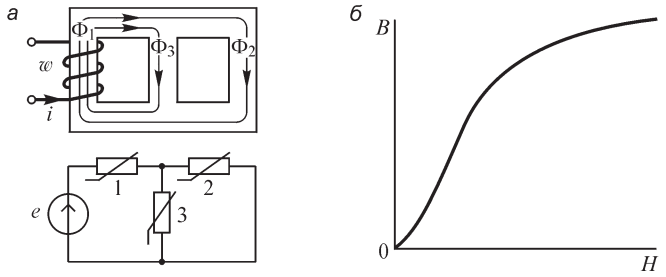


Рис. 20.43

Пользуясь кривой намагничивания, строим кривые $\Phi = f(F)$ для каждого участка в отдельности (кривые *1*, *2* и *3* на рис. 20.44). Для построения этих кривых необходимо умножить ординаты кривой намагничивания, изображенной на рис. 20.43, *б*, на сечения участков и абсциссы — на длины участков. Например, кривая *1*, дающая зависимость $\Phi_1 = f(F_1)$, получается умножением ординат кривой на рис. 20.43, *б* на s_1 и абсцисс — на l_1. Так как

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 \quad \text{и} \quad F_2 = F_3 = F_{23},$$

то, складывая ординаты кривых *2* и *3* на рис. 20.44, определяющих зависимости $\Phi_2 = f(F_2)$ и $\Phi_3 = f(F_3)$, получим кривую *4*, дающую зависимость $\Phi_1 = f(F_{23})$. Например, точка *d* кривой *4* определяется суммой $ad = ab + ac$.

Полная МДС iw равна сумме МДС F_1 и F_{23}, необходимых для проведения потока Φ_1 через первый участок и через параллельно соединенные второй и третий участки:

$$iw = F_1 + F_{23}.$$

Поэтому, складывая абсциссы кривых *1* и *4*, определяющих зависимости $\Phi_1 = f(F_1)$ и $\Phi_1 = f(F_{23})$, получаем кривую *5*, дающую связь $\Phi_1 = f(iw)$. Например, точка *k* кривой *5* определяется суммой $ek = ed + eg$.

Легко усмотреть, что метод расчета этой разветвленной магнитной цепи аналогичен методу расчета показанной на рис. 20.43 соответствующей электрической цепи с нелинейными элементами, изложенному в § 20.2.

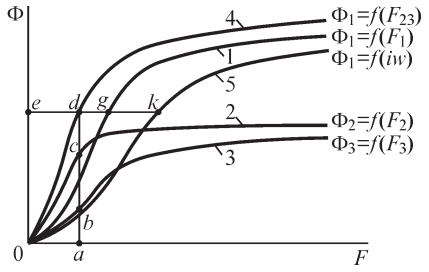


Рис. 20.44

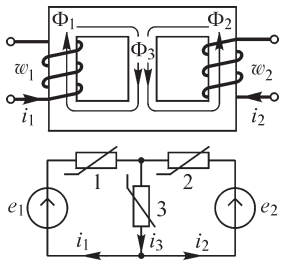


Рис. 20.45

Аналогия с электрическими цепями может быть с успехом использована и для расчета более сложных магнитных цепей, в которых имеются катушки с токами в различных ветвях магнитной цепи. Например, расчет магнитной цепи, приведенной на рис. 20.45, аналогичен расчету электрической цепи, показанной на этом же рисунке. При этом необходимо воспользоваться методом, изложенным для электрической цепи в § 20.3. При такой аналогии ЭДС заменяются МДС, электрические сопротивления — магнитными сопротивлениями и электрические токи — магнитными потоками.

На рис. 20.43 приведена кривая намагничивания без учета гистерезиса. При учете гистерезиса задача становится, строго говоря, неопределенной, и результат будет зависеть от наличия остаточной индукции до включения токов, а также от порядка включения токов в отдельных обмотках. Эти осложнения скажутся незначительно при большом насыщении ветвей магнитной цепи, так как при этом восходящие и нисходящие ветви петли гистерезиса близко сходятся. Однако при большом насыщении необходимо учитывать наличие потоков рассеяния. В этом случае, как было отмечено в § 20.10, следует пользоваться методом последовательных приближений.

Производим первый расчет, пренебрегая потоками рассеяния. Зная из этого расчета распределение МДС вдоль участков магнитной цепи, можно определить приближенно потоки рассеяния, используя картины магнитного поля в пространстве, окружающем магнитную цепь. Учитывая потоки рассеяния, вносим поправки в значения магнитных потоков в различных сечениях каждого участка магнитной цепи. После этого требуется внести коррективы в значения потоков и МДС, чтобы удовлетворялись законы магнитной цепи. Новому распределению МДС будут соответствовать новая картина и новые значения потоков рассеяния. Продолжая действовать таким путем, можно приблизиться к истинной картине распределения потоков и МДС.

20.13. О расчете постоянных магнитов

Явление остаточного намагничивания, характерное для ферромагнитных веществ, широко используется при изготовлении постоянных магнитов.

Рассмотрим постоянный магнит в виде кольца с воздушным зазором. Будем обозначать все величины, относящиеся к зазору, индексом 2, и величины, относящиеся к телу магнита, — индексом 1 (рис. 20.46). Физически поле магнита создается элементарными токами в теле магнита. Однако напряженность поля H, с которой имеем дело во всех технических расчетах, определяется так, что интеграл $\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l}$ равен только макроскопическим токам, протекающим в проводниках, охватываемых контуром интегрирования, и в его величину не входят элементарные токи в намагниченных телах. Для постоянного магнита, так как макроскопических токов нет, имеем всюду $\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = 0$. В частности, этот интеграл также равен нулю вдоль пути по оси магнита и зазора. Следовательно,

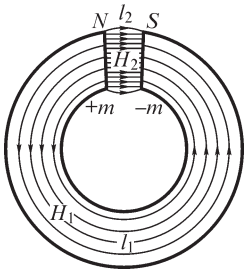


Рис. 20.46

$$\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = H_1 l_1 + H_2 l_2 = 0,$$

т. е.

$$H_1 l_1 = -H_2 l_2,$$

где l_1и l_2 — длины осей магнита и зазора; H_1 и H_2 — напряженности поля в теле магнита и в зазоре. Для упрощения предполагаем поле однородным и в магните, и в зазоре. Заметим, что в последних равенствах и дальше в настоящем параграфе под H подразумеваем не модуль вектора $\boldsymbol{H}$, который всегда положителен, а алгебраическую величину, которая может быть положительной или отрицательной в зависимости от того, совпадает направление вектора $\boldsymbol{H}$ с направлением положительного обхода или ему противоположно.

В общем случае для неоднородного поля следует написать $F_1 = -F_2$, где F_1 и F_2 — магнитодвижущие силы вдоль оси магнита и вдоль оси зазора.

На рис. 20.47 изображена часть гистерезисной петли, снятой при большом магнитном насыщении для замкнутого кольца, т. е. при отсутствии зазора, и характеризующей материал магнита; B_r — остаточная индукция, H_c — коэрцитивная сила. Ветвь abc называется кривой размагничивания. Эта ветвь на рис. 20.48 перестроена в координатах F и Φ, причем F — МДС вдоль оси магнита, при однородном намагничивании равная $H_1 l_1$, и Φ — поток в нейтральной зоне магнита, при однородном намагничивании равный $B_1 s_1$, где s_1 — поперечное сечение магнита.

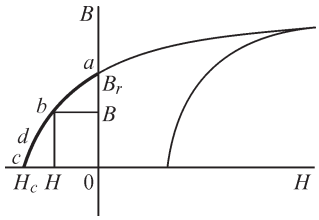


Рис. 20.47

При отсутствии зазора $B = B_r$, $\Phi = \Phi_r$ и H всюду равно нулю. При наличии зазора на проведение магнитного потока через зазор, имеющий магнитное сопротивление $R_{м2}$, требуется МДС $F_2 \quad R_{м2}\Phi_2$.

Если считать приближенно поле в зазоре однородным, то

$$F_2 = H_2 l_2 = \frac{l_2}{\mu_0 s_2}\Phi.$$

На рис. 20.48 прямая $0L$ изображает связь между F_2 и Φ. Так как $F_1 = -F_2$, то прямая $0M$, дающая связь между F_1 и Φ, является зеркальным отражением прямой $0L$ в оси ординат. Очевидно, точка b пересечения луча $0M$ с кривой размагничивания abc и определяет магнитное состояние вещества магнита при наличии воздушного зазора.

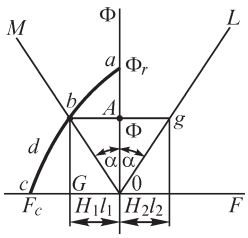


Рис. 20.48

Энергия магнитного поля в зазоре магнита определяется выражением $\Phi F_2/2$, которое при однородном поле приобретает вид

$$\frac{B_2 s_2 H_2 l_2}{2} = \frac{B_2 H_2}{2} V_2,$$

где V_2 — объем зазора. Эта энергия равна половине площади прямоугольника $AbG0$ на рис. 20.48. Необходимо так проектировать магнит, чтобы эта площадь была максимальной. Соответственно, точка b должна занимать на кривой размагничивания в координатах H и B (рис. 20.47) такое положение, чтобы произведение $|BH|$ получилось наибольшим.

Трудность расчета реальных магнитов заключается в трудности вычисления магнитного сопротивления $R_{м2}$ пути потока по воздуху с учетом неоднородности поля, в трудности учета потока рассеяния, выходящего через боковые поверхности магнита, и в трудности определения магнитного состояния магнита при неоднородном намагничивании.

20.14. О расчете магнитных цепей с постоянными магнитами

Если в воздушный зазор магнита внести тело из так называемого магнитомягкого вещества, т. е. из ферромагнитного вещества, которое легко намагничивается в сравнительно слабых полях, то можно пренебречь магнитным сопротивлением тела и утверждать, что внесение такого тела эквивалентно уменьшению зазора и уменьшению магнитного сопротивления зазора. Соответственно вместо прямой $0M$ будем иметь прямую $0M'$ (рис. 20.49). Однако магнитное состояние магнита не переходит в точку b' по кривой размагничивания, а переходит в точку k по кривой bmk, и магнитный поток увеличивается до значения Φ_k. Если вновь удалить тело из воздушного зазора, то магнитное состояние вернется в точку b по кривой knb. Петля $bmknb$ носит наименование частной петли гистерезиса.

Такого рода явления происходят в электрических генераторах с постоянными магнитами, например в магнето (рис. 20.50). Полюсные наконечники и якорь магнето имеют малое магнитное сопротивление. Магнитное же сопротивление зазора меняется в зависимости от положения якоря. В положении, изображенном на рисунке, оно имеет наименьшее значение. При повороте якоря на угол $\pi/2$ оно имеет наибольшее значение. Магнитный поток в магнитной цепи магнита при вращении

якоря периодически изменяется в пределах от Φ_k до Φ_b (рис. 20.49). Поток же, пронизывающий обмотку якоря, изменяется по отношению к этой обмотке от $+\Phi_k$ до $-\Phi_k$ при повороте якоря и обмотки на угол π из положения, указанного на рисунке. Соответственно, среднее значение ЭДС, индуцируемой в обмотке за половину оборота якоря в этих пределах, получается равным

$$e = \frac{2\Phi_k}{T/2},$$

где T — время полного оборота якоря.

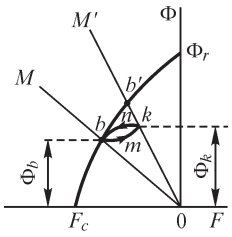


Рис. 20.49

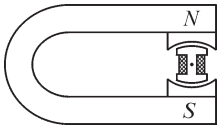


Рис. 20.50

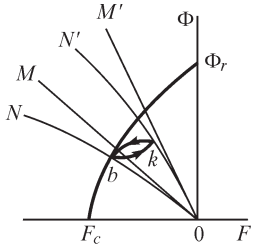


Рис. 20.51

Если учесть конечное магнитное сопротивление полюсных наконечников и якоря, то вместо прямых $0M$ и $0M$ будем иметь кривые $0N$ и $0N'$ (рис. 20.51). Отрезки, параллельные оси $0F$, между кривыми $0N$ и $0M$ и между кривыми $0N'$ и $0M'$ представляют собой в масштабе по оси абсцисс значения магнитодвижущей силы вдоль полюсных наконечников и якоря при соответствующих значениях магнитного потока. Их можно получить из кривых намагничивания материала полюсных наконечников и якоря. Вершины b и k частной петли гистерезиса лежат при этом на кривых $0N$ и $0N'$.

Глава двадцать первая

Нелинейные электрические и магнитные цепи при периодических процессах

21.1. Особенности периодических процессов в электрических цепях с инерционными нелинейными элементами

При наличии нелинейных элементов в электрической цепи при периодических процессах возникает ряд явлений, с которыми мы не встречались, рассматривая линейные электрические цепи. Соответственно, и методы анализа этих явлений и расчета имеют здесь свои особенности. Несколько иной характер имеют периодические процессы в цепях с инерционными и безынерционными нелинейными элементами.

Большинство нелинейных элементов, используемых на практике, должны рассматриваться как безынерционные, и это весьма усложняет процессы и расчеты. Изучению цепей с такими элементами будет посвящена почти вся настоящая глава. Процессы в инерционных элементах проще в том отношении, что их параметры не изменяются в течение периода изменения тока. Поэтому рассмотрим сначала цепи с инерционными элементами, посвятив этому настоящий и следующий параграфы.

Пусть все нелинейные элементы, входящие в цепь, являются инерционными. Это значит, что при установившемся режиме параметры всех элементов цепи остаются неизменными в течение периода изменения токов и напряжений. Следовательно, при заданном неизменном установившемся процессе для описания его можем воспользоваться теми же способами, которые были развиты для описания процессов в линейных цепях. При синусоидальном приложенном к цепи напряжении токи и напряжения во всех ветвях будут также синусоидальны, и для описания процесса можно с полной строгостью воспользоваться комплексной формой записи и векторными диаграммами. При периодическом несинусоидальном процессе, разложив приложенное напряжение в ряд Фурье, будем, как и в линейных цепях, иметь одинаковые значения параметров r, L, C цепи для всех гармоник, если считать, как это мы принимали и ранее, что эти параметры не изменяются с частотой.

Однако при изменении установившегося режима, например, вследствие изменения действующего напряжения на зажимах сети или даже при сохранении этого действующего напряжения, но при изменении спектра амплитуд его гармоник изменяются действующие напряжения и токи в ветвях цепи, и в том числе в ветвях с нелинейными элементами. Так как в последних зависимость $U = F(I)$ нелинейна, то изменяются их параметры $r_э = U_r/I$, $\omega L_э = U_L/I$ и $1/(\omega C_э) = U_C/I$ и, следовательно, изменяется распределение токов во всей электрической цепи.

Таким образом, исключена возможность пользоваться для расчета такой цепи методом наложения и всеми методами расчета сложных цепей, основанными на принципе наложения. Остаются в силе законы Кирхгофа, которые при синусоидальном напряжении могут быть записаны в комплексной форме. Но в этих

уравнениях комплексные сопротивления нелинейных инерционных элементов, т. е. модули и аргументы этих сопротивлений, будут функциями действующих токов в этих элементах. Следовательно, алгебраические уравнения, записанные в комплексной форме согласно законам Кирхгофа, являются теперь нелинейными. Трудность решения их заключается в том, что в общем случае от действующего тока в нелинейном элементе могут зависеть и модуль, и аргумент комплексного сопротивления элемента. Но даже если изменяется только модуль этого сопротивления, расчет остается сложным, так как это изменение ведет к перераспределению амплитуд и изменению фаз токов во всех ветвях цепи.

Можно рекомендовать при синусоидальном приложенном напряжении следующий метод последовательных приближений. Задаемся некоторыми вероятными значениями комплексных сопротивлений $Z_s = z_s e^{j\varphi_s}$ нелинейных элементов и, считая их постоянными, производим расчет цепей. Определив действующие токи в нелинейных элементах, проверяем соответствие заданных параметров элементов значениям этих параметров, полученных из действительных характеристик нелинейных элементов при найденных значениях токов. При несовпадении значений параметров вносим поправки в них и производим повторный расчет. Этот расчет следует выполнять до тех пор, пока принятые для расчета значения параметров не будут достаточно близки к их значениям, полученным из характеристик.

Инерционными элементами с сопротивлениями, как было указано в § 19.4, являются, например, такие, которые обладают большой тепловой инерцией (например, лампы накаливания). Примером инерционного индуктивного элемента может служить электромеханический элемент, который рассмотрим в следующем параграфе.

Синусоидальные установившиеся режимы в сложных электроэнергетических системах в некоторых случаях также могут быть описаны системами нелинейных алгебраических уравнений. Такая возможность возникает, когда оказываются заданными не ЭДС и параметры линий и нагрузок, а значения потребляемых и генерируемых мощностей. При условии задания потребляемой мощности ток и напряжение оказываются взаимосвязанными через нелинейное сопротивление (или проводимость). Действительно, если

$$p = ui = \text{const} \quad \text{и} \quad \overset{*}{S} = \dot{I}\overset{*}{U} = \text{const},$$

то $i = \dfrac{p}{u} = f(u)$ или $\dot{I} = \dfrac{\overset{*}{S}}{\overset{*}{U}} = f(\overset{*}{U})$.

В сложных электроэнергетических системах с точки зрения эксплуатационных характеристик и из-за особенностей соединений генераторов и потребителей наиболее целесообразно в качестве искомых величин выбирать напряжения в узлах системы. С учетом этого для расчета таких систем наиболее распространен метод узловых напряжений. Относительно узловых напряжений можно записать

$$\mathbf{A}^t\mathbf{Y}\mathbf{A}\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{A}^t(\mathbf{1}\overset{*}{\mathbf{U}})^{-1}\overset{*}{\mathbf{S}}.$$

Здесь $\mathbf{Y}$ — матрица комплексных узловых проводимостей; $\mathbf{A}$ — матрица соединений; $\dot{\mathbf{U}}$ — матрица-столбец узловых комплексных напряжений; $\overset{*}{\mathbf{S}}$ — матри-

ца-столбец заданных комплексных мощностей источников и приемников. Это матричное уравнение по указанным выше причинам представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений относительно комплексных узловых напряжений. Разделив вещественные и мнимые составляющие, можно записать

$$\mathbf{A}^t\mathbf{Y}\mathbf{A}\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{A}^t(\mathbf{1}\overset{*}{\dot{\mathbf{U}}})^{-1}\overset{*}{\mathbf{S}} = \Phi_1(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) + j\Phi_2(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = 0$$

или

$$\Phi_1(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \Phi_2(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = \mathbf{0}.$$

Последняя система уравнений, написанная для вещественных матриц $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$, может быть решена изложенными во второй главе методами простых итераций или Ньютона. Разумеется, методы расчета сложных электрических систем не ограничиваются приведенными выше. В зависимости от поставленной задачи и характера заданных исходных данных могут быть сформированы различные системы уравнений. Однако для всех этих подходов остается общим то, что в конечном итоге формируется система нелинейных алгебраических уравнений. Приведенные в качестве примера методы решения таких систем уравнений (метод простой итерации и метод Ньютона) являются основой для разработки других, более эффективных методов расчета сложных нелинейных цепей переменного тока в установившихся режимах.

21.2. Процессы в цепи с индуктивным инерционным электромеханическим элементом

Рассмотрим электромагнит, питаемый синусоидальным действующим током I; между его полюсами может вдоль направляющих вертикально перемещаться массивный ферромагнитный якорь (рис. 21.1). Положение якоря определим координатой x, отсчитываемой от некоторого начального положения (от упора якоря). К якорю приложены сила тяжести G, направленная вниз, и электромагнитная сила F, втягивающая якорь в пространство между полюсами электромагнита и направленная вверх.

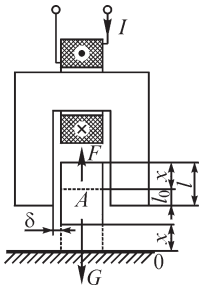


Рис. 21.1

Мгновенная электромагнитная сила f, согласно изложенному в § 2.4, т. I, имеет выражение

$$f = \frac{i^2}{2}\frac{\partial L}{\partial x}.$$

Если осуществить зависимость $L(x)$ в виде $L = ax + L_0$, то $\partial L/\partial x = a = \text{const}$. При достаточно массивном якоре вследствие инерции положение его остается практически неизменным в течение периода изменения тока. Поэтому среднее за период значение электромагнитной силы F равно

$$F = \frac{1}{T}\int_0^T f\,dt = \frac{a}{2}\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt = \frac{a}{2}I^2.$$

Эта сила уравновешивается силой тяжести G, и, следовательно,

$$G = \frac{a}{2}I^2.$$

Так как $G = \text{const}$, то и $I = \text{const} = I_0$, т. е. такое устройство осуществляет *стабилизацию действующего тока*.

Зависимость $L = ax + L_0$ имела бы место, если бы зазор δ между якорем и полюсами оставался неизменным, все линии магнитного потока проходили через зазор и можно было бы пренебречь магнитными сопротивлениями якоря и сердечника. При этом

$$L = \frac{\Psi_L}{i} = \frac{w\Phi}{i} = \frac{w^2\Phi}{iw} = \frac{w^2}{R_м} = \frac{w^2}{2\delta/(\mu_0 s)},$$

где сечение, сквозь которое проходит магнитный поток в зазоре, $s = bl = b(x + l_0)$. Таким образом, $L = \frac{w^2\mu_0 b}{2\delta}(x + l_0) = ax + L_0$. При этих идеальных условиях индуктивность остается постоянной, равной L_0, до тех пор, пока якорь лежит на упоре, т. е. пока $I < I_0$ и $F < G$. При этом с увеличением напряжения U_L на катушке ток растет пропорционально ему: $U_L = I\omega L_0$, что соответствует начальной прямолинейной ветви $0c$ характеристики катушки (рис. 21.2). Как только ток достигнет значения I_0, будет иметь место равенство $F = G$ и якорь окажется во взвешенном состоянии. Если увеличить напряжение выше значения U_{L_0}, то при том же нижнем положении якоря на упоре увеличится ток выше значения I_0, сила F будет больше G и якорь поднимется. Он будет подниматься до тех пор, пока вследствие возрастания индуктивности L ток не упадет вновь до значения I_0, при котором будет иметь место равенство $F = G$. Каждому значению напряжения U_L соответствует свое значение индуктивности L, т. е. определенное положение якоря. Таким образом, характеристика катушки $U_L(I)$, испытав излом в точке c, дальше идет в виде вертикальной прямой, и в пределах этой прямой данное устройство работает как *стабилизатор тока*. Если этот нелинейный элемент включить последовательно с приемником, имеющим сопротивление $Z_{пр}$ (рис. 21.3), то в известных пределах изменения приложенного напряжения U на зажимах цепи ток в приемнике окажется неизменным. Реальная характеристика несколько отличается от идеальной и представлена на рис. 21.4.

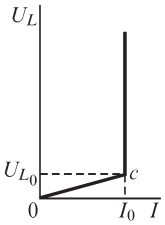


Рис. 21.2

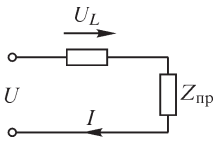


Рис. 21.3

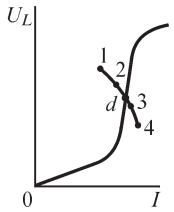


Рис. 21.4

В соответствии с изложенным в предыдущем параграфе расчет режима в цепи при заданном напряжении $\dot{U}$ ведем методом последовательных приближений. Задаемся некоторым значением L_1 индуктивности L нелинейного элемента и вычисляем ток, который был бы в цепи при этом значении L_1:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{j\omega L_1 + Z_{\text{пр}}}.$$

При этом действующее напряжение на катушке было бы равно $U_{L_1} = I_1\omega L_1$. Этим значениям U_{L_1} и I_1 соответствует точка *1* на рис. 21.4. Если эта точка не легла на характеристику катушки, то индуктивность L_1 была выбрана неправильно. Задаваясь рядом значений индуктивности L, получим точки *2*, *3*, *4*. Проводя через эти точки кривую, получим на пересечении ее с характеристикой катушки точку *d*, определяющую искомый режим.

21.3. Особенности периодических процессов в цепях с безынерционными нелинейными элементами. Метод эквивалентных синусоид

Если хотя бы один нелинейный элемент в цепи является безынерционным, то периодические токи и напряжения в цепи будут содержать высшие гармоники, даже если приложенное к зажимам цепи напряжение синусоидальное. Пусть характеристика нелинейного элемента, изображенная на рис. 21.5, *а*, выражается уравнением $i = au^3$. При синусоидальном изменении напряжения ток будет

$$i = aU_m^3 \sin^3 \omega t = \frac{3}{4} aU_m^3 \sin\omega t - \frac{1}{4} aU_m^3 \sin\omega t,$$

т. е. он содержит третью гармонику.

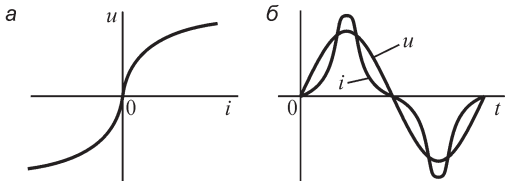


Рис. 21.5

На рис. 21.5, *б* изображены во времени кривые тока и напряжения. Кривую тока $i(t)$ можно было бы построить графически по точкам, пользуясь характеристикой $u(i)$. Уже из этого примера видно, что ток и напряжение на безынерционном элементе не могут быть одновременно синусоидальными. Для сложной цепи расчет является весьма сложным, так как использование комплексной формы записи и векторных диаграмм оказывается невозможным, и расчет необходимо вести для мгновенных величин, причем из-за нелинейности цепи неприменим и метод наложения.

В тех случаях, когда вопрос о форме кривых токов и напряжений нас непосредственно не интересует, можно воспользоваться приближенным методом, основанным на замене действительных несинусоидальных кривых тока и напряжения эквивалентными им синусоидами. Соответственно, такой метод можно назвать м е т о д о м э к в и в а л е н т н ы х с и н у с о и д.

Смысл ведения этого метода заключается в возможности записи уравнений в комплексной форме, а также в построении векторных диаграмм, хотя комплекс-

ные сопротивления остаются зависящими от тока, а следовательно, алгебраические уравнения, записанные в комплексной форме, остаются нелинейными.

Выбор эквивалентных синусоид тока и напряжения, т. е. их амплитуд и начальных фаз, может быть осуществлен тем или иным способом в зависимости от поставленной задачи. Интересуясь энергетической стороной процесса, этот выбор целесообразно осуществить так, чтобы активная мощность в цепи или в той или иной части цепи оставалась без изменения. Например, если мы желаем, чтобы активная мощность на нелинейном элементе, характеристика которого приведена на рис. 21.5, *а*, при синусоидальном напряжении на этом элементе осталась неизменной после замены несинусоидальной кривой тока эквивалентной ей синусоидой, то в этих условиях эквивалентной синусоидой должна быть первая гармоника тока, так как при этом имеем (см. § 8.4, т. 1)

$$P = I_1U_1\cos\varphi_1 + I_2U_2\cos\varphi_2 + I_3U_3\cos\varphi_3 + \ldots = U_1I_1 = UI_1.$$

Действительно, в данном случае $U_2 = U_3 = \ldots = 0$, $U_1 = U$ и $\cos\varphi_1 = 1$.

Иногда может оказаться целесообразным выбор эквивалентной синусоиды тока или напряжения так, чтобы сохранялось их действующее значение. Например, это целесообразно, когда последовательно включены линейный резистор r с нелинейной индуктивной катушкой без потерь. В таком случае несинусоидальный ток $i(t)$ в катушке имеет смысл заменить синусоидой, эквивалентной ему по действующему значению, т. е. выбрать амплитуду эквивалентной синусоиды равной

$$I_{mэ} = \sqrt{2}\,I = \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}.$$

Действительно, в этом случае активная мощность в линейном резисторе r, равная I^2r, остается без изменения.

Метод эквивалентных синусоид находит применение при расчете периодических процессов в нелинейных радиотехнических устройствах, например в ламповых генераторах. При этом в качестве эквивалентной синусоиды применяют первые гармоники тока и напряжения, так как именно на их частоту настраивают резонансные контуры, в которых токи и напряжения в основном и определяются первыми гармониками.

Широкое использование метод эквивалентных синусоид находит при расчете устройств, содержащих ферромагнитные сердечники, например трансформаторов. В связи с этим рассмотрим этот метод более подробно в применении к реактивным катушкам и трансформаторам с ферромагнитными сердечниками.

Подчеркнем еще раз, что по своей сути этот метод является приближенным, но при нем получаем возможность пользоваться комплексной записью уравнений и векторными диаграммами.

21.4. Формы кривых тока, магнитного потока и ЭДС в катушке с ферромагнитным сердечником

Так как катушки с ферромагнитным сердечником находят весьма широкое применение в цепях переменного тока, рассмотрим вопрос о влиянии нелинейной

зависимости магнитного потока в таких катушках от тока в них на форму кривых тока, потока и ЭДС.

Связь $\Psi = f(i)$ определяется петлей гистерезиса (рис. 21.6), если можно пренебречь влиянием вихревых токов, о котором будет сказано позже. Пусть потокосцепление Ψ, а следовательно, и ЭДС в обмотке катушки $e = -d\Psi/dt$, а также напряжение $u = d\Psi/dt$, ее уравновешивающее, изменяются по синусоидальному закону (рис. 21.6). В таком случае кривая тока в обмотке катушки содержит высшие гармоники, преимущественно третью, пятую и седьмую. Кривую тока нетрудно построить по точкам, как это показано на рис. 21.6. Максимумы тока и потока совпадают, но через нуль кривая тока проходит раньше кривой магнитного потока. Кривая тока имеет заостренную форму. В другом предельном случае, когда ток изменяется по синусоидальному закону, кривая магнитного потока отлична от синусоиды и имеет уплощенную форму (рис. 21.7). Кривые же ЭДС e, равной $-d\Psi/dt$, и напряжения u, равного $d\Psi/dt$, при этом имеют весьма заостренную форму (рис. 21.7). Построение кривой потока по заданной кривой тока и петле гистерезиса нетрудно осуществить по точкам графически. Кривую же напряжения получаем дифференцированием кривой потока.

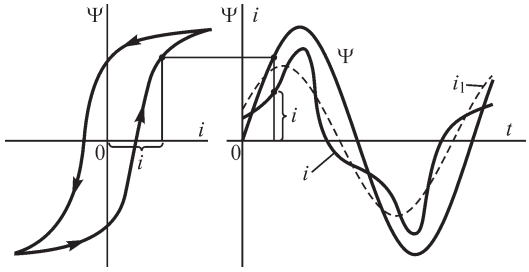


Рис. 21.6

В общем случае как кривая тока, так и кривая напряжения могут оказаться несинусоидальными.

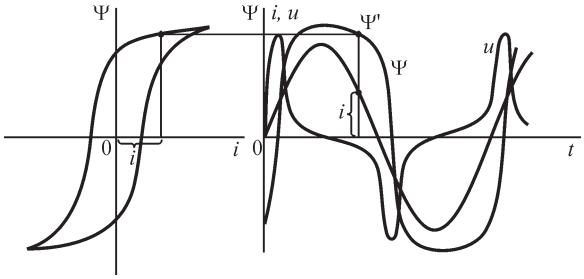


Рис. 21.7

Обратим внимание на то, что вследствие симметричной формы петли гистерезиса в рассмотренных случаях (рис. 21.6 и 21.7) несинусоидальные кривые тока, потока и напряжения симметричны относительно оси абсцисс и, следовательно, не содержат четных гармоник.

21.5. Потери в сердечниках из ферромагнитного материала

Для правильного выбора эквивалентных синусоид, заменяющих действительные несинусоидальные кривые тока и напряжения в катушках с ферромагнитными сердечниками, необходимо рассмотреть потери энергии в сердечниках при периодическом изменении магнитного потока. Эти потери складываются из потерь на вихревые токи и на гистерезис.

Сердечники большей частью набирают из тонких листов ферромагнитного материала, изолированных друг от друга тонким слоем изоляции с целью уменьшения потерь на вихревые токи.

Вихревые токи, согласно принципу Ленца, направлены таким образом, что созданное ими магнитное поле ослабляет результирующее поле. Это ослабление наиболее резко выражено в середине листа. Поэтому результирующее магнитное поле распределяется неравномерно по сечению листа. Толщину листа для уменьшения потерь выбирают малой; при этом можно пренебречь неравномерностью поля внутри листа, т. е. размагничивающим действием вихревых токов. Подробно этот вопрос будет рассмотрен в четвертой части курса при исследовании переменного электромагнитного поля в проводящей среде. Приняв такое допущение, легко можем получить зависимость потерь на вихревые токи от амплитуды магнитной индукции, частоты и удельной проводимости материала листа.

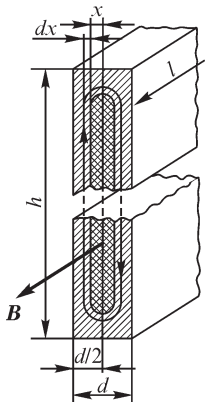


Рис. 21.8

На рис. 21.8 показана трубка вихревого тока, имеющая сечение $l\,dx$ и длину, приблизительно равную $2h$. Активная проводимость вдоль этой трубки обратна ее активному сопротивлению, поскольку мы пренебрегаем магнитным полем вихревых токов и, следовательно, соответствующим индуктивным сопротивлением. Имеем $dg_x = \gamma \dfrac{l\,dx}{2h}$. Действующая ЭДС, индуцируемая вдоль трубки, равна

$$E_x = 4k_ф f \Phi_{mx} = 4k_ф f\, 2xhB_m,$$

где $k_ф$ — коэффициент формы кривой ЭДС. Следовательно, потери внутри трубки тока равны $dP_в = E_x^2 dg_x = 32hl\gamma k_ф^2 f^2 B_m^2 x^2 dx$. Интегрируя от 0 до $d/2$, получаем потери на вихревые токи во всем листе:

$$P_в = \frac{4}{3}\gamma k_ф^2 d^2 f^2 B_m^2 V,$$

где $V = hld$ — объем листа. Таким образом, потери на вихревые токи *при принятом допущении* пропорциональны квадрату частоты, квадрату амплитуды индукции, квадрату толщины листа и первой степени удельной проводимости.

Для сердечника из проволок круглого сечения с диаметром d, оси которых направлены вдоль линии магнитной индукции, при том же допущении получим вместо коэффициента 4/3 коэффициент 1/2. Обобщая полученный результат, можем написать

$$P_в = \xi f^2 B_m^2 V,$$

где коэффициент ξ зависит от формы сечения элементов, на которые разделен сердечник, геометрических размеров этого сечения, удельной проводимости материала и коэффициента формы $k_ф$.

Потери на гистерезис в единице объема вещества за один цикл перемагничивания, как было указано в § 19.12, могут быть выражены в виде $W'_г = \eta B_m^n$, где коэффициент η зависит от свойств ферромагнитного вещества. Следовательно, мощность потерь на гистерезис в объеме V, равная потерям энергии в единицу времени, т. е. за f циклов, может быть выражена в виде

$$P_г = \eta f B_m^n V.$$

В диапазоне амплитуд индукции, с которым обычно имеем дело в электротехнических устройствах, можно принять $n = 2$.

Таким образом, суммарная мощность потерь в сердечнике может быть представлена формулой

$$P_{фер} = P_г + P_в = \eta f B_m^2 V + \xi f^2 B_m^2 V.$$

То обстоятельство, что мощность $P_г$ пропорциональна первой степени частоты, а мощность $P_в$ — квадрату частоты, позволяет экспериментально разделить суммарные потери $P_{фер}$ на $P_г$ и $P_в$, произведя два измерения при двух частотах, но при неизменной амплитуде магнитной индукции. С этой целью необходимо в этих двух опытах иметь одинаковое отношение ЭДС к частоте.

21.6. Эквивалентные синусоиды и зависимость между потокосцеплением и током

Заменим несинусоидальный ток в катушке с ферромагнитным сердечником и напряжение на ее зажимах эквивалентными синусоидами. Надлежит выбрать амплитуды U_m и I_m эквивалентных синусоид и угол сдвига фаз φ между ними. Здесь мы рассматриваем напряжение, уравновешивающее ЭДС, индуцируемую в обмотке катушки переменным магнитным потоком в сердечнике, не учитывая падения напряжения в активном сопротивлении обмотки и индуктивного падения напряжения, определяемого потоками рассеяния.

Связь между φ, $U_m = \sqrt{2}U$ и $I_m = \sqrt{2}I$ для эквивалентных синусоид определяется из условия сохранения потерь в сердечнике, т. е. из условия

$$UI\cos\varphi = P_{фер} = P_г + P_в.$$

Необходимы еще два условия для определения всех трех величин φ, $U_m = \sqrt{2}U$ и $I_m = \sqrt{2}I$. Этими условиями могут быть, как было сказано в § 21.3, выбор U_m и I_m равными амплитудам первых гармоник напряжения и тока или выбор U и I равными действующим несинусоидальным напряжениям и току.

Замена действительных кривых тока эквивалентными синусоидами приводит к тому, что связь Ψ и i выражается уравнением эллипса, площадь которого в соответствующих масштабах равна потерям в сердечнике за один период. В зависимости от выбора амплитуд U_m и I_m эквивалентных синусоид получим тот или иной эллипс, но все эти эллипсы должны иметь одну и ту же площадь.

При синусоидальном напряжении, соответственно, при синусоидальном потоке в качестве амплитуд U_m и Ψ_m естественно взять действительные амплитуды

этих величин. Амплитуду же I_m следует выбрать либо равной амплитуде первой гармоники тока i, либо равной его действующему значению, умноженному на $\sqrt{2}$. Соответственно тому или другому выбору амплитуды эквивалентной синусоиды тока получим то или иное значение φ и тот или иной вид эллипса.

При синусоидальном токе естественно выбрать величину I_m равной действительной амплитуде тока i. Амплитуду же U_m следует выбрать либо равной амплитуде первой гармоники напряжения u, либо равной его действующему значению, умноженному на $\sqrt{2}$. Амплитуда Ψ_m определится из равенства $U_m = \omega\Psi_m$. Соответственно, получим то или иное значение φ и тот или иной вид эллипса.

На рис. 21.9 и 21.10 сказанное иллюстрируется в предположении, что учитываются только потери на гистерезис. Рис. 21.9 относится к синусоидальным напряжению u и потоку Ψ, а рис. 21.10 — к синусоидальному току i. В этих случаях площадь эллипса равна площади петли гистерезиса. Наличие вихревых токов несколько приближает к эллипсу действительную кривую $\Psi(i)$. Площадь эквивалентного эллипса при этом должна быть взята равной площади этой действительной кривой, равной в соответствующем масштабе суммарным потерям в сердечнике.

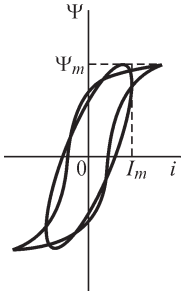


Рис. 21.9

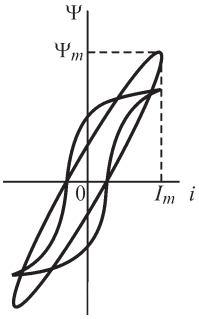


Рис. 21.10

21.7. Уравнение, векторная диаграмма и эквивалентная схема катушки с ферромагнитным сердечником

Рассмотрим процессы в катушке с замкнутым ферромагнитным сердечником, обмотка которой имеет w витков.

Уравнение, описывающее процесс в катушке, имеет вид

$$u = ri + \frac{d\Psi}{dt},$$

где r — сопротивление обмотки.

Полное потокосцепление представим в виде суммы $\Psi = \Psi_\sigma + \Psi_0$. Величина Ψ_0 есть потокосцепление, определяемое линиями магнитной индукции, замыкающимися целиком вдоль сердечника. Следовательно, $\Psi_0 = w\Phi_0$, где Φ_0 — поток сквозь сечение сердечника, определяемый этими линиями. Ψ_σ есть потокосцепление, определяемое линиями магнитной индукции, замыкающимися частично или полностью в воздухе.

Разделение величины Ψ на Ψ_σ и Ψ_0 имеет тот смысл, что потокосцепление Ψ_σ пропорционально току: $\Psi_\sigma = L_\sigma i$, так как магнитное сопротивление пути, по которому замыкаются линии потока, практически не зависит от тока и, следовательно, индуктивность L_σ постоянна. Потокосцепление Ψ_0 *нелинейно* связано с током i, так как магнитная проницаемость и, следовательно, магнитное сопротивление сердечника зависят от напряженности магнитного поля. Уравнение катушки теперь можно переписать в виде

$$u = ri + L_\sigma \frac{di}{dt} + w\frac{d\Phi_0}{dt} = ri + L_\sigma \frac{di}{dt} + u_0.$$

Это уравнение нелинейное. Поэтому, даже если приложенное напряжение u синусоидально, ток i будет несинусоидальным. Заменяя несинусоидальные кривые тока и потока эквивалентными синусоидами, можем записать это уравнение в комплексной форме для комплексных амплитуд:

$$\dot{U}_m = r\dot{I}_m + j\omega L_\sigma \dot{I}_m + j\omega w\dot{\Phi}_{0m} = r\dot{I}_m + j\omega L_\sigma \dot{I}_m + \dot{U}_{0m}.$$

Согласно изложенному в предыдущем параграфе, эквивалентная синусоида тока i отстает от эквивалентной синусоиды напряжения $u_0 = d\Psi_0/dt$ на угол $\varphi_0 < \pi/2$ вследствие наличия потерь в сердечнике $P_{фер} = P_г + P_в = U_0 I \cos\varphi_0 > 0$. Таким образом, эквивалентная синусоида потока Ψ_0 отстает от эквивалентной синусоиды тока i на угол $\alpha = \pi/2 - \varphi_0$, так как эквивалентная синусоида потока Ψ_0 отстает от эквивалентной синусоиды напряжения u_0 на угол $\pi/2$.

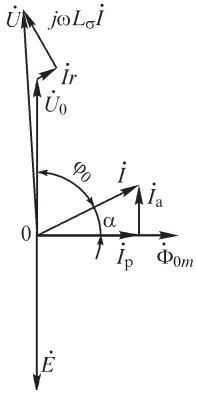


Рис. 21.11

На рис. 21.11 изображена векторная диаграмма катушки, соответствующая уравнению катушки, записанному в комплексной форме. На диаграмме отложен вектор ЭДС, индуцируемой в обмотке потоком Φ_0, равной $e_0 = -w\dfrac{d\Phi_0}{dt}$.

Ток I можно разложить на две составляющие: $I_р$, находящуюся в фазе с потоком, и $I_а$, находящуюся в квадратуре с потоком. Величина $I_р$ представляет собой реактивную составляющую тока, а величина $I_а$ — активную составляющую. Соответственно, можем изобразить катушку с помощью эквивалентной схемы, приведенной на рис. 21.12, причем

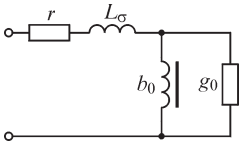


Рис. 21.12

$$b_0 = \frac{I_р}{U_0} \quad \text{и} \quad g_0 = \frac{I_а}{U_0} = \frac{I_а U_0}{U_0^2} = \frac{P_{фер}}{U_0^2}.$$

21.8. Комплексное магнитное сопротивление магнитной цепи

То обстоятельство, что поток Φ_0 в ферромагнитном сердечнике катушки отстает по фазе на угол α от намагничивающего тока i в обмотке катушки и, следовательно, от МДС iw, можно учесть, введя в закон магнитной цепи

$$\dot{\Phi}_{0m} = \frac{\dot{I}_m w}{Z_м}$$

комплексное магнитное сопротивление сердечника

$$Z_м = |Z_м| e^{j\alpha} = R_м + jX_м.$$

Выразим комплексное магнитное сопротивление через длину l сердечника, сечение s сердечника и магнитную проницаемость вещества сердечника. Сечение s будем считать одинаковым по всей длине сердечника. Получаем

$$Z_{\text{м}} = \frac{\dot{I}_m w}{\dot{\Phi}_{0m}} = \frac{\dot{H}_m l}{\dot{B}_m s} = \frac{l}{\dot{\mu} s},$$

где $\dot{\mu} = \dot{B}_m / \dot{H}_m$ — комплексная магнитная проницаемость, учитывающая и потери в веществе сердечника.

Существует важная связь между комплексным магнитным сопротивлением $Z_{\text{м}}$ сердечника и комплексным электрическим сопротивлением $Z_{0\text{э}} = 1/(g_0 - jb_0)$ обмотки, определяемым напряжением $\dot{U}_{0m} = j\omega\dot{\Phi}_{0m} w$. Имеем

$$Z_{0\text{э}} = \frac{\dot{U}_{0m}}{\dot{I}_m} = \frac{j\omega w^2 \dot{\Phi}_{0m}}{\dot{I}_m w} = \frac{j\omega w^2}{Z_{\text{м}}}.$$

Появление мнимой составляющей $jX_{\text{м}}$ в комплексном магнитном сопротивлении является результатом наличия потерь в сердечнике. Действительно, используя эквивалентную схему катушки (рис. 21.12) и выражение для ее параметров $g_0 = \frac{P_{\text{фер}}}{U_0^2} = \frac{2P_{\text{фер}}}{U_{0m}^2} = \frac{2P_{\text{фер}}}{\omega^2 w^2 \Phi_{0m}^2}$, получаем

$$\frac{1}{Z_{0\text{э}}} = Y_{0\text{э}} = g_0 - jb_0 = \frac{Z_{\text{м}}}{j\omega w^2} = \frac{R_{\text{м}} + jX_{\text{м}}}{j\omega w^2} = \frac{X_{\text{м}}}{\omega w^2} - j\frac{R_{\text{м}}}{\omega w^2},$$

откуда

$$X_{\text{м}} = \omega w^2 g_0 = \frac{2P_{\text{фер}}}{\omega^2 \Phi_{0m}^2}.$$

Таким образом, действительно, $X_{\text{м}}$ пропорционально потерям в сердечнике.

Используя понятие о комплексном магнитном сопротивлении и, соответственно, о комплексной магнитной проницаемости, получаем возможность описывать периодические процессы также и в магнитных цепях с помощью комплексного метода. Подчеркнем здесь, что как $R_{\text{м}}$, так и $X_{\text{м}}$ являются *нелинейными* функциями амплитуды МДС $I_m w$ или амплитуды потока Φ_{0m}.

21.9. Уравнения, векторная диаграмма и эквивалентная схема трансформатора с ферромагнитным сердечником

Обмотки трансформатора обычно располагаются на ферромагнитном сердечнике, что обеспечивает увеличение магнитной связи между обмотками. С этой же целью стремятся расположить обмотки как можно ближе друг к другу. Рассмотрим трансформатор с двумя электрически не соединенными обмотками, имеющими числа витков w_1 и w_2.

Реальная картина магнитного поля в трансформаторе достаточно сложна. Некоторые магнитные линии замыкаются целиком по сердечнику, охватывая все витки обеих обмоток, другие проходят частично или целиком по воздуху, охватывая то или иное число витков обмоток. Интересуясь только напряжениями на зажимах обмоток и не рассматривая распределение напряжения между отдельными их витками, можем действительную сложную картину поля заменить эквивалентной ей упрощенной, изображенной на рис. 21.13. Линии потока Φ_0 охватывают все витки обеих обмоток. Линии потока $\Phi_{\sigma 1}$ охватывают все витки

только первой обмотки. Линии потока $\Phi_{\sigma 2}$ охватывают все витки только второй катушки. Поток Φ_0 называют основным, а потоки $\Phi_{\sigma 1}$ и $\Phi_{\sigma 2}$ — потоками рассеяния. Поток Φ_0 *нелинейно* связан с магнитодвижущей силой $i_1 w_1 + i_2 w_2$, определяемой обоими токами. Поток $\Phi_{\sigma 1}$ пропорционален току i_1, а поток $\Phi_{\sigma 2}$ пропорционален току i_2. Для потокосцеплений с первой и второй катушками можем написать

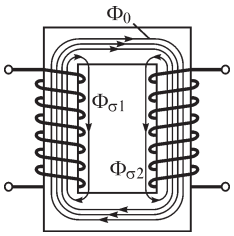


Рис. 21.13

$$\Psi_1 = \Psi_{\sigma 1} + \Psi_{01} = L_{\sigma 1} i_1 + w_1 \Phi_0;$$
$$\Psi_2 = \Psi_{\sigma 2} + \Psi_{02} = L_{\sigma 2} i_2 + w_2 \Phi_0.$$

Здесь $L_{\sigma 1}$ и $L_{\sigma 2}$ — индуктивности первичной и вторичной обмоток, определяемые потоками рассеяния.

Пусть к зажимам первичной обмотки трансформатора приложено напряжение u_1, а к зажимам вторичной обмотки приключен приемник. Напряжение u_1 имеет составляющую $r_1 i_1$, равную падению напряжения в сопротивлении первичной обмотки, и составляющую $d\Psi_1/dt$, уравновешивающую ЭДС, индуцируемую потоком Ψ_1:

$$u_1 = r_1 i_1 + \frac{d\Psi_1}{dt}.$$

ЭДС $-d\Psi_2/dt$, индуцируемая потоком Ψ_2 во вторичной обмотке, преодолевает падение напряжения $r_2 i_2$ в сопротивлении вторичной обмотки и напряжение u_2 на зажимах приемника:

$$-\frac{d\Psi_2}{dt} = r_2 i_2 + u_2.$$

Пользуясь разложением потоков на потоки рассеяния и основной, можем написать уравнения трансформатора в виде

$$u_1 = r_1 i_1 + L_{\sigma 1}\frac{di_1}{dt} + w_1\frac{d\Phi_0}{dt} = r_1 i_1 + L_{\sigma 1}\frac{di_1}{dt} + u_0;$$

$$-w_2\frac{d\Phi_0}{dt} = r_2 i_2 + L_{\sigma 2}\frac{di_2}{dt} + u_2.$$

Обозначим через $e_1 = -u_0 = -w_1\dfrac{d\Phi_0}{dt}$ и $e_2 = -w_2\dfrac{d\Phi_0}{dt}$ ЭДС, индуцируемые потоком Φ_0 в первичной и вторичной обмотках.

Уравнения трансформатора нелинейны вследствие нелинейной связи между потоком Φ_0 и МДС $i_1 w_1 + i_2 w_2$. Поэтому периодические токи, потоки и напряжения несинусоидальны. Заменяя их эквивалентными синусоидами, можем написать уравнения трансформатора в комплексной форме:

$$\dot{U}_1 = r_1\dot{I}_1 + j\omega L_{\sigma 1}\dot{I}_1 + \dot{U}_0;$$

$$\dot{E}_2 = r_2\dot{I}_2 + j\omega L_{\sigma 2}\dot{I}_2 + \dot{U}_2,$$

причем $\dot{U}_2 = Z_{\text{пр}}\dot{I}_2$, где $Z_{\text{пр}}$ — комплексное сопротивление приемника.

Если числа витков w_1 и w_2 существенно отличаются друг от друга, то столь же различными будут действующие ЭДС e_1 и e_2. Принято в этом случае осуществлять так называемое приведение всех величин во вторичной цепи к первичной цепи. Приведенные величины будем отмечать штрихами. Приведение осуществляют, заменяя реальный трансформатор с числом витков w_2 во вторичной обмотке эквивалентным трансформатором с числом витков во вторичной обмотке $w'_2 = w_1$. Таким образом, вместо действительного трансформатора с коэффициентом трансформации $n = w_1/w_2$ рассматриваем эквивалентный ему трансформатор с коэффициентом трансформации, равным единице.

Условием эквивалентности является одинаковая в обоих случаях реакция вторичной цепи на первичную. Это значит, что МДС вторичной обмотки должна остаться без изменения, т. е. $w'_2 i'_2 = w_2 i_2$ и, следовательно, $i'_2 = i_2/n$. Так как поток Φ_0 при этом не изменяется, то ЭДС во вторичной обмотке изменяется пропорционально числу витков. Имеем $e'_2 = \dfrac{w'_2}{w_2} e_2 = ne_2$. Очевидно, точно так же все падения напряжения во вторичной цепи должны быть пересчитаны пропорционально коэффициенту трансформации n.

Сопротивления и индуктивности во вторичной цепи пересчитываются пропорционально n^2, так как напряжения изменяются пропорционально n, а ток — обратно пропорционально n. Проводимости и емкости пересчитываются обратно пропорционально n^2.

После приведения уравнения трансформатора запишутся в виде

$$\dot{U}_1 = r_1\dot{I}_1 + j\omega L_{\sigma 1}\dot{I}_1 + \dot{U}_0;$$
$$\dot{E}'_2 = r'_2\dot{I}'_2 + j\omega L'_{\sigma 2}\dot{I}'_2 + \dot{U}'_2,$$

где $\dot{U}'_2 = Z'_{\text{пр}} I'_2$.

Связь между комплексной амплитудой потока $\dot{\Phi}_0$ и вызывающей этот поток МДС $i_1w_1 + i_2w_2$ в комплексной форме запишется как

$$\dot{\Phi}_{0m} = \frac{\dot{I}_{1m}w_1 + \dot{I}_{2m}w_2}{Z_{\text{м}}} = \frac{\dot{I}_{1m}w_1 + \dot{I}'_{2m}w'_2}{Z_{\text{м}}} = \frac{(\dot{I}_{1m} + \dot{I}'_{2m})w_1}{Z_{\text{м}}} = \frac{\dot{I}_{0m}w_1}{Z_{\text{м}}},$$

где $Z_{\text{м}} = R_{\text{м}} + jX_{\text{м}}$ — комплексное магнитное сопротивление сердечника, причем $X_{\text{м}}$ учитывает потери в сердечнике на гистерезис и вихревые токи. Величину $\dot{I}_{0m} = \dot{I}_{1m} + I'_{2m}$ называют намагничивающим током. Заметим, что в обмотках протекают токи i_1 и i_2, а ток i_0 является при $i_1 \neq 0$ и $i_2 \neq 0$ лишь расчетной величиной. Ток i_0 равен току i_1 только при $i_2 = 0$.

Вследствие наличия потерь в сердечнике поток Φ_0 отстает по фазе от тока i_0 на угол α.

В соответствии с последними уравнениями трансформатора можем построить векторную диаграмму трансформатора (рис. 21.14). Диаграмма на рисунке построена для случая $\varphi_{\text{пр}} > 0$, т. е. когда приемник имеет индуктивный характер.

Соответственно последним уравнениям трансформатора можем также составить схему, эквивалентную трансформатору, в виде, представленном на рис. 21.15. Величины r_1, $L_{\sigma 1}$, r'_2, $L'_{\sigma 2}$ постоянны, не зависят от тока и составляют линейную

часть схемы. Реактивная проводимость b_0 зависит от напряжения U_0 и является нелинейной величиной. Активная проводимость g_0 является постоянной, если потери в сердечнике пропорциональны U_0^2, т. е. пропорциональны B_m^2. Если же потери на гистерезис изменяются непропорционально квадрату амплитуды индукции, то величина g_0 в некоторой мере зависит от U_0 и также является нелинейной.

В мощных трансформаторах при номинальной нагрузке ток I_0 составляет лишь несколько процентов от тока I_1, что является результатом сравнительно малого магнитного сопротивления сердечника вследствие высокой магнитной проницаемости стали. При номинальном напряжении и номинальной нагрузке падения напряжения в обмотках $I_1\sqrt{r_1^2+\omega^2L_{\sigma1}^2}$ и $\dot{I}_2'\sqrt{r_2'^2+\omega^2L_{\sigma2}'^2}$ обычно составляют в трансформаторах несколько процентов от напряжения U_1. Поэтому отношение U_1 к U_2 близко к коэффициенту трансформации n.

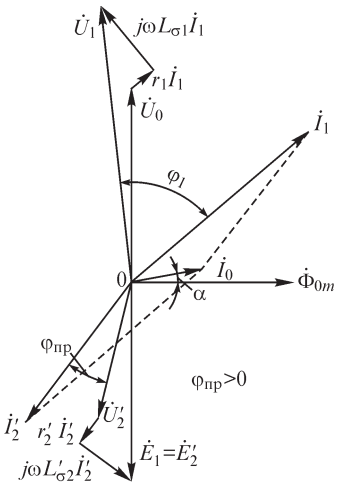


Рис. 21.14

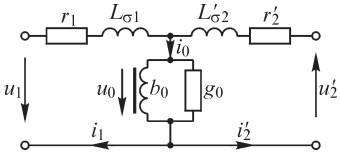


Рис. 21.15

Трансформатор с ферромагнитным сердечником представляет собой нелинейный четырехполюсник. Поэтому, определяя его параметры из опытов холостого хода и короткого замыкания, необходимо в опыте холостого хода вследствие зависимости b_0 от U_0 брать напряжение U_1 равным напряжению U_0 при нормальной нагрузке. Падение напряжения на участке r_1, $L_{\sigma1}$ при токе холостого хода весьма мало. Из опыта холостого хода определяются параметры b_0 и g_0. Опыт короткого замыкания обычно проводят при номинальном токе. Так как при этом напряжение U_1, а следовательно, и U_0 много меньше их значений в номинальном режиме, то ток $I_0 \ll I_1$ и им можно пренебречь. Поэтому из опыта короткого замыкания определяются параметры $r_1 + r_2'$ и $L_{\sigma1} + L_{\sigma2}'$. Величины r_1 и r_2', так же как величины $L_{\sigma1}$ и $L_{\sigma2}'$, обычно одного порядка. Учитывая отмеченные выше соотношения между токами I_1 и I_0, а также между падениями напряжения в обмотках и U_1, не сделаем большой ошибки, полагая в эквивалентной схеме $r_2' = r_1$ и $L_{\sigma2}' = L_{\sigma1}$.

21.10. Графический метод расчета, основанный на введении эквивалентных синусоид

В предыдущих параграфах было показано, что введение метода эквивалентных синусоид позволяет при анализе процессов в таких важных нелинейных элементах электрической цепи, как, например, катушки с ферромагнитными сердечниками, воспользоваться комплексным методом и векторными диаграммами. Более сложными являются процессы в цепи, в которой имеет место сочетание катушек и трансформаторов с ферромагнитными сердечниками с другими эле-

ментами цепи, например с конденсаторами, участками с активными сопротивлениями и т. д. Приближенное рассмотрение этих процессов и в таком случае оказывается возможным, если заменить несинусоидальные токи и напряжения эквивалентными синусоидами. Это позволяет при любом соединении реактивных элементов получать графически результирующую нелинейную характеристику путем алгебраического суммирования ординат или абсцисс характеристик отдельных элементов. При наличии активных и реактивных сопротивлений, пользуясь графическим построением результирующих характеристик, необходимо учитывать, что эквивалентные синусоиды напряжений на этих сопротивлениях сдвинуты на угол $\pm\pi/2$.

Несмотря на приближенность этого метода, как сейчас увидим, он дает возможность выявить главные особенности процессов в нелинейных цепях. Примеры использования такого графического метода исследования процессов в нелинейных цепях будут рассмотрены в следующих четырех параграфах.

21.11. Явление феррорезонанса при последовательном соединении катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора

В электрических цепях, содержащих катушки с ферромагнитными сердечниками и конденсаторы, наблюдаются особые явления, связанные с нелинейными свойствами этих цепей.

Впервые исследование таких цепей было выполнено П. Л. Калантаровым, который также предложил метод графического расчета этих цепей.

В настоящем и последующих параграфах рассматриваются явления в таких цепях на простейших примерах последовательного и параллельного соединений катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора.

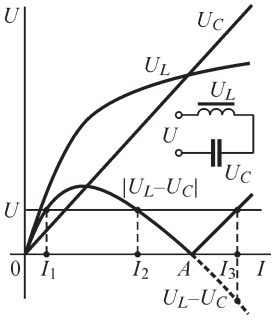


Рис. 21.16

Пусть дана цепь, состоящая из последовательно соединенных реактивной катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора емкостью C (рис. 21.16). Предположим, что в цепи отсутствуют потери, и заменим несинусоидальные кривые напряжений и тока эквивалентными синусоидами, выбрав их равными первым гармоникам действительных кривых, иными словами, пренебрежем наличием высших гармоник. При указанных условиях напряжение U_L на зажимах катушки и напряжение U_C на зажимах конденсатора по фазе прямо противоположны друг другу; напряжение U на зажимах цепи равно абсолютному значению их разности $U = |U_L - U_C|$, причем возможен как случай преобладания U_L над U_C, так и случай преобладания U_C над U_L.

Представляя напряжения U_L и U_C в виде функций тока I, причем $U_L = F(I)$ изобразится характеристикой катушки, а $U_C = I/(\omega C)$ изобразится прямой, проходящей через начало координат, получим

$$U = |U_L - U_C| = \left| F(I) - \frac{I}{\omega C} \right| = \varphi(I).$$

Зависимость $U = |U_L - U_C| = \varphi(I)$ является *нелинейной характеристикой всей цепи*.

График разности $U_L - U_C$ найдем, вычитая из ординат кривой $U_L = F(I)$ соответствующие ординаты прямой $U_C = I/(\omega C)$ (рис. 21.16). Ток при заданном значении напряжения U определим, находя точки пересечения кривой $|U_L - U_C|$ с прямой, проходящей параллельно оси абсцисс на расстоянии U от нее. Как видно из рис. 21.16, таких точек может быть три, откуда следует, что при одном и том же напряжении на зажимах цепи в ней могут, вообще говоря, устанавливаться три различных режима тока. Такая неопределенность, совершенно не свойственная цепям с постоянными параметрами, не может иметь места и в рассматриваемой цепи, если характеристика катушки не пересекается с характеристикой конденсатора. Но и при пересечении характеристик неопределенность имеет место лишь в ограниченной области напряжений. А именно: если приложенное напряжение U меньше того значения, при котором прямая U касается кривой $|U_L - U_C|$, то имеем три точки пересечения кривой $|U_L - U_C|$ с прямой U, причем две первые точки, считая от начала координат, соответствуют преобладанию в цепи реакции самоиндукции, а третья — преобладанию реакции емкости. Если приложенное напряжение превосходит указанный предел, то кривая $|U_L - U_C|$ пересекается с прямой U только в одной точке и, следовательно, в цепи возможен лишь один вполне определенный режим тока. Особая точка A характеристики $U = \varphi(I)$, лежащая на оси абсцисс, является точкой резонанса, так как в этой точке напряжения U_L и U_C взаимно компенсируются. Отсюда следует, что, в отличие от цепей с постоянными параметрами, резонанса в рассматриваемой цепи можно достичь изменением значения приложенного напряжения. Это объясняется тем, что индуктивность катушки с ферромагнитным сердечником зависит от значения тока и, следовательно, изменяется при изменении напряжения на зажимах всей цепи. Это явление называют явлением феррорезонанса. В данном случае имеем дело с *феррорезонансом в последовательной цепи*.

Вследствие наличия в цепи потерь и высших гармоник, которыми мы пренебрегли, фактическая характеристика цепи приобретает вид, приведенный на рис. 21.17 (сплошная линия). Вид этой кривой показывает, что, постепенно повышая напряжение, дойдем до точки *a* характеристики, а далее произойдет скачок из точки *a* в точку *b*, сопровождающийся резким увеличением тока. При дальнейшем повышении напряжения увеличение тока происходит плавно. При понижении напряжения ток плавно уменьшается до достижения точки *c* характеристики, в которой происходит скачок в точку *d*, сопровождающийся резким уменьшением тока. Эти скачки сопровождаются изменением знака угла сдвига в цепи.

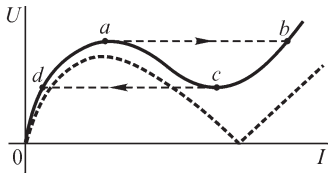


Рис. 21.17

При постоянстве напряжения U на зажимах цепи падающая часть *ac* характеристики является областью неустойчивых режимов. Действительно, пусть при $U = \text{const}$ режиму работы цепи отвечает некоторая точка на падающей части характеристики. Тогда всякое случайное увеличение тока приведет к уменьшению падения напряжения в цепи и, следовательно, к дальнейшему возрастанию тока.

Наоборот, всякое случайное уменьшение тока приведет к увеличению падения напряжения в цепи и, следовательно, к дальнейшему уменьшению тока. В обоих случаях ток будет изменяться до тех пор, пока не достигнет значения, определяемого соответствующей точкой пересечения прямой U = const с одной из поднимающихся частей характеристики. В любой из этих точек режим будет устойчив, так как случайное увеличение тока приведет к увеличению падения напряжения и ток должен будет уменьшиться, а случайное уменьшение тока приведет к уменьшению падения напряжения и ток должен будет увеличиться. Включив последовательно с цепью достаточно большое дополнительное линейное сопротивление, можно получить устойчивую работу цепи и на падающем участке ее характеристики.

Покажем, каким образом при построении характеристики цепи, состоящей из последовательно соединенных катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора, можно учесть активное сопротивление r этой цепи. Обозначим приложенное к цепи напряжение через U, а его активную составляющую и абсолютное значение реактивной составляющей через $U_а = Ir$ и $|U_р| = |U_L - U_C|$.

Характер зависимости $|U_р|$ от I, представляющей собой характеристику цепи при пренебрежении ее активным сопротивлением и высшими гармониками, мы установили выше. Будем считать эту зависимость известной. Для дальнейших операций удобнее применять зависимость $|U_р|$ не непосредственно от тока, а от пропорциональной току величины $U_а = Ir$, причем масштабы по обеим осям координат должны быть одинаковы, т. е. зависимость $|U_р| = F(U_а)$.

Пользуясь эквивалентными синусоидами, мы должны считать, что падения напряжения $U_а$ и $U_р$ сдвинуты друг относительно друга на угол $\pm\pi/2$. Соответственно, имеем

$$U_а^2 + U_р^2 = U^2.$$

Уравнение $|U_р| = F(U_а)$ показывает, что $|U_р|$ и $U_а$ связаны зависимостью, изображаемой характеристикой цепи для случая $r = 0$. Уравнение $U_а^2 + U_р^2 = U^2$ показывает, что, кроме того, между $|U_р|$ и $U_а$ существует связь, определяемая окружностью с центром в начале координат и с радиусом, равным напряжению U на зажимах цепи. Оба эти условия для $|U_р|$ и $U_а$ выполняются в точках пересечения окружности радиуса U с кривой $|U_р| = F(U_а)$, причем число таких точек равно числу режимов тока, возможных в цепи при данном значении U (рис. 21.18). Проведем из точки пересечения окружности радиуса U с осью ординат прямую, параллельную оси абсцисс, и снесем на нее значения $U_а$, соответствующие данному значению U. Проделав эту операцию для ряда окружностей, отвечающих различным значениям U, и соединив найденные точки плавной кривой, построим зависимость $U = F_1(U_а)$, которая в то же время из-за прямой пропорциональности между $U_а$ и I даст зависимость между U и I, т. е. искомую характеристику цепи с учетом ее активного сопротивления.

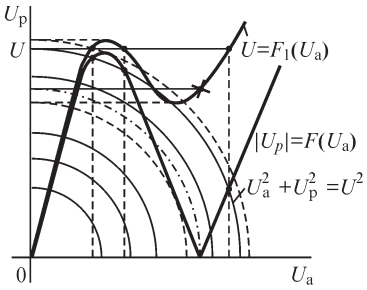


Рис. 21.18

На рис. 21.18 показана найденная таким методом характеристика цепи, причем штриховыми линиями нанесены окружности радиуса U, касающиеся кривой $|U_р| = F(U_а)$ и ограничивающие область напряжений, в которой одному значению напряжения могут отвечать три различных режима тока. Окружность радиуса U, отвечающая резонансу, выделена особо, а точка резонанса отмечена на характеристике крестом.

21.12. Явление феррорезонанса при параллельном соединении катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора

Рассматривая параллельное соединение катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора (рис. 21.19), пренебрежем, как и в предыдущем случае, потерями в цепи и наличием высших гармоник. Тогда ток I_L в реактивной катушке и ток I_C в конденсаторе по фазе будут противоположны друг другу, а ток I в неразветвленной части цепи будет равен абсолютному значению их разности $I = |I_L - I_C|$, причем возможен как случай преобладания I_L над I_C, так и случай преобладания I_C над I_L.

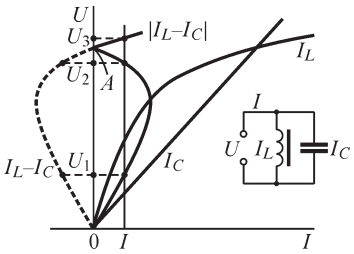


Рис. 21.19

Представляя токи I_L и I_C как функции напряжения на зажимах цепи, причем $I_L = F(U)$ изобразится характеристикой реактивной катушки, а $I_C = \omega CU$ — прямой, проходящей через начало координат, получим

$$I = |I_L - I_C| = |F(U) - \omega CU| = \varphi(U),$$

что и является *нелинейной характеристикой всей цепи*.

График разности $I_L - I_C = F(U) - \omega CU$ найдем, вычитая из абсцисс кривой $I_L = F(U)$ соответствующие абсциссы прямой $I_C = \omega CU$ (рис. 21.19). Напряжение, при котором ток во внешней цепи равен заданному значению I, определим, находя точки пересечения кривой $|I_L - I_C|$ с прямой, проходящей параллельно оси ординат на расстоянии I от нее. Как видно из рис. 21.19, таких точек может быть три, откуда следует, что один и тот же ток в цепи может, вообще говоря, установиться при трех различных значениях напряжения на ее зажимах. Эта особенность рассматриваемой цепи исчезнет, если характеристика катушки не пересекается с характеристикой конденсатора. Но и при пересечении характеристик многозначность зависимости напряжения от тока имеет место лишь в ограниченной области значений тока. А именно: если ток I в неразветвленной части цепи меньше того значения, при котором прямая I касается кривой $|I_L - I_C|$, то имеем три точки пересечения кривой $|I_L - I_C|$ с прямой I, причем две первые точки, считая от начала координат, соответствуют преобладанию в цепи реакции емкости, а третья — преобладанию реакции самоиндукции. Если ток I превосходит указанный предел, то кривая $|I_L - I_C|$ пересекается с прямой I только в одной точке и, следовательно, этот ток может существовать в цепи лишь при одном вполне определенном значении напряжения на зажимах цепи.

Особая точка A характеристики $I = \varphi(U)$, лежащая на оси ординат, является точкой резонанса, так как в этой точке токи I_L и I_C взаимно компенсируются. От-

сюда следует, что при параллельном соединении конденсатора и катушки с ферромагнитным сердечником, в отличие от цепей с постоянными параметрами, резонанса можно достичь изменением значения приложенного напряжения.

Это явление также относится к феррорезонансу, причем в рассматриваемом случае имеем дело с *феррорезонансом в параллельной цепи*.

Вследствие наличия в цепи потерь и высших гармоник, которыми мы пренебрегли, фактическая характеристика цепи приобретает вид, показанный на рис. 21.20 сплошной линией. Из вида этой кривой следует, что при постепенном увеличении тока в цепи, а также и при уменьшении его будут происходить скачки, аналогичные скачкам при последовательном соединении и также сопровождающиеся изменением знака угла сдвига в цепи. Однако для получения этих скачков на практике необходимо иметь устройство, в котором регулируется ток, а не напряжение. Практически это можно осуществить, если цепь, изображенную на рис. 21.19, подключить не непосредственно к источнику изменяющегося напряжения, а через большое линейное сопротивление r, значительно превосходящее сопротивление контура из параллельно соединенных катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора. В таком случае ток I будет определяться сопротивлением r, и при его изменении будут происходить скачки напряжения на зажимах этого контура. Если же контур из параллельно соединенных катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора присоединен непосредственно к источнику напряжения с малым внутренним сопротивлением, то при изменении U на практике может быть получена вся кривая (рис. 21.20) без скачков.

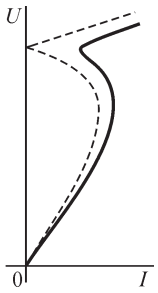


Рис. 21.20

Применяя рассмотренные способы построения характеристик для последовательного и параллельного соединений катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора, можно построить характеристики более сложных нелинейных цепей, представляющих собой смешанное соединение реактивных элементов.

21.13. Ферромагнитные стабилизаторы напряжения

Особенности цепей, содержащих катушки с ферромагнитными сердечниками и конденсаторы, используют для создания *ферромагнитных стабилизаторов напряжения*, служащих для поддержания постоянства напряжения на зажимах приемника при изменении напряжения питающей сети. Основная часть всех стабилизаторов состоит из двух последовательно соединенных сопротивлений — линейного и нелинейного.

Применим графический метод, изложенный в § 21.10, так же как мы делали это при рассмотрении явления феррорезонанса, для получения характеристик ферромагнитных стабилизаторов напряжения.

Рассмотрим простейший стабилизатор (рис. 21.21), состоящий из последовательно соединенных между собой конденсатора C и катушки L с ферромагнитным сердечником, при холостом ходе. Напряжение U_1 сети подводят к зажимам этой цепи, а зажимы катушки являются выходными зажимами стабилизатора, и, следовательно, выходное напряжение стабилизатора U_2 равно напряжению U_L на зажимах катушки.

Зная емкость C конденсатора и характеристику $U_L = F_2(I)$ катушки, можно построить (рис. 21.22) зависимость $U_1 = |U_L - U_C| = F_1(I)$, где U_C — напряжение на зажимах конденсатора. Предположим, что напряжение сети изменилось от U_1' до U_1''. Тогда, пользуясь кривыми $U_1 = F_1(I)$ и $U_2 = U_L = F_2(I)$, можно найти соответствующие значения выходного напряжения U_2' и U_2''. При этом значениям U_1' и U_2' отвечает ток I', а значениям U_1'' и U_2'' — ток I'' в цепи стабилизатора. Из рис. 21.22 видно, что значительное изменение напряжения $\Delta U_1 = U_1' - U_1''$ сети влечет за собой сравнительно малое изменение выходного напряжения $\Delta U_2 = U_2' - U_2''$.

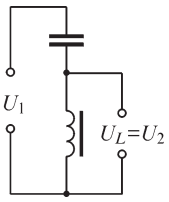


Рис. 21.21

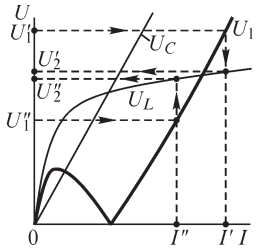


Рис. 21.22

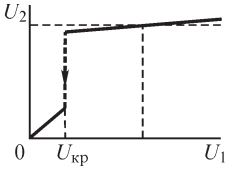


Рис. 21.23

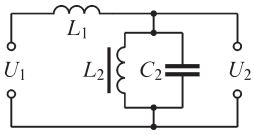


Рис. 21.24

Определив для ряда значений U_1 соответствующие значения U_2, можно построить зависимость $U_2 = F(U_1)$, из которой видно (рис. 21.23), что рассматриваемая схема может стабилизировать напряжение только при напряжениях сети, превышающих критическое напряжение $U_{кр}$. Из рис. 21.23 ясно, что стабилизатор будет тем лучше, чем более пологой является конечная часть характеристики катушки.

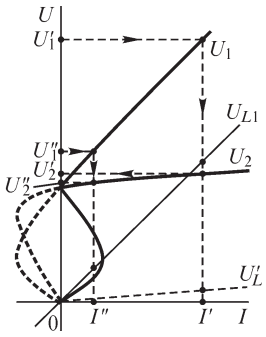


Рис. 21.25

Описанный стабилизатор не находит практического применения вследствие неудовлетворительных рабочих характеристик.

На практике часто применяют стабилизатор, основная часть схемы которого дана на рис. 21.24. В этой схеме линейным сопротивлением является катушка L_1 с ненасыщенным ферромагнитным сердечником, а нелинейным — цепь, состоящая из параллельно соединенных конденсатора C_2 и катушки L_2 с насыщенным ферромагнитным сердечником. Соответствующие характеристики $U_{L1} = F(I)$ катушки L_1, $U_2 = F_2(I)$ разветвленной части схемы и $U_1 = F_1(I)$ всей схемы приведены на рис. 21.25.

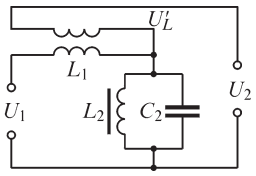


Рис. 21.26

Дальнейшего улучшения этой схемы можно достичь, вычитая из напряжения на контуре L_2, C_2 напряжение U_L', являющееся частью напряжения U_{L1} на зажимах катушки L_1. Это можно выполнить, наложив на сердечник катушки L_1 дополнительную обмотку с соответствующим числом витков и включив ее так как показано на рис. 21.26. Таким путем можно получить почти полную стабилизацию напряжения. Заметим, что присоединение нагрузки к стабилизатору ухудшает его характеристику, делая ее менее пологой. Следует иметь

в виду, что номинальная мощность элементов стабилизатора значительно превосходит допустимую мощность нагрузки. К недостаткам обычных ферромагнитных стабилизаторов относится также зависимость выходного напряжения от частоты. Уменьшение этой зависимости возможно путем дополнительного усложнения схемы стабилизатора.

21.14. Управляемые индуктивные элементы нелинейной цепи. Ферромагнитный усилитель мощности

Как уже было отмечено в конце § 19.13, наложив на сердечник катушки с ферромагнитным сердечником дополнительную обмотку, можно, изменяя ток в этой обмотке, влиять на вид характеристики катушки со стороны основной обмотки. Таким образом, получаем возможность управлять процессом в цепи основной обмотки путем изменения управляющего тока в дополнительной обмотке.

Такие *управляемые индуктивные элементы* могут быть использованы в цепях переменного тока, например для регулирования напряжения в линиях электропередачи или в качестве переменной индуктивной нагрузки в установках для испытания электрических машин и т. д. Весьма широкое распространение получили так называемые *ферромагнитные усилители мощности*, в которых используются нелинейные управляемые ферромагнитные элементы.

На рис. 21.27 приведена принципиальная схема ферромагнитного усилителя мощности. Усилитель состоит из двух одинаковых ферромагнитных сердечников, на каждом из которых наложены по две обмотки с числом витков w и w_0. Обмотки с числом витков w включены последовательно с приемником, имеющим сопротивление r. Эта цепь питается от источника переменного напряжения U частоты f. Обмотки с числом витков w_0 составляют управляющую цепь. Пусть в управляющей цепи протекает некоторый постоянный ток i_0. Чем больше значение i_0, тем сильнее подмагничивание этим током сердечника катушек, тем меньше индуктивное сопротивление катушек переменному току со стороны обмоток w и, соответственно, тем меньше напряжение U_L на катушках при заданном токе I. На рис. 21.28 приведено семейство характеристик $U_L = f(Ir)$ при разных значениях подмагничивающего тока i_0. Для удобства дальнейших рассуждений по оси абсцисс вместо тока I отложено пропорциональное ему при $r = \text{const}$ падение напряжения на приемнике.

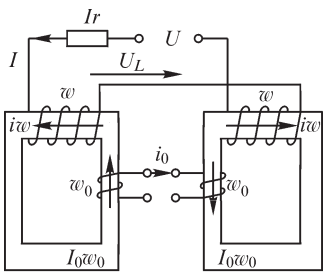


Рис. 21.27

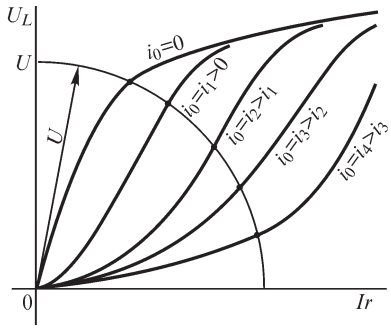


Рис. 21.28

Вводя в рассмотрение эквивалентные синусоиды и пренебрегая потерями в сердечниках и обмотках катушек, мы должны считать, что напряжения Ir и U_L сдвинуты по фазе на угол $\pi/2$. В таком случае можем написать

$$U_L^2 + (Ir)^2 = U^2.$$

При U = const это уравнение определяет окружность радиуса U с центром в начале координат (рис. 21.28). Точки пересечения окружности с характеристиками, построенными при различных значениях i_0, дают возможность найти зависимость I от i_0. Если ток i_0 в управляющей обмотке будет изменяться с частотой, значительно меньшей, чем частота f, то это вызовет соответствующее изменение действующего тока I в приемнике.

При условии $i_0^2 r_0 \ll I^2 r$ получаем возможность управления значительной мощностью в приемнике при незначительной мощности в управляющей цепи, т. е. получаем *усилитель мощности*. В усилителе на рис. 21.27 взяты два одинаковых сердечника и обмотки навиты в таком направлении, чтобы в цепи приемника взаимно компенсировались четные гармоники, появляющиеся в результате подмагничивания сердечников током i_0. При этом также компенсируются в управляющих обмотках ЭДС частоты f, вызываемые током I.

21.15. Метод гармонического баланса для расчета периодических процессов в нелинейных цепях

При расчете периодических процессов в нелинейных цепях можно пользоваться следующим способом отыскания неизвестных величин. Имея в виду, что в общем случае токи и напряжения в нелинейной цепи несинусоидальны, представим ожидаемое решение в виде суммы основной и ряда высших гармоник, у которых неизвестными являются амплитуды и начальные фазы. Подставляя эту сумму в нелинейное дифференциальное уравнение, написанное для данной искомой величины, представим все члены, входящие в дифференциальное уравнение, в виде сумм гармоник. Суммируем справа и слева от знака равенства все коэффициенты при членах, содержащих $\sin k\omega t$, и приравниваем эти суммы друг к другу. Проделываем ту же операцию с коэффициентами при $\cos k\omega t$. Повторяя эти операции для всех значений k, получаем систему из $2k$ алгебраических уравнений. Эту систему используем для определения неизвестных амплитуд и начальных фаз каждой гармоники. Такой метод называют м е т о д о м г а р м о н и ч е с к о г о б а л а н с а. Точное решение нелинейной задачи этим методом в общем случае требует учета бесконечного множества гармоник, что практически невозможно осуществить. Поэтому при решении конкретных задач число гармоник в ожидаемом решении берется ограниченным, в большинстве случаев не превышающим двух-трех. В результате такого ограничения точный баланс гармоник в уравнении нарушается и решение становится приближенным.

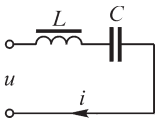


Рис. 21.29

В качестве примера рассмотрим путь отыскания периодического решения методом гармонического баланса для цепи, представленной на рис. 21.29, в случае, когда к зажимам цепи приложено синусоидальное напряжение $u = U_m \sin \omega t$. Пусть нели-

нейная характеристика катушки может быть представлена аналитически приближенно в виде $i = a\Psi^3$. Ищем решение для потокосцепления в виде суммы

$$\Psi = \Psi_{1m}\sin(\omega t + \theta_1) + \Psi_{3m}\sin(3\omega t + \theta_3),$$

т. е. ограничиваемся первой и третьей гармониками. Неизвестны четыре величины: Ψ_{1m}, θ_1, Ψ_{3m} и θ_3. Дифференциальное уравнение цепи имеет вид

$$u = \frac{d\Psi}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + u_C(0) \quad \text{или} \quad \frac{du}{dt} = \frac{d^2\Psi}{dt^2} + \frac{i}{C}.$$

Подставляя значения u, Ψ и i, получим

$$\omega U_m \cos\omega t = -\omega^2\Psi_{1m}\sin(\omega t + \theta_1) - 9\omega^2\Psi_{3m}\sin(3\omega t + \theta_3) + \frac{a\Psi^3}{C} =$$

$$= -\omega^2\Psi_{1m}\sin(\omega t + \theta_1) - 9\omega^2\Psi_{3m}\sin(3\omega t + \theta_3) +$$

$$+ \frac{a}{C}[\Psi_{1m}^3\sin^3(\omega t + \theta_1) + 3\Psi_{1m}^2\Psi_{3m}\sin^2(\omega t + \theta_1)\sin(3\omega t + \theta_3) +$$

$$+ 3\Psi_{1m}\Psi_{3m}^2\sin(\omega t + \theta_1)\sin^2(3\omega t + \theta_3) + \Psi_{3m}^3\sin^3(3\omega t + \theta_3)]. \qquad (*)$$

Представим все члены в данном уравнении в виде $A_k \sin k\omega t$ и $B_k \cos k\omega t$, после чего сгруппируем коэффициенты у гармоник одинакового порядка справа и слева от знака равенства. Не выписывая всех промежуточных преобразований, соответствующих этим операциям, получим нижеследующие четыре уравнения, связывающие искомые величины Ψ_{1m}, θ_1, Ψ_{3m} и θ_3. Первое уравнение получается от приравнивания коэффициентов при $\cos\omega t$, второе — при $\sin\omega t$, третье — при $\cos 3\omega t$ и четвертое — при $\sin 3\omega t$. Имеем

$$\omega U_m = \left(-\omega^2\Psi_{1m} + \frac{3a}{4C}\Psi_{1m}^3 + \frac{3a}{2C}\Psi_{1m}\Psi_{3m}^2\right)\sin\theta_1 - \frac{3a}{4C}\Psi_{1m}^2\Psi_{3m}\sin(\theta_3 - 2\theta_1); \quad (1)$$

$$0 = \left(-\omega^2\Psi_{1m} + \frac{3a}{4C}\Psi_{1m}^3 + \frac{3a}{2C}\Psi_{1m}\Psi_{3m}^2\right)\cos\theta_1 - \frac{3a}{4C}\Psi_{1m}^2\Psi_{3m}\cos(\theta_3 - 2\theta_1); \quad (2)$$

$$0 = \left(-9\omega^2\Psi_{3m} + \frac{3a}{2C}\Psi_{1m}^2\Psi_{3m} + \frac{3a}{4C}\Psi_{3m}^3\right)\sin\theta_3 - \frac{a}{4C}\Psi_{1m}^3\sin 3\theta_1; \quad (3)$$

$$0 = \left(-9\omega^2\Psi_{3m} + \frac{3a}{2C}\Psi_{1m}^2\Psi_{3m} + \frac{3a}{4C}\Psi_{3m}^3\right)\cos\theta_3 - \frac{a}{4C}\Psi_{1m}^3\cos 3\theta_1. \quad (4)$$

Решая совместно эти уравнения, можно найти все четыре интересующие нас величины. В данном частном случае ввиду того, что в цепи отсутствуют потери, следует ожидать, что углы θ_1 и θ_3 равны $\pm\pi/2$, так как при этом начальные фазы ЭДС всех гармонических составляющих равны нулю или π, что соответствует нулевой начальной фазе приложенного напряжения. Действительно, уравнения (2) и (4) удовлетворяются при $\theta_1 = \pm\pi/2$ и $\theta_3 = \pm\pi/2$. Синусы углов в уравнениях (1) и (3) равны при этом ± 1, и из этих уравнений определяются Ψ_{1m} и Ψ_{3m}.

Заметим, что полученные уравнения являются приближенными, так как мы пренебрегли пятыми, седьмыми и девятыми гармониками, содержащимися в члене

$i/C = a\Psi^3/C$ в уравнении цепи, что легко усмотреть из выражения для этого члена в квадратных скобках в уравнении (*). Например, член $\Psi_{3m}^3 \sin^3(3\omega t + \theta_3) = \frac{3}{4}\Psi_{3m}^3 \sin(3\omega t + \theta_3) - \frac{\Psi_{3m}^3}{4}\sin(9\omega t + 3\theta_3)$ содержит девятую гармонику.

Чтобы выяснить некоторые качественные особенности явлений в рассматриваемой нелинейной цепи, предельно упростим решение, пренебрегая также и третьей гармоникой, как мы это делали, пользуясь методом эквивалентных синусоид. Первое и второе уравнения приобретают вид

$$\omega U_m = \left(-\omega^2 \Psi_{1m} + \frac{3a}{4C}\Psi_{1m}^3\right)\sin\theta_1; \qquad (1)$$

$$0 = \left(-\omega^2 \Psi_{1m} + \frac{3a}{4C}\Psi_{1m}^3\right)\cos\theta_1. \qquad (2)$$

Уравнения (3) и (4) отпадают, так как они были составлены, исходя из баланса для третьей гармоники. Из уравнения (2) имеем $\theta_1 = \pm\pi/2$; следовательно, $\sin\theta_1 = \pm 1$, и из первого уравнения определяется Ψ_{1m}:

$$\omega U_m = \pm\left(-\omega^2 \Psi_{1m} + \frac{3a}{4C}\Psi_{1m}^3\right).$$

Так как $i = a\Psi^3 = a\Psi_{1m}^3 \sin^3 \omega t = \frac{3}{4} a\Psi_{1m}^3 \sin \omega t - \frac{a}{4}\Psi_{3m}^3 \sin 3\omega t \approx \frac{3}{4} a\Psi_{1m}^3 \sin \omega t$, то, следовательно, $I_{1m} = \frac{3}{4} a\Psi_{1m}^3$. Подставляя отсюда значение потока в последнее уравнение, получаем

$$U_m = \mp\left(\omega \sqrt[3]{\frac{4}{3a} I_{1m}} - \frac{I_{1m}}{\omega C}\right) = \mp I_{1m}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$$

где $L = \sqrt[3]{\frac{4}{3aI_{1m}^2}}$ является нелинейной индуктивностью катушки.

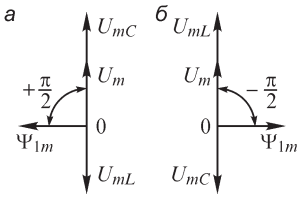


Рис. 21.30

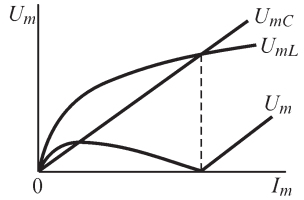


Рис. 21.31

Так как $U_m > 0$ как амплитуда, то знак «минус» относится к случаю $\frac{1}{\omega C} > \omega L$ и знак плюс — к случаю $\omega L > \frac{1}{\omega C}$. В самом деле, знак «минус» получается при $\sin\theta_1 = +1$, т. е. при $\theta_1 = +\pi/2$. Векторная диаграмма при этом имеет вид, пред-

ставленный на рис. 21.30, *а*. Из нее видно, что $U_{mC} > U_{mL}$, т. е. $\frac{1}{\omega C} > \omega L$. На рис. 21.30, *б* дан случай $\sin\theta_1 = -1$, $U_{mL} > U_{mC}$, т. е. $\omega L > \frac{1}{\omega C}$.

На основании последнего уравнения на рис. 21.31 построены зависимости величин U_{mL}, U_{mC} и U_m от амплитуды тока I_m. Таким образом, пользуясь методом гармонического баланса, мы нашли характеристики, полученные в § 21.11 при рассмотрении явления феррорезонанса методом эквивалентных синусоид.

21.16. Выделение высших гармоник в нелинейных цепях с целью преобразования частоты

До сих пор, пользуясь методом эквивалентных синусоид, мы, по сути дела, исключали из рассмотрения высшие гармоники в кривых тока и напряжения. Уже в предыдущем параграфе мы видели, что для аналитического определения первых гармоник необходимо принять во внимание наличие высших гармоник, и результат получается тем более точным, чем больший спектр гармоник принят во внимание.

В ряде случаев важным является определение самих высших гармоник. В таких случаях необходимо рассмотрение действительных несинусоидальных кривых тока и напряжения. Такая задача возникает, например, если мы хотим воспользоваться наличием высших гармоник в нелинейных цепях с целью умножения частоты. В § 21.3 было отмечено, что наличие любого нелинейного безынерционного элемента в электрической цепи приводит к тому, что токи и напряжения в цепи оказываются несинусоидальными даже при синусоидальном напряжении, приложенном ко входным зажимам цепи. Выделяя ту или иную гармонику на выходе цепи, получаем, по существу, *умножение частоты*. Для получения достаточно высокого коэффициента полезного действия при таком преобразовании частоты целесообразно воспользоваться нелинейными элементами, в которых потери энергии невелики. Таковыми могут быть, например, нелинейные индуктивные и емкостные элементы. В следующих трех параграфах рассмотрим примеры умножителей, основанных на использовании нелинейных характеристик катушек с ферромагнитными сердечниками. В § 21.21 будет рассмотрена возможность применения с этой целью конденсаторов с нелинейной характеристикой.

Для преобразования частоты широко используются также устройства с управляемыми нелинейными элементами — электронными лампами и полупроводниковыми триодами.

21.17. Умножение частоты с помощью ферромагнитных элементов, основанное на выделении гармоник нулевой последовательности

Как было изложено в § 7.1, т. I, в симметричных многофазных системах гармоники, порядок которых равен или кратен числу фаз m, образуют симметричную систему нулевой последовательности. Остальные гармоники образуют симмет-

ричные системы прямой или обратной последовательности. Возьмем m одинаковых катушек с ферромагнитными сердечниками и соединим их обмотки в звезду без нейтрального провода. При питании этих обмоток от источника синусоидального симметричного m-фазного напряжения прямой последовательности вследствие нелинейности характеристик катушек в кривых тока появятся высшие гармоники. Однако гармоник, порядок которых равен или кратен m, в кривых тока не может быть, так как они, образуя систему нулевой последовательности, могут замыкаться только по нейтральному проводу, который в данном случае отсутствует. В таком случае эти гармоники появляются в кривых магнитного потока сердечников и, соответственно, в кривых фазовых напряжений на обмотках сердечников. Исходное условие отсутствия таких гармоник в линейном напряжении удовлетворяется, так как линейное напряжение равно разности фазовых. Если теперь наложить на все сердечники одинаковые вторичные обмотки, соединить их последовательно, то ЭДС гармоник, порядок которых равен или кратен m, сложатся арифметически, основные же гармоники ЭДС во вторичных обмотках в сумме дадут нуль. Таким образом, на вторичных зажимах частота напряжения будет в m раз превышать частоту напряжения первичной цепи, т. е. получаем умножение частоты в m раз.

Существенно отметить, что m-фазная система преобразуется в однофазную, т. е. происходит уменьшение числа фаз в m раз.

На этой идее основаны утроители и удвоители частоты. На рис. 21.32 схематически изображен утроитель частоты, а на рис. 21.33 — удвоитель частоты.

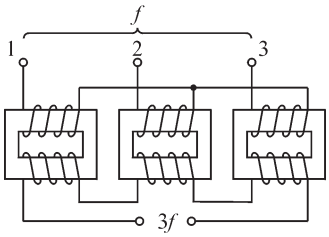


Рис. 21.32

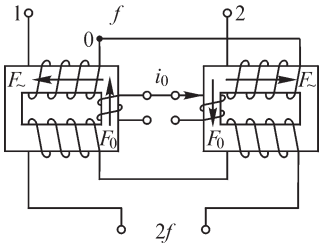


Рис. 21.33

Для утроителя частоты питание первичной цепи осуществляется от источника синусоидального симметричного трехфазного напряжения. На выходных зажимах получаем напряжение утроенной частоты в результате выделения третьей гармоники. В выходном напряжении будут содержаться также все нечетные гармоники, порядок которых кратен трем (9-я, 15-я, 21-я и т. д.). Четных гармоник нет вследствие симметрии кривой намагничивания сердечников.

Для удвоителя частоты питание первичной цепи осуществляется от источника синусоидального однофазного напряжения U_{12}. Два напряжения U_{01} и U_{02} между нейтральной точкой *0* и зажимами *1* и *2* образуют симметричную двухфазную систему со сдвигом фаз π. Согласно вышеизложенному, в соединенных последовательно вторичных обмотках могут быть выделены гармоники порядка $m = 2$ и порядка, кратного двум, т. е. все четные гармоники. Однако при симметрии кривой намагничивания четных гармоник быть не может. Для создания не-

симметрии в кривой намагничивания существует третья обмотка с постоянным подмагничивающим током i_0.

Кроме умножителей частоты, основанных на изложенном выше принципе, могут быть умножители резонансного выделения k-й гармоники. На рис. 21.34 приведена схема такого умножителя. Катушка L с ферромагнитным сердечником питается от источника частоты f. Конденсатор емкостью C_1 и катушка с индуктивностью L_1 служат для настройки всего первичного контура на частоту f. При этом ток в катушке L близок к синусоиде, а напряжение на ней имеет резко выраженный пикообразный характер. Вторичный контур L_2, C_2 настраивается в резонанс на k-ю гармонику несинусоидального напряжения, возникающего на зажимах катушки L. Таким образом, на приемнике с сопротивлением r выделяется частота kf, и, следовательно, получаем умножение частоты в k раз.

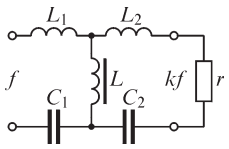


Рис. 21.34

На практике для умножения частоты применяются более сложные схемы, имеющие лучшие рабочие характеристики.

21.18. Расчет процессов в цепи методом сопряжения интервалов при кусочно-линейной аппроксимации характеристик нелинейных элементов

Если заменить реальные характеристики нелинейных элементов кусочно-линейными характеристиками (рис. 21.35), то для расчета процессов в цепи можно воспользоваться следующим методом.

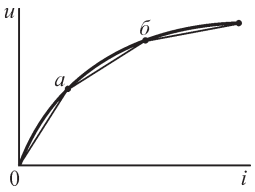


Рис. 21.35

В отдельные интервалы времени, пока во всех элементах цепи процессы соответствуют определенным прямолинейным отрезкам их характеристик, процесс во всей цепи описывается совокупностью линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых определяются параметрами этих линейных отрезков характеристик.

При переходе процесса в любом нелинейном элементе через точку излома характеристики (точки *а* и *б* на рис. 21.35) изменяются параметры уравнений. Назовем момент каждого такого перехода м о м е н т о м к о м м у т а ц и и. Процесс за весь рассматриваемый промежуток времени разбивается на *интервалы*, заключенные между двумя любыми соседними моментами коммутации. Решения совокупности уравнений внутри каждого интервала содержат некоторое число своих произвольных постоянных. Эти произвольные постоянные определяются из физических условий неизменности токов в индуктивных катушках и напряжений на конденсаторах в моменты коммутации, т. е. путем сопряжения решений, полученных для двух смежных интервалов. Соответственно этот метод можно назвать м е т о д о м с о п р я ж е н и я и н т е р в а л о в. Подлежат определению также моменты коммутации из условий, что ток или напряжение достигает значения, соответствующего точке излома характеристики.

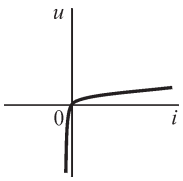
Периодические процессы повторяются через период T, и поэтому достаточно произвести расчет процессов в течение одного периода, используя условия, что значения токов в катушках и напряжений на конденсаторах одинаковы в начале

и в конце периода. В симметричных многофазных цепях процесс может повторяться за промежутки, составляющие целую долю периода. Такой промежуток можно назвать интервалом повторяемости процесса. Очевидно, при этом достаточно произвести расчет в пределах интервала повторяемости.

Метод сопряжения интервалов с успехом может быть применен, когда характеристики нелинейных элементов состоят из отрезков, близких к прямолинейным, например в случае использования элементов с ферритами, обладающими прямоугольной кривой намагничивания. Он широко используется для расчета цепей с ионными и полупроводниковыми вентилями.

21.19. О расчете нелинейных цепей с вентилями. Выпрямление переменного тока

На рис. 21.36 приведены характеристика $u(i)$ полупроводникового вентиля (диода) и кусочно-линейная аппроксимация этой характеристики. На рис. 21.37 изображены характеристика ионного вентиля и ее кусочно-линейная аппроксимация. Если пренебречь падением напряжения в вентиле при прохождении прямого тока и обратным током, то характеристика такого идеального вентиля принимает вид, показанный на рис. 21.38.



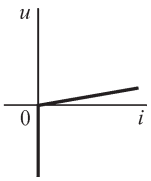
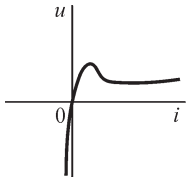


Рис. 21.36



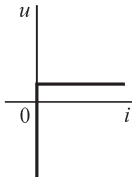


Рис. 21.37

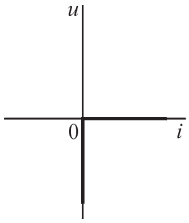


Рис. 21.38

В качестве примера применения метода сопряжения интервалов рассмотрим простую схему выпрямления тока, приведенную на рис. 21.39, полагая, что вентиль обладает идеальной характеристикой (рис. 21.38). Когда вентиль открыт, падение напряжения на нем равно нулю, а когда он закрыт, ток в нем равен нулю. Пусть приложенное напряжение изменяется по закону $u = U_m \sin \omega t$.

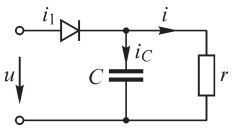


Рис. 21.39

В интервале $t_1 \le t \le t_2$ (рис. 21.40) вентиль открыт и конденсатор C заряжается. В этом интервале имеем уравнения:

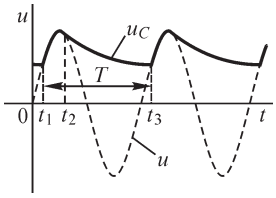


Рис. 21.40

$$u_C = u = U_m \sin \omega t; \quad i = \frac{u}{r} = \frac{U_m}{r} \sin \omega t;$$

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = \omega C U_m \cos \omega t;$$

$$i_1 = i_C + i = \omega C U_m \cos \omega t + \frac{U_m}{r} \sin \omega t.$$

Вентиль гаснет в момент $t = t_2$, когда ток i_1, изменяясь, достигает точки излома характеристики (точка 0

на рис. 21.38), в данном случае когда ток i_1 падает до нуля. Отсюда для определения момента t_2 получаем уравнение

$$0 = \omega C U_m \cos\omega t_2 + \frac{U_m}{r}\sin\omega t_2 \quad \text{или} \quad \omega t_2 = -\mathrm{arctg}(\omega C r).$$

В интервале $t_2 \le t \le t_3$ вентиль не горит и конденсатор разряжается на сопротивление r. Имеем

$$u_C = ir = -i_C r = -rC\frac{du_C}{dt} \quad \text{или} \quad Cr\frac{du_C}{dt} + u_C = 0,$$

откуда $u_C = Ae^{-\frac{t-t_2}{rC}}$, где A — значение u_C в начальный момент $t = t_2$ для этого интервала. Постоянную определим из условия сопряжения процессов в рассмотренных смежных интервалах, а именно в момент t_2, имея в виду, что напряжение на конденсаторе в этот момент не может измениться. Приравнивая значения для u_C в момент $t = t_2$, взятые из выражений для первого и второго интервалов, получаем

$$u_C(t_2) = U_m \sin(\omega t_2) = A.$$

Остается определить момент времени t_1 открытия вентиля. Его находим из условия, что интервалом повторяемости процесса в данном случае является период T приложенного напряжения. Следовательно, напряжение u_C в начале первого интервала в момент t_1 равно напряжению u_C в конце второго интервала в момент $t = t_1 + T$:

$$U_m \sin(\omega t_1) = U_m \sin(\omega t_2) e^{-\frac{t_1+T-t_2}{rC}}$$

или

$$e^{\frac{t_1+T}{rC}} \sin(\omega t_1) = e^{\frac{t_2}{rC}} \sin(\omega t_2).$$

Из этого уравнения и определяется t_1.

Уже этот простой пример показывает, что для нахождения искомых величин необходимо решать трансцендентное уравнение. В более сложных цепях придется решать совокупность таких уравнений, в чем и заключается основная сложность метода. Вместе с тем этот метод открывает возможность с большой точностью находить действительные формы кривых тока и напряжения в тех случаях, когда характеристики нелинейных элементов близки к кусочно-линейным.

Роль конденсатора C в рассмотренной схеме легко усмотреть из рис. 21.40. Чем больше емкость C при заданном r, тем больше постоянная времени $\tau = rC$ разряда конденсатора, тем меньше будут различаться напряжения на приемнике r в моменты времени t_2 и t_3 и, соответственно, будут меньше пульсации выпрямленного напряжения.

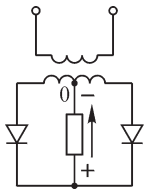


Рис. 21.41

Обычно применяют более сложные схемы выпрямления. Так, на рис. 21.41 и 21.42 приведены схемы двухфазного и трехфазного выпрямителей с нейтральной точкой O во вторичных обмотках трансформатора. Если пренебречь индуктивностью цепи переменного тока, то ток во вторичной цепи проходит в каждый момент времени

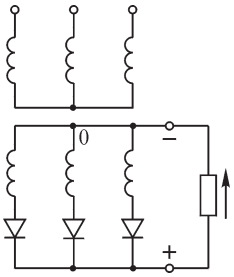


Рис. 21.42

только через один вентиль, присоединенный к обмотке трансформатора, напряжение на зажимах которой в данный момент наибольшее. Если пренебречь также и падением напряжения в вентилях, то напряжение на приемнике будет иметь вид, показанный на рис. 21.43, *а* и *б* жирными линиями. Рис. 21.43, *а* относится к схеме двухфазного выпрямителя (рис. 21.41), а рис. 21.43, *б* — к схеме трехфазного выпрямителя (рис. 21.42). Чем больше число фаз, тем меньше пульсации выпрямленного напряжения. Ток в приемнике все время протекает в одном направлении, указанном на рис. 21.41 и 21.42 стрелкой.

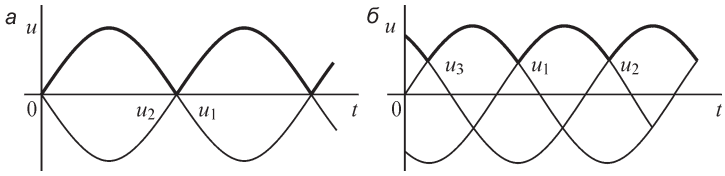


Рис. 21.43

Для выпрямления тока применяют также мостовые схемы. На рис. 21.44, *а* приведена однофазная, а на рис. 21.44, *б* — трехфазная мостовые схемы. Кривая выпрямленного напряжения для первой схемы имеет вид, показанный на рис. 21.43, *а*, а для второй — вид, приведенный на рис. 21.43, *б*.

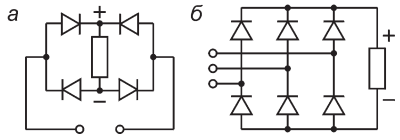


Рис. 21.44

Если в схемах, представленных на рис. 21.41, 21.42 и 21.44, учесть индуктивности цепи, а также если в этих схемах включены конденсаторы, то расчет процессов в них необходимо проводить по изложенному ранее методу сопряжения интервалов. При этом интервал повторяемости в схеме на рис. 21.41 и 21.44, *а* равен $T/2$, в схеме на рис. 21.42 он равен $T/3$ и в схеме на рис. 21.44, *б* — $T/6$.

21.20. Регулирование выпрямителей и преобразование постоянного тока в переменный с помощью управляемых вентилей

С помощью управляемых ионных или полупроводниковых вентилей можно осуществить регулирование процесса выпрямления переменного тока, а также преобразование постоянного тока в переменный, называемое и н в е р т и р о в а н и е м. Устройство для преобразования переменного тока в постоянный называют в ы п р я м и т е л е м, а устройство для обратного преобразования — и н в е р т о р о м.

Рассмотрим процессы, происходящие при таких преобразованиях, на примере наиболее широко используемой для этой цели трехфазной мостовой схемы (рис. 21.45) с управляемыми ионными вентилями. Напряжение от вторичных обмоток трансформатора, образующее трехфазную систему, подается к зажимам *1*, *2*, *3* мостовой схемы.

Так как вентили проводят ток только в одном направлении (на рис. 21.45 — снизу вверх), то ток от зажимов *1*, или *2*, или *3* трансформатора может идти только вверх — через верхние вентили к зажиму *A* через цепь, приключенную к зажимам *A* и *B*, и от зажима *B* возвращаться через нижние вентили к одному из зажимов трансформатора. Поэтому в цепи, приключенной к зажимам *A* и *B*, ток течет всегда в одном направлении, т. е. происходит выпрямление тока

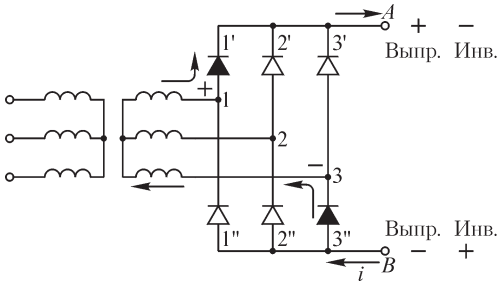


Рис. 21.45

Напряжение же между зажимами *A* и *B* может иметь различные знаки. Если зажим *A* положителен, а зажим *B* отрицателен, что отмечено на рис. 21.45 первой парой знаков, то энергия передается слева направо от преобразователя к приемнику, приключенному к зажимам *A* и *B* (не показанному на рисунке). Это соответствует режиму выпрямления, т. е. преобразованию переменного тока в постоянный.

Если зажим *A* отрицателен, а зажим *B* положителен (вторая пара знаков на рис 21.45), то энергия передается в обратном направлении, т. е. справа налево — от источника энергии, приключенного справа к зажимам *A* и *B* (не показанного на рисунке), к преобразователю. Это соответствует режиму инвертирования.

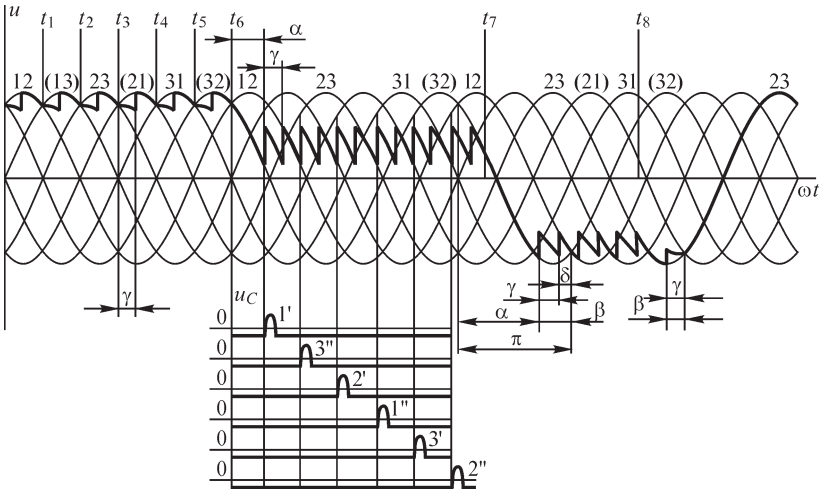


Рис. 21.46

На рис. 21.46 изображены синусоиды линейных напряжений u_{12}, u_{23} и u_{31} между зажимами *1* и *2*, *2* и *3*, *3* и *1* (они помечены парами цифр *12*, *23*, *31*). Эти напряжения положительны, когда потенциал зажима, соответствующий первому индексу, положителен по отношению к потенциалу зажима, соответствующему второму индексу. Здесь же показаны синусоиды линейных напряжений

$u_{21} = -u_{12}$, $u_{32} = -u_{23}$ и $u_{13} = -u_{31}$, т. е. напряжений между теми же зажимами, но взятых с другим знаком.

Если отсутствует сеточное управление, то в каждый момент времени должна гореть пара вентилей (один из верхней группы, другой из нижней группы), приключенных к зажимам трансформатора, напряжение между которыми в данный момент наибольшее. Так, например, в интервале $t_1 < t < t_2$, когда напряжение u_{13} превышает остальные напряжения, должны гореть вентили *1′* из верхней группы и *3″* из нижней группы, что отмечено на рис. 21.45 тем, что эти вентили зачернены. Вслед за моментом t_2 напряжение u_{23} становится больше напряжения u_{13}, и, следовательно, ток должен перейти от вентиля *1′* к вентилю *2′* верхней группы. Вентиль *1′* должен погаснуть, а вентиль *2′* — зажечься. Однако это не происходит мгновенно, так как обмотки трансформатора и обмотки подключенного к его первичным зажимам генератора переменного тока обладают индуктивностью. Поэтому переход тока с одного вентиля на другой будет происходить в течение некоторого промежутка времени γ/ω, соответствующего углу γ (рис. 21.46), называемому углом коммутации. Пока горят два верхних вентиля *1′* и *2′* и один нижний *3″*, напряжение на выходе между точками *A* и *B*, если пренебречь падением напряжения в вентилях, равно среднему значению напряжений u_{13} и u_{23}, т. е. $u_{AB} = (u_{13} + u_{23})/2$. Когда коммутация закончится, т. е. вентиль *1′* погаснет и в верхней группе останется гореть только вентиль *2′*, напряжение u_{AB} станет равным u_{23}. Так будет до момента t_3, когда начнется коммутация тока с вентиля *3″* на вентиль *1″* в нижней группе. Она закончится также через угол γ от момента t_3. Затем в момент t_4 начнется коммутация с вентиля *2′* на вентиль *3′* в верхней группе, в момент t_5 — с вентиля *1″* на вентиль *2″* в нижней группе, и в момент t_6 она должна начаться с вентиля *3′* на вентиль *1′* в верхней группе.

Так процесс продолжался бы, если бы выпрямитель оставался неуправляемым. Жирная линия на рис. 21.46 изображает кривую напряжения u_{AB} на выходе. До момента t_6 она представляет собой кривую выпрямленного напряжения неуправляемого выпрямителя.

Включим в промежутке между t_5 и t_6 сеточное управление, т. е. сообщим сеткам всех вентилей отрицательный потенциал по отношению к катодам, и будем подавать на сетки положительные импульсы напряжения, превышающие отрицательное напряжение на них. Импульсы будем подавать в порядке зажигания вентилей (*1′*, *3″*, *2′*, *1″*, *3′*, *2″*) через интервалы времени, соответствующие фазовому углу $\pi/6$ (нижняя часть рисунка).

При отсутствии управления в момент времени t_6 должна была начаться коммутация тока с вентиля *3′* на вентиль *1′*. Однако если сдвинем все импульсы вправо от этого момента на угол α, то в момент t_6 вентиль *1′* зажечься не сможет, так как напряжение на его сетке отрицательно, и, следовательно, будет продолжать гореть вентиль *3′*. В момент времени $t_6 + \alpha/\omega$ подается положительный импульс на сетку вентиля *1′* и он зажигается, так как его потенциал выше потенциала горящего вентиля *3′* верхней группы. В течение интервала времени γ/ω происходит коммутация тока на вентиль *1′*, после чего горят вентили *1′* и *2″* до

момента подачи положительного импульса на сетку вентиля *3″*, когда начинается коммутация тока в нижней группе с вентиля *2″* на вентиль *3″*, и т. д.

Легко усмотреть, что среднее значение выпрямленного напряжения при этом получается меньше, чем при отсутствии регулирования. Чем больше угол α, тем меньше среднее значение выпрямленного напряжения. Поэтому угол α называют углом регулирования.

Предположим, что в момент времени t_7 положительные импульсы на сетке сдвинуты еще более вправо и угол α стал больше $\pi/2$, так что зажигание следующего вентиля происходит уже при напряжении другого знака. Вследствие этого и напряжение u_{AB} меняет свой знак. Преобразователь переходит в *инверторный режим*. Этот режим возможен, если к зажимам *A* и *B* справа от них присоединен другой источник энергии постоянного тока, например другой преобразователь с такой же схемой, работающий в выпрямительном режиме. Момент подачи положительного импульса при этом принято отсчитывать не от точки пересечения кривых положительных значений напряжений u_{32} и u_{12}, т. е. не с помощью угла α, а от точки пересечения кривых отрицательных значений тех же напряжений, т. е. с помощью угла β. Угол β называют углом опережения зажигания инвертора. Очевидно, $\beta = \pi - \alpha$.

При заданном среднем значении выпрямленного тока чем меньше β, тем больше u_{AB}, что легко усмотреть из рис. 21.46.

Угол $\delta = \beta - \gamma$ называют углом безопасности работы инвертора. Он должен быть больше нуля и больше угла δ_0, достаточного, чтобы к моменту очередного пересечения кривых напряжения успела закончиться деионизация пространства в только что погасшем вентиле.

Пусть в момент t_8 угол β уменьшился настолько, что получилось $\beta - \gamma < \delta_0$. Это значит, что к моменту пересечения кривых напряжений u_{32} и u_{21} погасающий вентиль *3″* или еще не погаснет, или, во всяком случае, в нем не успеет закончиться деионизация после погасания. Так как после момента пересечения этих кривых u_{23} становится больше u_{21}, то ток снова перейдет с вентиля *1′* обратно на вентиль *3″* и пара вентилей *2′* и *3″* будет продолжать гореть, что приведет к изменению знака напряжения на зажимах *A* и *B*.

Так как напряжение источника энергии, приключенного слева от этих зажимов, не изменило своего знака, то произойдет эффект короткого замыкания. Этот аварийный процесс называют опрокидыванием инвертора. Отсюда видно, что чрезвычайно важно поддерживать угол β достаточным, чтобы соблюдалось неравенство $\delta > \delta_0$.

Описанные устройства находят применение в электротехнике. Они имеют особое значение для осуществления мощных электрических передач энергии постоянным током высокого напряжения на большие расстояния, так как ионные вентили могут быть построены на большой ток и большое напряжение. Коэффициент полезного действия таких преобразователей весьма высок, так как падение напряжения в ионных вентилях мало. На рис. 21.47 дана принципиальная схема передачи постоянного тока.

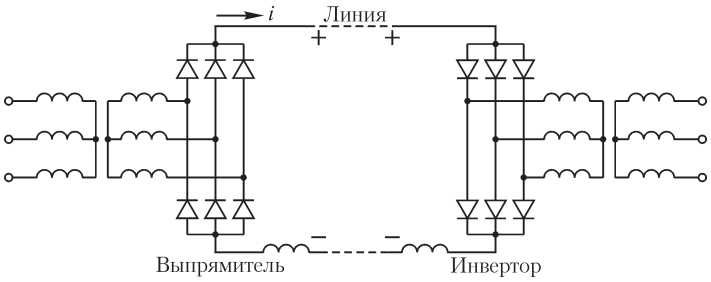


Рис. 21.47

При очень длинных и мощных линиях передача энергии постоянного тока высокого напряжения имеет большие технико-экономические преимущества по сравнению с передачей энергии переменного тока. При передаче энергии постоянного тока не требуется синхронной работы генераторов переменного тока, находящихся на различных концах линии передачи, отсутствуют индуктивное падение в линии и токи смещения между проводами линий, требуется меньше проводов в линии, облегчается изоляция проводов, так как действующее постоянное напряжение не отличается от максимального, как это имеет место при переменном токе, облегчаются опоры для проводов линии, сеточное управление дает возможность легко осуществить регулирование передачи и т. д.

Уже в 1919 г. изобретатель трехфазной системы передачи переменного тока М. О. Доливо-Добровольский указывал, что проблема передачи энергии на большие расстояния должна быть решена с использованием постоянного тока.

В каждом интервале времени горения определенных групп вентилей цепь можно рассматривать как линейную. Для нахождения токов необходимо найти полные интегралы системы линейных уравнений, описывающих процессы в этой цепи. При этом начальные условия в каждом последующем интервале должны соответствовать значениям токов и напряжений в конце предыдущего интервала. Весь этот расчет выполняется методом сопряжения интервалов.

21.21. Конденсаторы с нелинейными характеристиками в цепи переменного тока

Конденсаторы с сегнетоэлектриками, имеющие нелинейную характеристику $q = f(u)$, так же как и реактивные катушки с ферромагнитными сердечниками, могут быть использованы для осуществления цепей переменного тока с особыми свойствами.

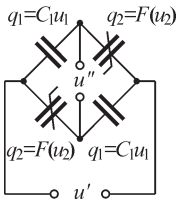


Рис. 21.48

Рассмотрим в виде примера мостовую схему (рис. 21.48), в которой в двух плечах включены одинаковые конденсаторы с постоянной емкостью C_1, т. е. имеющие одинаковые линейные характеристики $q_1 = C_1u_1$, а в двух других плечах включены конденсаторы с одинаковыми нелинейными характеристиками $q_2 = F(u_2)$

Если к одной из диагоналей моста подвести синусоидальное напряжение $u' = U'_{1m}\sin\omega t$, то ток в плечах моста будет содержать

нечетные высшие гармоники, и, соответственно, нечетные высшие гармоники будут содержаться в кривых напряжений u_1 и u_2. Будем иметь

$$u_1 = U'_{1m}\sin(\omega t + \psi'_1) + U_{3m}\sin(3\omega t + \psi_3) + U_{5m}\sin(5\omega t + \psi_5) + \ldots;$$

$$u_2 = U''_{1m}\sin(\omega t + \psi''_1) - U_{3m}\sin(3\omega t + \psi_3) - U_{5m}\sin(5\omega t + \psi_5) - \ldots$$

Все высшие гармоники в кривой u_1 должны быть равны и противоположны соответствующим высшим гармоникам в кривой u_2, так как сумма $u_1 + u_2 = u' = U'_m \sin\omega t$ не содержит высших гармоник.

При изменении амплитуды U'_m приложенного напряжения изменяется ток в конденсаторах, а следовательно, изменяется соотношение между первыми гармониками напряжений u_1 и u_2, так как только один из последовательно включенных конденсаторов обладает нелинейной характеристикой. При этом изменяются также и значения высших гармоник. При надлежащем подборе параметров конденсаторов можно добиться того, чтобы при некотором значении U'_m величины $U'_m\sin(\omega t + \psi'_1)$ и $U''_{1m}\sin(\omega t + \psi''_1)$ были практически равны друг другу. Точное их равенство не удается получить из-за наличия углов ψ'_1 и ψ''_1, которые появляются вследствие потерь в конденсаторе с сегнетоэлектриками. Эти углы можно компенсировать, включив в другие плечи моста последовательно с конденсаторами C_1 сопротивления r_1 (рис. 21.49). Добившись равенства первых гармоник напряжений u_1 и u_2, получаем во второй диагонали моста напряжение u'', содержащее только высшие гармоники:

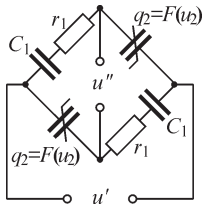


Рис. 21.49

$$u'' = u_1 - u_2 = 2U_{3m}\sin(3\omega t + \psi_3) + 2U_{5m}\sin(5\omega t + \psi_5) + \ldots,$$

причем третья гармоника резко выделяется из всех остальных. Таким образом, рассмотренное простое устройство может служить утроителем частоты.

Можно осуществить схемы для выделения гармоник высокого порядка. Например, с помощью изображенной на рис. 21.50 схемы представляется возможным выделить в контуре L_1C_1 гармоники порядка $k = 21$ с достаточной амплитудой, настраивая контур в резонанс с этой гармоникой. Конденсатор C служит в этой схеме для того, чтобы дать путь высшим гармоникам помимо обмотки трансформатора. Нелинейный конденсатор в опытах, произведенных с такой схемой, имел в качестве диэлектрика титанат бария.

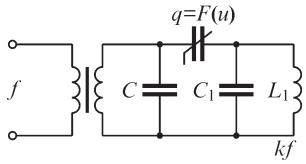


Рис. 21.50

Схема на рис. 21.49 в некотором диапазоне изменения напряжения U' работает как стабилизатор напряжения; действующее напряжение U'' на выходе при этом мало изменяется при значительном изменении напряжения U' на входе.

Можно осуществить усилитель с конденсаторами из сегнетоэлектриков наподобие ферромагнитным усилителям мощности. Если приложить к конденсатору медленно изменяющееся напряжение u_0, то для дополнительного переменного напряжения высокой частоты динамическая емкость и, соответственно, емкостное сопротивление конденсатора будут зависеть от величины u_0. Изменяя u_0 с низкой частотой, можно влиять на процессы в цепи высокой частоты, вызывая в ней значительное изменение мощности при весьма малой затрате энергии в цепи низкой

частоты. Практически величина u_0 складывается из постоянного напряжения U_0 и управляющего напряжения U сравнительно низкой, например звуковой, частоты. Энергия в цепи высокой частоты вырабатывается включенным в эту цепь источником переменного напряжения высокой частоты, например ламповым генератором. На рис. 21.51 приведены три простые схемы включения диэлектрических усилителей с конденсаторами, обладающими нелинейными характеристиками. В качестве диэлектрика в таких конденсаторах могут быть использованы титанат бария, а также некоторые сочетания титанатов стронция и бария и цирконатов бария со свинцом. В зависимости от состава диэлектрика получается различная зависимость диэлектрической проницаемости от температуры. Диэлектрический усилитель обладает рядом достоинств: большой прочностью, высоким коэффициентом усиления, малыми размерами, высоким входным сопротивлением, отсутствием необходимости затрачивать время на разогрев, так как в нем нет нитей накала, имеющихся в ламповых усилителях. К недостаткам его относятся: значительные потери, необходимость для его питания источника высокой частоты и нестабильность коэффициента усиления при изменении температуры, что требует осуществления специальной компенсации.

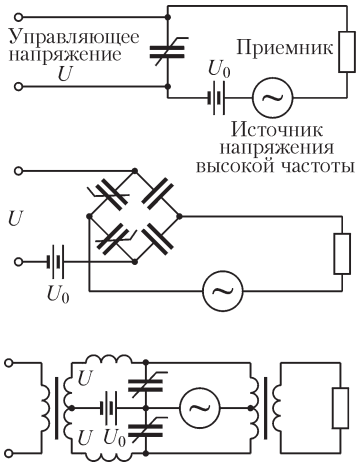


Рис. 21.51

21.22. О коэффициенте мощности при питании нелинейной цепи от источника синусоидального напряжения

В мощных электрических системах напряжение обычно близко к синусоидальному. Если к такой системе приключают приемник с нелинейной характеристикой, то ток, поступающий в приемник, содержит высшие гармоники.

Характерным случаем является питание выпрямительных установок от мощной электрической сети. В этом случае активная мощность определяется только основной гармоникой:

$$P = U_1 I_1 \cos\varphi_1.$$

Вместе с тем имеем $I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots} > I_1$ и $U = U_1$.

Следовательно, выражая P через U и I, получаем

$$P = U_1 I_1 \cos\varphi_1 = UI\frac{I_1}{I}\cos\varphi_1 = UId\cos\varphi_1 = UI\lambda.$$

Таким образом, коэффициент мощности λ меньше $\cos\varphi_1$:

$$\lambda = d\cos\varphi_1 < \cos\varphi_1,$$

так как $d = I_1/I < 1$. Множитель d тем меньше единицы, чем больше содержится гармоник в кривой тока. Его называют иногда к о э ф ф и ц и е н т о м и с к а ж е н и я. Отсюда видно, что с энергетической точки зрения появление высших гармоник в кривой тока нежелательно.

Глава двадцать вторая

Элементы теории колебаний и методы расчета переходных процессов в нелинейных электрических цепях

22.1. Особенности колебательных процессов в нелинейных электрических цепях

Явления колебаний токов и напряжений в электрических цепях рассматривались ранее во многих разделах. К ним относились все периодические процессы как в линейных, так и в нелинейных электрических цепях, а также колебательные переходные процессы в линейных цепях. В линейных цепях при воздействии постоянных ЭДС установившимися могут быть только постоянные токи. При воздействии заданных периодических ЭДС в линейных цепях устанавливаются вполне определенные периодические токи. При переходных процессах в пассивных линейных цепях раз возникшие свободные колебания со временем затухают.

Существенно иной характер могут иметь колебательные процессы в нелинейных электрических цепях. При воздействии постоянных ЭДС в нелинейной цепи установившимися могут быть не только постоянные токи, но и колебательные токи. Последние возникают вследствие возможности неустойчивых состояний в нелинейной цепи, причем амплитуда установившихся колебаний определяется нелинейными свойствами цепи. При воздействии одной и той же периодической ЭДС в нелинейной цепи могут существовать различные колебательные установившиеся процессы, что зависит от исходных состоянии, из которых совершался переход к данному установившемуся процессу.

22.2. Устойчивость режима в цепи с индуктивностью и нелинейным сопротивлением, питаемой от источника постоянного напряжения

Рассмотрим цепь, в которую последовательно включены участок с постоянным сопротивлением r, индуктивная катушка с индуктивностью L и электрическая дуга (рис. 22.1). Пусть цепь находится под действием постоянного напряжения u_0. Электрическая дуга обладает падающей характеристикой $u = F(i)$, изображенной на рис. 22.2. Уравнение цепи имеет вид

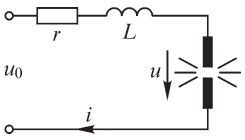


Рис. 22.1

$$u_0 = ri + L\frac{di}{dt} + u.$$

При равновесии в цепи ток не должен изменяться, т. е. должно быть $di/dt = 0$. Условимся обозначать все величины при равновесии с индексом «р». На рис. 22.2 проведена также прямая $u_0 - ri$. Равновесие имеет место при пересечении этой прямой с характеристикой дуги, т. е. в точках A и B. Выясним, какое из этих

состояний равновесия будет устойчивым, а какое — неустойчивым. При равновесии имеем

$$u_0 = ri_р + u_р. \qquad (*)$$

Пусть в некоторый момент времени, который примем за начальный ($t = 0$), по какой-либо причине ток получил малое отклонение η_0 от положения равновесия. В следующие моменты времени это отклонение начнет изменяться, т. е. будет функцией времени. Обозначим его через η. При этом ток будет равен

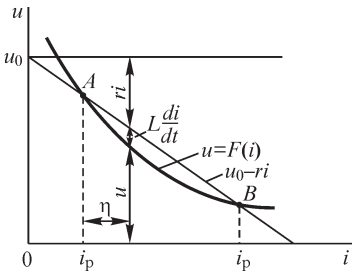


Рис. 22.2

$$i = i_р + \eta.$$

Напряжение u на дуге можно выразить через его значение $u_р$ при равновесии и через η, разлагая $u = F(i_р + \eta)$ в ряд по степеням η. Отбрасывая в первом приближении члены с η во второй и более высоких степенях, получаем

$$u = u_р + \Delta u = u_р + \left(\frac{du}{di}\right)_{i=i_р} \eta = u_р + r_д \eta,$$

где $r_д = \left(\frac{du}{di}\right)_{i=i_р}$ — динамическое сопротивление участка с электрической дугой при $i = i_р$.

Учитывая еще, что $di/dt = d\eta/dt$ и подставляя выражения для i, di/dt и u в основное уравнение цепи, находим

$$u_0 = ri_р + r\eta + L\frac{d\eta}{dt} + u_р + r_д\eta.$$

Вычитая отсюда уравнение равновесия (*), получаем уравнение для приращения тока η:

$$L\frac{d\eta}{dt} + (r + r_д)\eta = 0.$$

Это уравнение оказалось *линейным*, поскольку мы ограничились первым приближением, т. е. ограничились первым членом в разложении Δu по степеням η. Его характеристическое уравнение

$$L\alpha + (r + r_д) = 0$$

имеет единственный корень

$$\alpha = -\frac{r + r_д}{L},$$

и решение для η с учетом начального его значения имеет вид

$$\eta = \eta_0 e^{-\frac{r+r_д}{L}t}.$$

Если $\alpha < 0$, т. е. если $(r + r_д) > 0$, то $\eta \to 0$ при $t \to \infty$, т. е. ток i возвращается к его значению $i_р$ при равновесии.

Наоборот, при $\alpha > 0$, т. е. при $(r + r_д) < 0$, имеем $\eta \to \infty$ при $t \to \infty$, т. е. величина i удаляется от ее значения $i_р$ при равновесии.

Так как вследствие падающей характеристики дуги $r_д = \dfrac{du}{dt} < 0$, то условие $(r + r_д) > 0$ означает, что наклон прямой $u_0 - ri$ больше наклона кривой $u = F(i)$, что имеет место в точке B. Эта точка является точкой *устойчивого* равновесия.

Условие $(r + r_д) < 0$ означает, что наклон прямой $u_0 - ri$ меньше наклона кривой $u = F(i)$, что имеет место в точке A. Эта точка является точкой *неустойчивого* равновесия. Малейшее отклонение от нее ведет либо к переходу в точку B, либо к погасанию дуги.

Таким образом, устойчивое состояние соответствует *отрицательному* корню характеристического уравнения, относящегося к линейному в первом приближении уравнению для отклонения η. Можно сказать также, что устойчивое состояние данной цепи характеризуется тем, что динамическое сопротивление $(r + r_д)$ всей цепи положительно.

22.3. Устойчивость режима в цепи с емкостью и нелинейным сопротивлением, питаемой от источника постоянного напряжения

Рассмотрим теперь цепь, изображенную на рис. 22.3, где участок с нелинейным сопротивлением имеет падающую характеристику типа характеристики, показанной на рис. 22.2. Для нее имеем уравнения

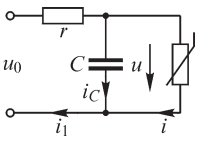


Рис. 22.3

$$u_0 = ri_1 + u; \quad i_1 = i + i_C = i + C\frac{du}{dt}.$$

Следовательно,

$$u_0 = ri + rC\frac{du}{dt} + u. \qquad (**)$$

При равновесии $u = u_р = \text{const}$ и $du/dt = 0$, т. е.

$$u_0 = ri_р + u_р. \qquad (***)$$

Пусть напряжение u получает вследствие какой-либо причины в момент $t = 0$ малое приращение η_0. Дальше это приращение η изменяется во времени. Имеем

$$u = u_р + \eta \quad \text{и} \quad \frac{du}{dt} = \frac{d\eta}{dt}.$$

Ток i есть функция напряжения u, определяемая характеристикой участка с нелинейным сопротивлением, т. е. $i = \psi(u)$. Разлагая $i = \psi(u_р + \eta)$ по степеням η и отбрасывая в первом приближении все члены с η в степени выше первой, получаем

$$i = i_р + \left(\frac{di}{du}\right)_{u=u_р}\eta = i_р + g_д\eta,$$

где $g_д = (di/du)_{u=u_р}$ — динамическая проводимость участка с нелинейным сопротивлением при $u = u_р$.

Подставляя в основное уравнение (**) цепи величины i, du/dt и u и вычитая из него уравнение равновесия (***), получаем в этом первом приближении линейное уравнение для η:

$$rC\frac{d\eta}{dt} + (g_д r + 1)\eta = 0 \quad \text{или} \quad C\frac{d\eta}{dt} + (g_д + g)\eta = 0,$$

где $g = 1/r$. Его характеристическое уравнение $C\alpha + (g + g_д) = 0$ имеет единственный корень $\alpha = -(g + g_д)/C$, и решение для η имеет вид

$$\eta = \eta_0 e^{-\frac{g+g_д}{C}t}.$$

При $\alpha < 0$, т. е. при $(g + g_д) > 0$, отклонение стремится к нулю при возрастании времени. При этом имеем *устойчивое* состояние.

Нетрудно убедиться, что точкой устойчивого равновесия теперь является точка A (рис. 22.2). Для этой точки $(r + r_д) < 0$, и следовательно, $\frac{r + r_д}{rr_д} > 0$, так как $r_д < 0$. Таким образом, для точки A удовлетворяется условие устойчивого равновесия

$$\frac{r + r_д}{rr_д} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_д} = (g + g_д) > 0.$$

Точка B теперь является точкой *неустойчивого* равновесия.

Таким образом, устойчивое состояние и в этом случае соответствует *отрицательному* корню характеристического уравнения, относящегося к линейному в первом приближении уравнению для отклонения η. Можно сказать также, что устойчивое состояние данной цепи характеризуется тем, что сумма динамических проводимостей $(g + g_д)$ положительна.

22.4. О выборе эквивалентной схемы для рассмотрения вопроса об устойчивости

Рассмотрим простейший случай, когда цепь состоит только из последовательно включенных сопротивления r и нелинейного элемента, имеющего участок с падающей характеристикой (рис. 22.4), и в цепи нет явно включенных конденсатора и катушки. Пусть напряжение u_0, сопротивление r и характеристика $u = F(i)$ таковы, что имеют место две точки равновесия A и B (рис. 22.5). Возникает вопрос, какая из точек A или B может быть точкой устойчивого равновесия. Из рассмотрения в предыдущих параграфах видим, что решение этого вопроса зависит от наличия индуктивности или емкости в цепи. Любой участок реальной цепи, в том числе и любой реальный нелинейный элемент, обладает, как было сказано в гл. 3, распределенными емкостью и индуктивностью. Учитывая только индуктивность, получим один ответ (см. § 22.2), а учитывая только емкость, получим другой ответ (см. § 22.3). При учете и ин-

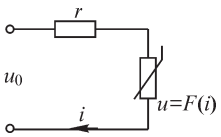


Рис. 22.4

дуктивности, и емкости можем представить эквивалентные схемы или в виде рис. 22.6, или в виде рис. 22.7. Обе схемы приближенные, так как в действительности и индуктивность, и емкость являются распределенными. Составляя для схем рис. 22.6 и 22.7 уравнения и решая их для малого отклонения η от состояния равновесия, получим также различные ответы в отношении точек устойчивого равновесия.

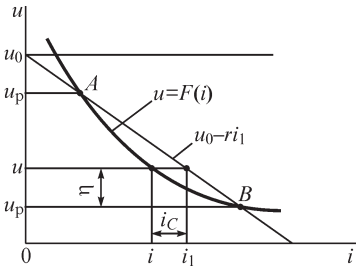


Рис. 22.5

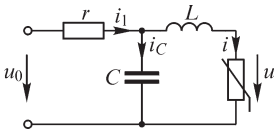


Рис. 22.6

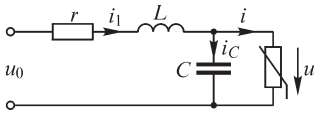


Рис. 22.7

Так, например, для схемы рис. 22.6 имеем уравнения:

$$i_1 = i_C + i; \quad u_0 = ri_1 + L\frac{di}{dt} + u; \quad \frac{1}{C}\int_0^t i_C dt + u_C(0) = L\frac{di}{dt} + u.$$

Исключив из них i_C и i_1, получим

$$u_0 = rCL\frac{d^2 i}{dt^2} + L\frac{di}{dt} + ri + rC\frac{du}{dt} + u.$$

Принимая $i = i_р + \eta$, имеем $u = u_р\left(\frac{du}{di}\right)_{i=i_р}\eta + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{di^2}\right)_{i=i_р}\eta^2 + \ldots$ и, ограничиваясь первыми двумя членами, находим $u = u_р + r_д\eta$. Тогда для малого отклонения η тока от положения равновесия получаем уравнение

$$0 = rCL\frac{d^2\eta}{dt^2} + L\frac{d\eta}{dt} + r\eta + rr_д C\frac{d\eta}{dt} + r_д\eta \qquad (*)$$

или $\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\delta\frac{d\eta}{dt} + \omega_0^2\eta = 0$, где $2\delta = \frac{1}{rC} + \frac{r_д}{L}$ и $\omega_0^2 = \frac{r + r_д}{rCL}$.

Легко заметить, что уравнение (*) переходит в уравнение, рассмотренное в § 22.2 при $C = 0$, и в уравнение, рассмотренное в § 22.3 при $L = 0$.

Корни характеристического уравнения равны

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Если $\omega_0^2 = \frac{r + r_д}{rCL} < 0$, т. е. $r + r_д < 0$, то оба корня вещественны и один корень положительный; следовательно, раз возникшее отклонение η нарастает со временем и состояние *неустойчивое*. Условию $r + r_д < 0$ отвечает точка A.

Если $\omega_0^2 > 0$, т. е. $r + r_д > 0$, то состояние характеризуется точкой *B*. При этом корни α_1 и α_2 могут быть вещественными или комплексными. При условии $\delta > 0$ вещественные части обоих корней отрицательны, раз возникшее отклонение η затухает во времени и состояние *устойчивое*. При $\delta < 0$ состояние *неустойчивое*.

Составляя аналогичным образом уравнения для схемы на рис. 22.7 и решая их для малого отклонения η от состояния равновесия, получим уравнение $\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\delta\frac{d\eta}{dt} + \omega_0^2\eta = 0$, где $2\delta = \frac{1}{r_д C} + \frac{r}{L}$ и $\omega_0^2 = \frac{r + r_д}{r_д CL}$.

Теперь $\omega_0^2 < 0$ при $r + r_д > 0$, и, следовательно, *неустойчивой* будет точка *B*. В случае $\omega_0^2 > 0$ точка *A* будет *устойчивой* при $\delta > 0$ и *неустойчивой* при $\delta < 0$.

Итак, в зависимости от выбора эквивалентной схемы ответ получается различным.

Сопоставляя результат, полученный в § 22.3 при $L = 0$, когда устойчивой была точка *A*, с результатом по схеме рис. 22.6 при $L \neq 0$, когда точка *A* оказалась неустойчивой при любом сколь угодно малом, но конечном значении *L*, видим, что чрезвычайно важно учитывать даже малые параметры. Сопоставление же результатов по рис. 22.6 и 22.7 показывает, что столь же важно правильно отразить в эквивалентной схеме взаимное расположение параметров *L* и *C*. Это зависит от характера самого нелинейного элемента. Если он имеет преимущественно индуктивный характер, т. е. в нем энергия магнитного поля преобладает над энергией электрического поля, что, например, наблюдается при электрической дуге, существующей при больших токах и малых напряжениях, то следует избрать схему рис. 22.6. Если нелинейный элемент имеет преимущественно емкостный характер, т. е. в нем энергия электрического поля преобладает над энергией магнитного поля, что наблюдается, например, в неоновой лампе, работающей при сравнительно больших напряжениях и ничтожных токах, то следует избрать схему на рис. 22.7.

22.5. Общие соображения об устойчивости режима в сложных нелинейных электрических цепях, питаемых от источников постоянного напряжения

В общем случае для сложной цепи, включенной под действие постоянного напряжения и содержащей нелинейные сопротивления с падающими участками характеристик, а также содержащей в отдельных ветвях индуктивные катушки, конденсаторы и резисторы с постоянными параметрами, для анализа устойчивости значений постоянных токов, которые являются частными решениями уравнений, описывающих систему, необходимо пользоваться тем же методом, который был применен при рассмотрении приведенных в предыдущих параграфах примеров.

Составив по законам Кирхгофа систему уравнений для рассматриваемой нелинейной цепи и решив ее, например, с помощью методов, изложенных в главе 20, находим значения постоянных токов в цепи, отвечающие состоянию равновесия, и динамические сопротивления нелинейных элементов при этих значениях токов. Если все эти сопротивления положительны, то соответствующее

равновесие устойчиво. Если же хотя бы одно динамическое сопротивление отрицательно, то надлежит исследовать вопрос об устойчивости соответствующего состояния.

Давая малое приращение η току в одном из нелинейных элементов, находим, пользуясь системой уравнений цепи и найденными значениями динамических сопротивлений, приращения всех других токов и напряжений. При этом считаем, что динамические сопротивления нелинейных элементов остаются постоянными при малых отклонениях от рассматриваемого положения равновесия. Это соответствует тому первому приближению, которое было сделано в приведенных ранее примерах при отбрасывании членов с η в степенях, больших, чем первая. По сути дела, применяя такой метод, мы линеаризуем характеристики нелинейных элементов вблизи точек равновесия. Такой метод, соответственно, иногда называют методом л и н е а р и з а ц и и в м а л о м.

Имея систему уравнений с получившими приращения токами и систему уравнений при равновесии и вычитая вторую из первой, получаем систему *линейных* уравнений для приращений токов или напряжений при указанном первом приближении. Решая эту систему относительно приращений η отдельных токов, получим, вообще говоря, линейные уравнения n-го порядка.

Анализ переходных процессов вблизи точек равновесия для малых отклонений можно произвести всеми методами теории линейных цепей. Для этого достаточно в исходной цепи, содержащей в общем случае индуктивные катушки, конденсаторы и резисторы с нелинейными характеристиками, заменить эти нелинейные элементы линейными, параметры которых равны дифференциальным параметрам $L_д$, $C_д$, $r_д$. Если в исходной цепи имеются элементы с линейными характеристиками, то они вносятся в расчетную схему без изменений, так как для них дифференциальные и статические параметры тождественны.

При таком подходе получаем возможность непосредственно для приращений формировать систему уравнений. Характеристические уравнения, соответствующие им, имеют n корней α_k, и решения при отсутствии кратных корней имеют вид

$$\eta = \sum_{k=1}^{k=n} \eta_{0k} e^{\alpha_k t}.$$

Корни α_k могут быть все вещественны или могут иметь в своем составе также пары сопряженных комплексных корней. В последнем случае происходят колебательные процессы.

С интересующей нас точки зрения важно следующее: *если вещественные части всех корней характеристических уравнений отрицательны, то* $\eta \to 0$ при $t \to \infty$, процесс оказывается затухающим и рассматриваемое *состояние равновесия устойчивое*.

Если хоть один корень имеет положительную вещественную часть, то η нарастает с увеличением t и *состояние равновесия неустойчивое*.

Если система уравнений сформирована относительно переменных состояния, то анализ устойчивости может быть произведен и без отыскания корней характеристического уравнения.

Пусть относительно приращений токов в индуктивных катушках и напряжений на зажимах конденсаторов (переменных состояния) получена система уравнений в виде

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix}\mathbf{u}_C\\ \mathbf{i}_L\end{Vmatrix}=\mathbf{A}\begin{Vmatrix}\mathbf{u}_C\\ \mathbf{i}_L\end{Vmatrix}\quad\text{при}\quad\begin{Vmatrix}\mathbf{u}_C\\ \mathbf{i}_L\end{Vmatrix}_{t=0}=\begin{Vmatrix}\mathbf{u}_C(0)\\ \mathbf{i}_L(0)\end{Vmatrix},$$

где $\mathbf{A}$ — матрица, составленная из дифференциальных параметров элементов цепи согласно топологическим особенностям цепи. Заметим, что переходный процесс для малых приращений происходит только за счет энергии магнитных полей индуктивных катушек и энергии электрических полей конденсаторов, и поэтому в обобщенных ветвях остаются только пассивные элементы. Для коэффициентов характеристического уравнения

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}+\ldots+a_{n-1}p+a_n=0$$

имеем $a_k=(-1)^k\,\Sigma$ — главные миноры k-го порядка.

Принимая во внимание критерий Рауса—Гурвица (см. § 14.8), для выяснения устойчивости процесса достаточно исследовать условия

$$a_0>0;\quad a_1>0;\quad\begin{vmatrix}a_1 & a_0\\ a_3 & a_2\end{vmatrix}>0;\quad\begin{vmatrix}a_1 & a_0 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1\\ a_5 & a_4 & a_3\end{vmatrix}>0\quad\text{и т. д.}$$

В качестве примера рассмотрим цепь, представленную на рис. 22.8, *а*, состоящую в общем случае только из нелинейных элементов. Эквивалентная схема этой цепи для малых приращений при условии U_0 = const представлена на рис. 22.8, *б*, а граф схемы — на рис. 22.8, *в*. Из графа для сечения по ветви *2* дерева имеем $i_2=i_3=i$; для контура, образованного связью *4*, имеем $u_1=u_4=u$.

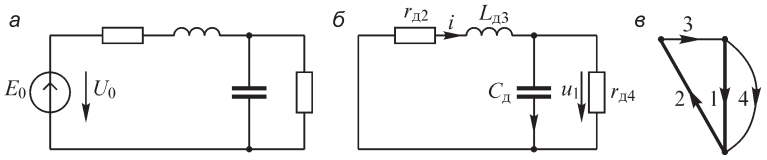


Рис. 22.8

Для токов, определяемых сечением *1*, и напряжений, определяемых контуром, образованным связью *3*, имеем систему уравнений:

$$C_д\frac{du_1}{dt}=-\frac{u_1}{r_{д4}}+i_3\quad\text{или}\quad\frac{du}{dt}=-\frac{1}{r_{д4}C_д}u+\frac{1}{C_д}i;$$

$$L_д\frac{di_3}{dt}=-u_1-r_{д2}i_3\quad\text{или}\quad\frac{di}{dt}=-\frac{1}{L_д}u-\frac{r_{д2}}{L_д}i.$$

В матричной форме

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix} u \\ i \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\dfrac{1}{r_{д4}C_д} & \dfrac{1}{C_д} \\ -\dfrac{1}{L_д} & -\dfrac{r_{д2}}{L_д} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u \\ i \end{Vmatrix} = \mathbf{A}\begin{Vmatrix} u \\ i \end{Vmatrix}.$$

Главный минор порядка 0 равен единице. Главный минор первого порядка равен сумме диагональных элементов с обратным знаком. Главный минор второго порядка в данном случае есть определитель матрицы **A**. Таким образом, имеем

$$a_0 = 1; \quad a_1 = (-1)^1\left(-\frac{1}{r_{д4}C_д} - \frac{r_{д2}}{L_д}\right) = \frac{1}{r_{д4}C_д} + \frac{r_{д2}}{L_д}; \quad a_2 = \frac{r_{д2}}{r_{д4}L_дC_д} + \frac{1}{L_дC_д}.$$

Условиями устойчивости точки равновесия будут

$$\left(\frac{1}{r_{д4}C_д} + \frac{r_{д2}}{L_д}\right) > 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{L_дC_д}\left(\frac{r_{д2}}{r_{д4}} + 1\right) > 0.$$

Приведенная ранее методика исследования устойчивости точки равновесия для сложных цепей требует большого объема вычислений. Так, например, число главных миноров k-го порядка для матрицы **A** порядка $(n \times n)$ равно $C_n^k = n!/k!(n-k)!$. Суммарное число операций для вычисления коэффициентов a_k характеристического уравнения матриц высокого порядка может оказаться слишком большим даже для современных ЭВМ. Поэтому данную методику целесообразно применять для относительно простых цепей.

А. М. Ляпунов доказал, что указанное выше первое приближение, приводящее к *линейности* уравнений для малых отклонений от положения равновесия, вполне достаточно, чтобы по отмеченным критериям судить об устойчивости состояния. Особым является случай при нулевых значениях вещественной части корней, когда надо учитывать члены с η в более высокой степени, чем первая.

Если бы система уравнений оставалась линейной при любых сколь угодно больших η, то в случае неустойчивого состояния раз возникшее отклонение η возрастало бы до бесконечности. В действительности замена участков характеристик нелинейных элементов вблизи точек равновесия отрезками прямых допустима только при малых отклонениях η от положения равновесия. *При больших* η *надо учитывать нелинейность характеристик*. Это может привести к ограничению получающихся отклонений, т. е. к переходу системы в новые устойчивые состояния. Так, в рассмотренном в § 22.2 примере положительное отклонение тока от точки A неустойчивого равновесия переводит систему в точку B устойчивого равновесия, причем это связано именно с нелинейностью характеристики $u = F(i)$.

Особый интерес такие соображения имеют в отношении колебательных систем. Здесь выход системы из состояния неустойчивого равновесия приводит к возникновению колебаний с нарастающей амплитудой. Однако вследствие нелинейности характеристик элементов цепи нарастание амплитуды колебаний может оказаться ограниченным, и наступает *устойчивый периодический процесс*.

Такой процесс называют автоколебательным, так как цепь питается от источника постоянного напряжения и колебания возникают внутри самой цепи вследствие ее особых свойств. Теория устойчивости периодических движений детально разработана А. М. Ляпуновым. Мы рассмотрим этот вопрос на примерах транзисторного генератора и генератора релаксационных колебаний.

22.6. Возбуждение автоколебаний в нелинейной системе с обратной связью. Транзисторный генератор

В предыдущих параграфах мы видели, что при питании электрической цепи от источника постоянного напряжения могут возникнуть неустойчивые состояния равновесия. Возникшие вследствие случайного толчка небольшие отклонения от такого состояния равновесия в дальнейшем нарастают. Особый интерес представляют колебательные системы, в которых возникшие отклонения от положения неустойчивого равновесия развиваются в виде колебательного процесса. Как уже было сказано, амплитуда этих колебаний ограничивается вследствие нелинейных свойств цепи. В § 22.2, 22.3 и 22.4 были рассмотрены случаи, когда причиной неустойчивого состояния являлось наличие в цепи нелинейного элемента с падающей характеристикой.

В § 13.7 отмечалась возможность возникновения неустойчивых состояний вследствие наличия достаточно большой положительной обратной связи.

Характерным примером этого последнего случая является транзисторный генератор. Простейшая схема такого генератора, построенная с использованием полевого транзистора (см. § 19.11), изображена на рис. 22.9.

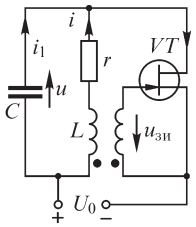


Рис. 22.9

Мы рассмотрим условия самовозбуждения колебаний в этой конкретной схеме именно с целью выявления роли обратной связи на основе общих положений об устойчивости, сформулированных в предыдущем параграфе, а также на основе общих зависимостей, характеризующих цепи с обратными связями.

Обратная связь в рассматриваемой схеме генератора осуществляется с помощью взаимной индукции между колебательным контуром L, C и цепью затвора полевого транзистора. Раз возникшие вследствие начального толчка колебания в контуре L, C создают переменное напряжение на затворе, поддерживающее эти колебания.

Выясним требования к значению коэффициента взаимной индукции M, при которых обеспечивается достаточная для самовозбуждения колебаний положительная обратная связь. Составим уравнения цепи. Напряжение на контуре u связано с током в ветви r, L контура уравнением

$$u = ri + L\frac{di}{dt}.$$

Напряжение $u_{\text{си}}$ между стоком и истоком равно

$$u_{\text{си}} = U_0 - u = U_0 - ri - L\frac{di}{dt}.$$

Напряжение $u_{зи}$ между затвором и истоком равно ЭДС взаимной индукции: $u_{зи} = -M\dfrac{di}{dt}$, так как током затвора, а соответственно, и падением напряжения от него в цепи затвора пренебрегаем.

Ток в цепи стока равен сумме тока i в катушке контура и тока $i_1 = C\dfrac{du}{dt}$:

$$i_с = i + i_1 = i + C\frac{du}{dt} = i + rC\frac{di}{dt} + CL\frac{d^2 i}{dt^2}.$$

Ток $i_с$ транзистора нелинейно зависит от напряжения $u_{си}$ между стоком и истоком и от напряжения $u_{зи}$ между затвором и истоком. Эту зависимость можно записать в общем виде: $i_с = \varphi(u_{зи}, u_{си})$.

При постоянном напряжении U_0 в цепи и отсутствии колебаний в контуре через триод будет протекать постоянный ток $i_{с0}$. Так как постоянный ток не проходит через конденсатор, то ток $i_{с0}$ проходит через катушку L и, следовательно, $i_{с0} = i_0$. Постоянный ток i_0 не индуцирует ЭДС в цепи затвора, и $u_{зи} = 0$. На контуре имеется малое постоянное напряжение $u_0 = ri_0$, а на стоке транзистора постоянное напряжение $u_{с0} = U_0 - u_0$. Это состояние равновесия на рис. 22.10 изображено точкой A на семействе характеристик триода.

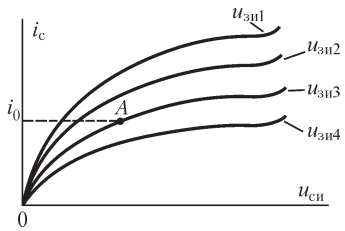


Рис. 22.10

Пусть в результате случайного толчка ток в катушке получил небольшое приращение η и принял значение $i = i_0 + \eta$. Соответственно, все величины получат приращения, определяемые вышеприведенными уравнениями цепи, а именно:

$$\Delta u = r\eta + L\frac{d\eta}{dt};\quad \Delta u_{си} = -r\eta - L\frac{d\eta}{dt};\quad \Delta u_{зи} = -M\frac{d\eta}{dt};\quad \Delta i_с = \eta + rC\frac{d\eta}{dt} + LC\frac{d^2\eta}{dt^2}.$$

Нелинейное уравнение $i_с \quad \varphi(u_{зи}, u_{си})$ дает связь между величинами $\Delta i_с$, $\Delta u_{зи}$ и $\Delta u_{си}$. Воспользуемся разложением функции $i_с = \varphi(u_{зи}, u_{си})$ в ряд по степеням малых величин $\Delta u_{зи}$ и $\Delta u_{си}$. Имеем

$$i_с = i_{с0} + \frac{\partial i_с}{\partial u_{зи}}\Delta u_{зи} + \frac{\partial i_с}{\partial u_с}\Delta u_{си} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 i_с}{\partial u_{зи}^2}(\Delta u_{зи})^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 i_с}{\partial u_{си}^2}(\Delta u_{си})^2 + \ldots$$

Пренебрегая малыми величинами второго и более высоких порядков, получаем

$$\Delta i_с = i_с - i_{с0} = \frac{\partial i_с}{\partial u_{зи}}\Delta u_{зи} + \frac{\partial i_с}{\partial u_{си}}\Delta u_{си} = S\Delta u_{зи} + G\Delta u_{си}.$$

Здесь S — крутизна характеристики в точке равновесия A и $G = 1/R_{вн}$, причем G — выходная проводимость триода, а $R_{вн}$ — его внутреннее сопротивление.

Пренебрежение малыми величинами второго и более высоких порядков соответствует линеаризации характеристики вблизи точки равновесия. Иными словами, мы полагаем, что величины S и G постоянны в пределах малого отклонения тока $\Delta i_с$ от точки равновесия.

Подставляя в последнее уравнение величины $\Delta i_{\text{с}}$, $\Delta u_{\text{зи}}$ и $\Delta u_{\text{си}}$, выраженные через η, получим

$$\eta + rC\frac{d\eta}{dt} + LC\frac{d^2\eta}{dt^2} = -SM\frac{d\eta}{dt} - Gr\eta - GL\frac{d\eta}{dt},$$

или

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\delta\frac{d\eta}{dt} + \omega_0^2\eta = 0, \text{ где } 2\delta = \frac{rC + SM + GL}{LC}; \quad \omega_0^2 = \frac{1 + Gr}{LC}.$$

Характеристическое уравнение $\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0$ имеет корни

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega'.$$

Они будут сопряженными комплексными, когда $\delta < \omega_0$. При этом процесс будет колебательным с частотой ω'. Решение уравнения для η имеет вид

$$\eta = \sum_{k=1}^{2}\eta_{0k}e^{\alpha_k t} = \eta_{01}e^{\alpha_1 t} + \eta_{02}e^{\alpha_2 t} = Ae^{-\delta t}\sin(\omega' t + \psi).$$

Величина $\eta_{01} + \eta_{02} = A\sin\psi$ является начальным отклонением тока i от его значения i_0.

Колебания будут затухающими и состояние равновесия устойчивым около значения тока i_0, если вещественные части корней характеристического уравнения отрицательны, т. е. $\delta > 0$.

Состояние будет неустойчивым и раз возникшие колебания будут нарастать, если вещественные части корней характеристического уравнения положительны, т. е. $\delta < 0$. Последнее и явится условием самовозбуждения колебаний. Имеем это условие в виде

$$SM + GL + rC < 0, \text{ т. е. } \quad M < -\frac{GL + rC}{S}.$$

Таким образом, для положительности обратной связи необходимо, чтобы M было отрицательно, и для обеспечения самовозбуждения абсолютное его значение должно удовлетворять условию

$$|M| > \frac{GL + rC}{S}.$$

Эти колебания нарастали бы беспредельно, если бы прямолинейная часть характеристики простиралась в обе стороны до бесконечности. В действительности характеристика триода *нелинейна*, и это имеет решающее значение для установления устойчивых колебаний с вполне определенной амплитудой. Что это будет в действительности так, вытекает из простых физических соображений. Возрастание колебательной составляющей тока от точки A по характеристике вверх ограничено током насыщения триода, а вниз — невозможностью изменения направления тока через него. Вопрос об установлении устойчивой амплитуды количественно будет рассмотрен в § 22.15.

Для пояснения процессов в транзисторном генераторе на рис. 22.11 приведена векторная диаграмма для основных гармоник колебательных составляющих

токов и напряжений. Ток в катушке $\dot{I}$ отстает от напряжения на контуре $\dot{U}$ на угол, меньший $\pi/2$, но близкий к $\pi/2$ вследствие высокой добротности контура. Ток в конденсаторе $\dot{I}_1$ упреждает напряжение $\dot{U}$ на угол $\pi/2$, поскольку потерями в конденсаторе пренебрегаем. Напряжение на затворе $\dot{U}_{зи} = -j\omega M\dot{I}$ опережает ток $\dot{I}$ на угол $\pi/2$, так как $M < 0$. Напряжение на стоке $\dot{U}_{си}$ равно и противоположно напряжению на контуре, так как для переменных составляющих имеем $\dot{U}_{си} = -\dot{U}$. Сумма токов в катушке $\dot{I}$ и в конденсаторе $\dot{I}_1$ равняется току $\dot{I}_с$.

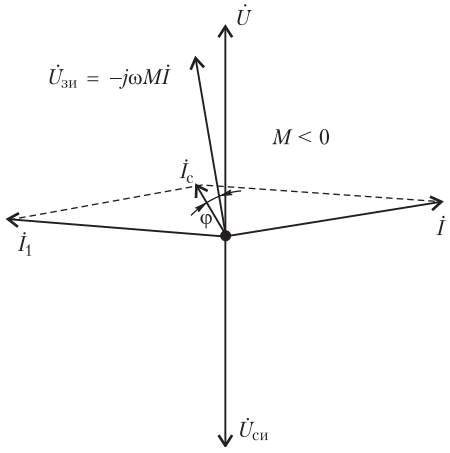


Рис. 22.11

Из диаграммы хорошо видно, что переменная составляющая напряжения $\dot{U}_{си}$ на стоке находится почти в противофазе с напряжением на затворе. При этом, поскольку сдвиг фаз φ между $\dot{U}$ и $\dot{I}_с$ близок к нулю, мощность $UI_с\cos\varphi > 0$ и энергия поступает в контур. Сдвиг фаз между током $\dot{I}_с$ и напряжением $\dot{U}_{си}$ равен $\pi - \varphi$. Поэтому

$$U_{си}I_с\cos(\pi - \varphi) = -UI_с\cos\varphi < 0,$$

и транзистор работает в режиме генератора колебаний.

Обычно на практике режим, в котором работает транзисторный генератор, отличается от рассмотренного тем, что напряжение на затворе имеет также постоянную составляющую. Этим достигается повышение коэффициента полезного действия генератора, так как работа происходит на нижнем участке характеристики триода и в моменты больших значений $u_{си}$ ток $i_с$ стока практически равен нулю, что и приводит к снижению потерь в триоде. Переменная составляющая тока $i_с$ при этом существенно отличается от синусоидальной, ток же i в контуре остается практически синусоидальным вследствие большой добротности контура.

Рассмотрим вопрос об условиях возбуждения автоколебаний в транзисторном генераторе (см. рис. 22.9), пользуясь эквивалентной схемой и понятием о передаточной функции замкнутой и разомкнутой систем.

Рассматривая процесс на малом участке характеристики, который принимается линейным, получаем линейные уравнения; следовательно, можем воспользоваться операторным методом. На рис. 22.12 изображена схема генератора, в которой полевой триод заменен его эквивалентной схемой.

По схеме рис. 22.12 легко рассчитать передаточную функцию всей замкнутой системы, если известны передаточные функции $K_1(p)$ и $K_2(p)$ разомкнутой системы и устройства обратной связи. Согласно изложенному в § 13.7, при наличии обратной связи для передаточной функции замкнутой системы имеем

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_{зи}(p)} = \frac{K_1(p)}{1 - K_1(p)K_2(p)}.$$

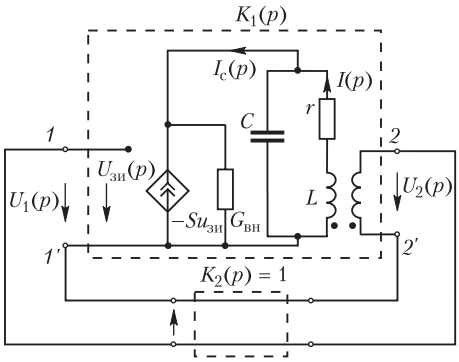


Рис. 22.12

В данном случае $K_2(p) = 1$, а $K_1(p)$ рассчитываем, полагая обратную связь отсутствующей. Операторное изображение $U_2'(p)$ напряжения на разомкнутых выходных зажимах равно

$$U_2'(p) = -pMI(p) = -pM\frac{U(p)}{r+pL} = \frac{-I_c(p)\dfrac{\dfrac{1}{pC}(r+pL)}{r+pL+\dfrac{1}{pC}}}{r+pL}pM.$$

Учитывая, что $I_c(p) = \dfrac{SU_{зи}(p)(1+rCp+LCp^2)}{LCp^2+(rC+GL)p+rG+1}$ получим

$$K_1(p) = \frac{U_2'(p)}{U_{зи}(p)} = \frac{-SMp}{p^2LC+p(rC+GL)+rG+1}$$

и окончательно

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_{зи}(p)} = \frac{-SMp}{p^2+p\left(\dfrac{r}{L}+\dfrac{G}{C}+\dfrac{SM}{LC}\right)+\dfrac{1}{LC}(1+Gr)}\frac{1}{LC}.$$

Знаменатель $K(p)$, приравненный к нулю, дает характеристическое уравнение дифференциального уравнения для напряжения $u_{зи}$ на затворе триода. Оно является одновременно также характеристическим уравнением для η, поскольку $u_{зи} = -M\dfrac{di}{dt} = -M\dfrac{d\eta}{dt}$. Содержащиеся в нем члены $\dfrac{r}{L}+\dfrac{G}{C}+\dfrac{SM}{LC} = 2\delta$ и $\dfrac{1}{LC}+\dfrac{Gr}{LC} = \omega_0^2$ являются теми же самыми, что были получены раньше.

Генераторы колебаний можно построить также на основе операционных усилителей, охваченных обратной связью.

Найдем условие самовозбуждения колебаний генератора, схема которого изображена на рис. 22.13, пользуясь понятиями передаточных функций замкнутой и разомкнутой систем.

Учитывая, что передаточная функция устройства при разомкнутой обратной связи $K(p) = \dfrac{kT_3 p}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)+T_3 p}$, где $T_1 = R_1C_1$, $T_2 = R_2C_2$, $T_3 = R_2C_1$, записываем амплитудно-фазовую частотную характеристику $K(j\ )$ и из условий $\mathrm{Re}\,K(j\omega) > -1$, $\mathrm{Im}\,K(j\omega) = 0$ частотного критерия устойчивости, рассмотренного в § 13.8, получаем частоту колебаний $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{R_1R_2C_1C_2}}$, а также соотношение $k < -\dfrac{R_1C_1 + R_2C_2 + R_2C_1}{R_2C_1}$ между параметрами элементов цепи, при выполнении которого существуют автоколебания. Так как в полученном соотношении $k < 0$, то, следовательно, операционный усилитель должен быть инвертирующим, т. е. изменяющим фазу входного напряжения на 180°.

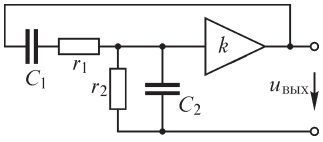


Рис. 22.13

В ряде случаев в цепь генератора вводят дополнительные элементы, позволяющие улучшить форму колебаний и приблизить ее к синусоидальной.

22.7. Релаксационные колебания

Колебания в транзисторном генераторе, рассмотренные в предыдущем параграфе, характеризуются переходом энергии из конденсатора в катушку и обратно в колебательном контуре L, C. Для осуществления таких колебаний необходимы два накопителя энергии в виде катушки и конденсатора. Используя нелинейные элементы с характеристиками, имеющими падающие участки, можно получить автоколебания при одном накопителе энергии, обычно конденсаторе. Такие колебания носят название р е л а к с а ц и о н н ы х к о л е б а н и й.

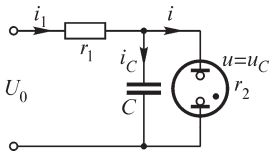


Рис. 22.14

Рассмотрим изображенную на рис. 22.14 цепь, в которой могут возникать релаксационные колебания.

Неоновая лампа с нелинейной характеристикой $u = \varphi(i)$, изображенной на рис. 22.15, включена параллельно конденсатору C. Между источником постоянного напряжения U_0 и лампой включено достаточно большое сопротивление r_1. Прямая $U_0 - r_1 i_1$ изображена также на рис. 22.15. Она пересекает характеристику лампы на падающем участке. Из рассмотрения в § 22.3 и 22.4 следует, что точка пересечения является точкой неустойчивого равновесия в цепи.

При включении цепи в момент $t = 0$ под постоянное напряжение U_0 конденсатор заряжается через сопротивление r_1. Лампа не горит, и ток в ней $i = 0$. Напряжение на конденсаторе (рис. 22.16) растет по закону (см. § 9.6)

$$u = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right), \text{ где } \tau_1 = r_1C.$$

В момент $t = t_1$ напряжение u на конденсаторе и на лампе достигает значения U_2, при котором лампа вспыхивает. Ток в лампе резко возрастает, и происходит скачкообразный переход состояния лампы от точки B в точку G характери-

стики. С этого момента ток в лампе поддерживается за счет разряда конденсатора. Пусть r_2 есть среднее значение сопротивления лампы на участке GH характеристики. Так как $r_2 \ll r_1$, то при горении лампы можно не учитывать ток i_1. Полагая $r_2 = \text{const}$, получаем закон изменения напряжения на конденсаторе во время горения лампы в виде (см. § 9.6)

$$u = U_2 e^{-\frac{t-t_1}{\tau_2}}, \text{ где } \tau_2 = r_2 C.$$

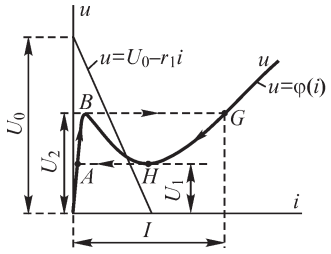


Рис. 22.15

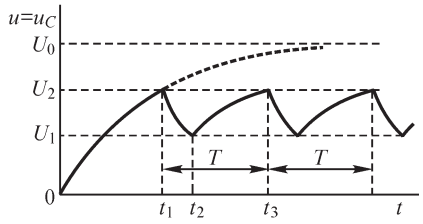


Рис. 22.16

К моменту $t = t_2$ напряжение упадет до значения U_1, при котором лампа гаснет. Ток в ней падает практически до нуля, и происходит скачкообразный переход состояния лампы из точки H в точку A характеристики. Интервал времени $t_2 - t_1$ определяется из выражения

$$U_1 = U_2 e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau_2}}, \text{ откуда } t_2 - t_1 = \tau_2 \ln\frac{U_2}{U_1}.$$

После погасания лампы конденсатор вновь начинает заряжаться от источника напряжения U_0 через сопротивление r_1 по закону

$$u = U_0 + Ae^{-\frac{t}{\tau_1}}.$$

Произвольную постоянную A определяем из условия, что при $t = t_2$ имеем $u = U_1$, откуда

$$A = (U_1 - U_0)e^{\frac{t_2}{\tau_1}} \text{ и } u = U_0 - (U_0 - U_1)e^{-\frac{t-t_2}{\tau_1}}.$$

К моменту $t = t_3$ конденсатор зарядится до напряжения U_2, и лампа вновь вспыхнет. Интервал времени $t_3 - t_2$ определяется из уравнения

$$U_2 = U_0 - (U_0 - U_1)e^{-\frac{t_3-t_2}{\tau_1}}, \text{ откуда } t_3 - t_2 = \tau_1 \ln\frac{U_0 - U_1}{U_0 - U_2}.$$

В дальнейшем процесс периодически повторяется. Период колебаний равен

$$T = t_3 - t_1 = \tau_1 \ln\frac{U_0 - U_1}{U_0 - U_2} + \tau_2 \ln\frac{U_2}{U_1}.$$

Релаксационные колебания с успехом могут быть использованы, например, для осуществления линейной развертки луча катодного осциллографа. Действи-

тельно, восходящие ветви кривой $u = F(t)$ (рис. 22.16) можно получить весьма близкими к прямолинейным, если они представляют собой только начальную часть кривой заряда конденсатора. Это будет иметь место, если U_0 взять достаточно большим, чтобы было

$$\frac{t_3 - t_2}{\tau_1} = \ln\frac{U_0 - U_1}{U_0 - U_2} \ll 1.$$

Релаксационные колебания можно получить также в устройствах с другими схемами.

22.8. Методы расчета переходных процессов в нелинейных электрических цепях

Точное аналитическое решение нелинейных дифференциальных уравнений электрических цепей возможно для весьма ограниченного круга задач. Основными инструментами расчета нелинейных электрических цепей на практике являются графические методы, те или иные приближенные аналитические методы, методы численного решения дифференциальных уравнений.

Среди приближенных аналитических методов следует выделить метод медленно меняющихся амплитуд, метод приближенного аналитического выражения характеристик нелинейных элементов, метод кусочно-линейного выражения характеристик нелинейных элементов. При использовании метода приближенного аналитического представления характеристик успех в значительной мере зависит от удачного выбора формулы для приближенного описания нелинейной характеристики. Это обстоятельство весьма ограничивает возможности метода. Наиболее простым способом приближенного представления нелинейной характеристики элемента является ее изображение совокупностью прямолинейных отрезков, т. е. кусочно-линейное выражение характеристики нелинейного элемента. При использовании этого метода, во-первых, упрощается аналитическая запись нелинейной характеристики, во-вторых, в пределах каждого линейного участка характеристики изменения токов и напряжений описываются линейными дифференциальными уравнениями, что дает возможность использовать весь аппарат расчета переходных процессов в линейных цепях. Однако при этом возникает задача определения постоянных интегрирования. Эти постоянные следует определять, приравнивая значения токов и напряжений в конце некоторого участка к их значениям в начале последующего участка. Такой подход приводит к решению системы трансцендентных уравнений.

С развитием вычислительной техники нашли широкое применение численные методы расчета переходных процессов в нелинейных цепях. Суть всех численных методов заключается в определении значений искомых токов и напряжений в отдельные моменты времени, разделенные некоторым интервалом. Если, например, имеем уравнение

$$\frac{di}{dt} = f(i, t, u_0),$$

то для момента времени t_{k+1}, когда значение тока равно i_{k+1}, имеем

$$i_{k+1} = i_k + \int_0^h f(i_k, t_k, u_0)\,dt = i_k + \int_0^h i'(i_k, t_k, u_0)\,dt,$$

где $h = t_{k+1} - t_k$.

В зависимости от способа интегрирования второго члена различают и методы решения дифференциальных уравнений. Наиболее простое выражение получают, полагая, что в интервале h производная искомой функции неизменна. Тогда имеют формулу

$$i_{k+1} = i_k + hf(i_k, t_k, u_0) \quad \text{или} \quad \frac{di}{dt} \approx \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{i_{k+1} - i_k}{h} = f(i_k, t_k, u_0),$$

которой определяется метод Эйлера, или метод последовательных интервалов.

Согласно этому методу, весь интервал времени, в течение которого рассматривается процесс, разбивается на достаточно малые интервалы времени $\Delta t = h$. Соответственно, дифференциалы всех величин в уравнениях заменяются конечными приращениями этих величин за промежуток времени $\Delta t = h$. Получив в конце некоторого интервала времени значение одной из двух величин, связанных между собой нелинейной зависимостью, находят вторую из этих величин, пользуясь заданной в табличной формой или графически нелинейной характеристикой. Эти величины принимаются как начальные в следующем интервале времени. Подобные многократно повторяющиеся операции просто осуществить при помощи системы команд на ЭВМ.

Для численных методов исключительно большое значение имеет выбор подходящего интервала. Значение h сильно влияет на точность полученных результатов и на эффективность расчета в целом. Для нелинейных электрических цепей эта величина наперед неизвестна, и поэтому инженеру-расчетчику следует, исходя из физических соображений, опыта или знания некоторых особенностей рассматриваемого процесса, задавать наиболее приемлемые значения h.

В следующих параграфах показаны простейшие примеры применения некоторых из перечисленных ранее методов расчета нелинейных электрических цепей.

22.9. Метод графического интегрирования для расчета переходного процесса в нелинейной цепи

Метод графического интегрирования ценен тем, что при нем используется действительная характеристика нелинейного элемента без замены ее какой-либо другой близкой к ней характеристикой. В этом отношении метод графического интегрирования является наиболее точным. Однако в противоположность аналитическому методу, основанному на аналитическом выражении характеристики, он не дает общих связей, позволяющих судить о том, как изменяется процесс при изменении того или иного параметра. С некоторой неточностью, присущей всяким графическим построениям, в данном случае приходится мириться, так как и при аналитических методах решения нелинейных задач получаются только приближенные результаты вследствие необходимости принимать те или иные допущения.

Рассмотрим метод графического интегрирования на примерах замыкания накоротко катушки с ферромагнитным сердечником и включения такой катушки под действие постоянного напряжения.

Исследуя переходные процессы в катушке с ферромагнитным сердечником различными методами, в данном случае графическим, не будем учитывать вихревые токи в сердечнике.

Уравнение, описывающее процесс короткого замыкания катушки, имеет вид

$$\frac{d\Psi}{dt} + ri = 0,$$

где $\Psi = F(i)$ — потокосцепление с обмоткой катушки, нелинейно зависящее от тока i; r — сопротивление обмотки. Имеем

$$dt = -\frac{d\Psi}{ri},$$

откуда

$$t = -\int_{\Psi_0}^{\Psi} \frac{d\Psi}{ri} = \int_{\Psi}^{\Psi_0} \frac{d\Psi}{ri},$$

причем Ψ_0 — значение потокосцепления в момент замыкания катушки $t = 0$.

На рис. 22.17 изображены кривые намагничивания конкретной катушки (рис. 22.18) с замкнутым сердечником из листовой трансформаторной стали. Кривая *1* представляет собой первоначальную кривую намагничивания, кривая *2* — нисходящую ветвь при убывании потокосцепления от Ψ_0 до остаточного значения $\Psi_r = 0{,}2$ Вб. Пусть $\Psi_0 = 1{,}1$ Вб, чему соответствует ток $I_0 = 0{,}9$ А. Сопротивление обмотки рассматриваемой катушки $r = 8{,}5$ Ом.

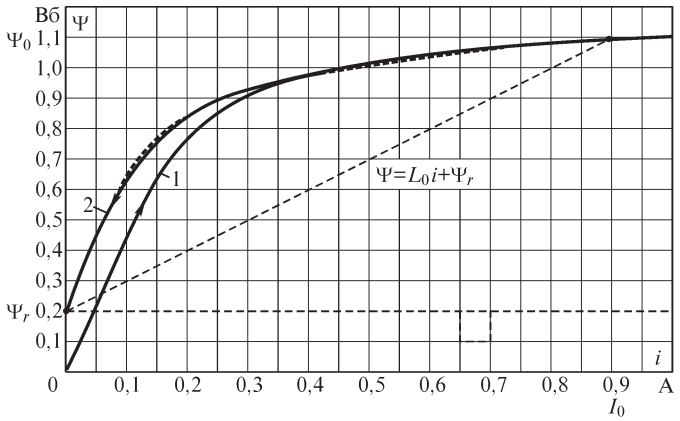


Рис. 22.17

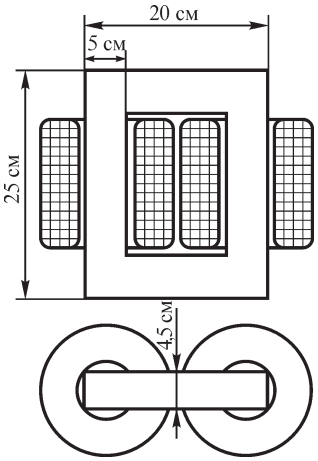


Рис. 22.18

Пользуясь кривой *2* на рис. 22.17, строим изображенную на рис. 22.19 кривую $1/(ri) = \varphi(\Psi)$, располагая которой, легко можно найти зависимость Ψ от t. Действительно, согласно последнему выражению, время t от момента замыкания, в те-

чение которого потокосцепление изменяется от Ψ_0 до Ψ, определяется заштрихованной на рис. 22.19 площадью.

На рис. 22.20 построена полученная таким образом кривая $\Psi(t)$ для рассматриваемой катушки, а также кривая $i(t)$. Для построения последней значения i находятся по кривой *2* рис. 22.17 соответственно каждому значению Ψ. Здесь же для сравнения штриховыми линиями изображены кривые $\Psi(t)$ и $i(t)$, которые имели бы место при постоянной индуктивности $L_0 = \dfrac{\Psi_0 - \Psi_r}{I_0} = \dfrac{1{,}1 - 0{,}2}{0{,}9} = 1$ Гн,

т. е. если бы потокосцепление убывало от Ψ_0 до Ψ_r в зависимости от тока i по линейному закону $\Psi - \Psi_r = L_0 i$, чему соответствует штриховая прямая на рис. 22.17. Уравнения штриховых кривых на рис. 22.20 имеют вид

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}};\ \Psi = (\Psi_0 - \Psi_r)e^{-\frac{t}{\tau_0}} + \Psi_r,\ \text{где}\ \tau_0 = L_0/r = 1/8{,}5 = 0{,}118\ \text{с}.$$

На рис. 22.20 обозначено $\Psi_0 - \Psi_r = \psi$.

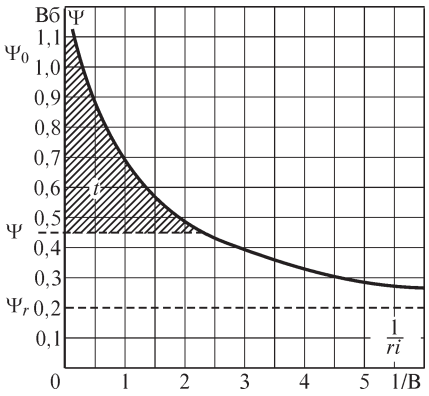


Рис. 22.19

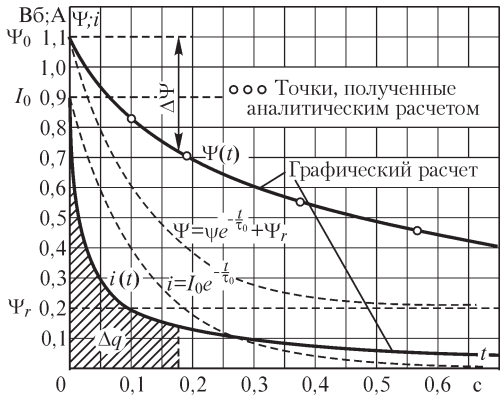


Рис. 22.20

Интересно обратить внимание на то, что вследствие нелинейности связи $\Psi = F(i)$, изображенной на рис. 22.17 (кривая *2*), ток вначале уменьшается быстрее, а поток — медленнее, чем при линейной зависимости между ними. Это можно пояснить следующим образом. Основное уравнение можно записать в виде

$$L_д \frac{di}{dt} + ri = 0,$$

где $L_д = d\Psi/di = \varphi(i)$ — динамическая индуктивность. Так как в начальный момент $L_д < L_0$ (см. рис. 22.17), то ток согласно последнему уравнению вначале падает быстрее, чем при $L = L_0 = \text{const}$. Так как в те же моменты времени t ток i оказывается меньшим, то меньшей получается и ЭДС — $d\Psi/dt = ri$, т. е. потокосцепление убывает медленнее, чем при $L = L_0 = \text{const}$. Из основного уравнения имеем

$$d\Psi = -ridt = -rdq;\quad \Delta\Psi = -r\Delta q,$$

где $\Delta\Psi$ — уменьшение потокосцепления; Δq — электрический заряд, перенесенный сквозь поперечное сечение цепи за промежуток времени от 0 до t. Величина Δq определяется площадью, заштрихованной на рис. 22.20; она меньше, чем при $L = L_0 = \text{const}$. Соответственно, меньше получается и $\Delta\Psi$.

Так как величина $q = \int_0^\infty i\,dt = \dfrac{\Psi_0 - \Psi_r}{r}$ в обоих случаях должна быть одной и той же, то кривая $i(t)$ пересекается в некоторый момент времени с экспонентой $I_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}}$. Замедление спадания тока при больших значениях t связано с большой динамической индуктивностью на крутой части кривой намагничивания.

Исследуем теперь методом графического интегрирования процесс включения катушки с ферромагнитным сердечником под действие постоянного напряжения U_0 (рис. 22.21). Метод проиллюстрируем на примере той же конкретной катушки, для которой рассмотрен процесс короткого замыкания. Предположим, что перед включением сердечник был размагничен. В таком случае связь $\Psi = F(i)$ будет характеризоваться первоначальной кривой намагничивания (кривая *1* на рис. 22.17). Дифференциальное уравнение теперь примет вид

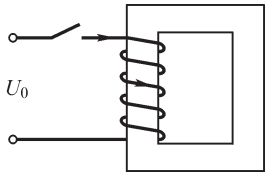


Рис. 22.21

$$\frac{d\Psi}{dt} + ri = U_0,$$

откуда

$$\int_0^\Psi \frac{d\Psi}{U_0 - ri} = \int_0^t dt = t.$$

Пользуясь известной зависимостью $\Psi = F(i)$ (кривая *1* на рис. 22.17), строим кривую $\Psi = \varphi\left(\dfrac{1}{U_0 - ri}\right)$. Заштрихованная на рис. 22.22 площадь дает в соответствующем масштабе время t, в течение которого потокосцепление увеличивается от 0 до Ψ, т. е. позволяет найти зависимость $\Psi(t)$.

Напряжение U_0 выберем так, чтобы установившийся ток I_0, как и в предыдущем примере, был равен 0,9 А, т. е. примем $U_0 = I_0 r = 0{,}9 \cdot 8{,}5 = 7{,}65$ В.

На рис. 22.23 изображена рассчитанная таким путем кривая $\Psi(t)$, а также кривая $i(t)$. Для построения последней значения i для каждого момента времени берутся из кривой $\Psi(i)$ на рис. 22.17 соответственно найденным значениям Ψ для этих моментов времени. Здесь же на рис. 22.23 штриховыми линиями изображены кривые $\Psi = \Psi_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0'}}\right)$ и $i = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0'}}\right)$, которые имели

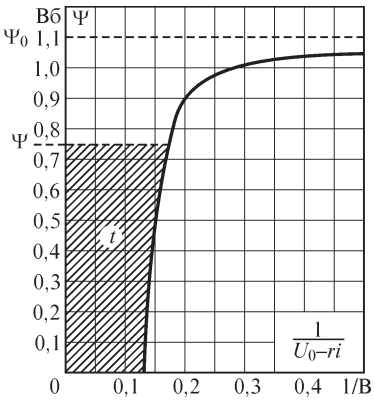


Рис. 22.22

бы место при линейной связи потокосцепления и тока $\Psi = L_0' i$, где $L_0' = \Psi_0/I_0 =$ $= 1{,}1/0{,}9 = 1{,}22$ Гн, причем $\tau_0' = L_0'/r = 1{,}22/8{,}5 = 0{,}144$ с.

Ход кривой $i(t)$ можно, как и в предыдущем примере, пояснить, написав уравнение в виде

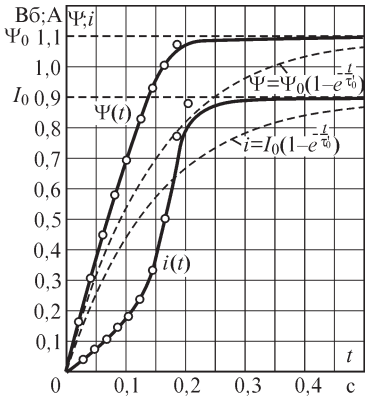


Рис. 22.23

$$L_д \frac{di}{dt} + ri = U_0.$$

Вначале $L_д > L_0$ и ток нарастает медленнее, чем при $L = L_0' = \text{const}$. При больших токах $L_д < L_0'$ и ток растет быстрее, чем при $L = L_0' = \text{const}$. Кривые $i(t)$ и $i = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0'}}\right)$ должны в некоторый момент времени пересечься. Действительно, независимо от закона изменения тока во времени имеем

$$d\Psi = (U_0 - ri)dt,$$

и так как $U_0 = I_0 r$, то

$$\int_0^\infty (I_0 - i)dt = \frac{1}{r}\int_0^{\Psi_0} d\Psi = \frac{\Psi_0}{r},$$

т. е. площадь на рис. 22.23, ограниченная кривой $i(t)$ или $i = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_0'}}\right)$, осью ординат и горизонтальной линией I_0, не зависит от закона изменения тока во времени.

Потокосцепление возрастает значительно быстрее, чем при $L = L_0' = \text{const}$, и практически к моменту времени $t \approx 0{,}25$ с принимает свое установившееся значение Ψ_0.

22.10. Аналитический метод расчета переходных процессов, основанный на приближенном аналитическом выражении характеристики нелинейного элемента

Исследуем аналитическим методом задачу о замыкании накоротко катушки с ферромагнитным сердечником (рис. 22.24), рассмотренную в начале предыдущего параграфа методом графического интегрирования. Выразим приближенно кривую намагничивания (кривую *2* на рис. 22.17) *аналитически* в виде

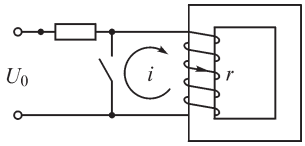


Рис. 22.24

$$i = a'(\Psi - \Psi_r) + b'(\Psi - \Psi_r)^{n+1}. \qquad (*)$$

Для краткости записи обозначим

$$\Psi - \Psi_r = \psi; \quad \Psi_0 - \Psi_r = \psi_0; \quad \frac{\Psi - \Psi_r}{\Psi_0 - \Psi_r} = \frac{\psi}{\psi_0} = x.$$

При этом уравнение кривой, замещающей кривую намагничивания, запишется в виде

$$i = ax + bx^{n+1}, \qquad (**)$$

где $a = a'\psi_0$ и $b = b'\psi_0^{n+1}$ измеряются в амперах. Сделав подстановку $x = \sqrt[n]{a/b}\,y$, приведем уравнение к виду

$$i = a\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\,y + a\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\,y^{n+1} = Ay(1+y^n), \text{ где } A = a\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{d\Psi}{dt} + ri = 0,$$

описывающее процесс в цепи, соответственно принимает вид

$$\frac{d\Psi}{dt} + rAy(1+y^n) = 0,$$

или, так как $\psi = x\psi_0 = \psi_0\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\,y = \psi_0\frac{A}{a}y$, то

$$\frac{dy}{dt} + \frac{ar}{\psi_0}y(1+y^n) = 0,$$

откуда

$$-\frac{dy}{y(1+y^n)} = \frac{ar}{\psi_0}dt. \qquad (***)$$

Это уравнение легко интегрируется, так как

$$-\int\frac{dy}{y(1+y^n)} = \frac{1}{n}\ln(1+y^{-n}) + C,$$

что легко проверить дифференцированием.

При изменении времени от 0 до t потокосцепление изменяется от Ψ_0 до Ψ. Соответственно x изменяется от 1 до $x = \frac{\psi}{\psi_0} = \frac{\Psi - \Psi_r}{\Psi_0 - \Psi_r}$, а y изменяется от $\sqrt[n]{b/a}$ до $\sqrt[n]{b/a}\,x$.

Интегрируя в этих пределах уравнение (***), получаем

$$\frac{1}{n}\Big|\ \ln\,(1+y^{-n})\ \Big|_{\sqrt[n]{b/a}}^{\sqrt[n]{b/a}\frac{\psi}{\psi_0}} = \frac{ar}{\psi_0}t \text{ или } \ln\left\{\frac{1+\frac{a}{b}\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^{-n}}{1+\frac{a}{b}}\right\} = n\frac{ar}{\psi_0}t.$$

Следовательно,

$$\frac{a}{b}\left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^{-n} = \left(1+\frac{a}{b}\right)e^{\frac{nar}{\psi_0}t} - 1$$

и окончательно

$$\psi = \frac{\Psi_0}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{b}{a}\right)e^{\frac{nar}{\Psi_0}t} - \frac{b}{a}}} - 1. \qquad (****)$$

Зависимость $\Psi = F(i)$ для рассматриваемой катушки (кривая *2* на рис. 22.17) хорошо удовлетворяется, если принять в уравнении (*) $n = 6$, a' 0,21 А/Вб и b' 1,45 А/Вб^7, т. е. если выразить кривую *2* на рис. 22.17 уравнением

$$i = 0{,}21\psi + 1{,}45\psi^7.$$

Кривая замещения, соответствующая этому уравнению, изображена на рис. 22.17 штриховой линией. При этих числовых значениях коэффициентов имеем

$$\psi_0 = \Psi_0 - \Psi_r = 0{,}9\,\text{Вб}; \quad \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}\psi_0^n = \frac{1{,}45}{0{,}21}0{,}9^6 = 3{,}67;$$

$$\frac{nar}{\Psi_0} = na'r = 6\cdot 0{,}21\cdot 8{,}5 = 10{,}7\ 1/\text{с}.$$

Искомое решение имеет вид

$$\psi = \frac{0{,}9}{\sqrt{4{,}67e^{10{,}7t} - 3{,}67}}\,\text{Вб}.$$

На рис. 22.20 нанесены на кривой $\Psi(t)$ кружками точки, вычисленные по этому уравнению. Точки отлично ложатся на кривую $\Psi(t)$, построенную графически, что объясняется хорошим совпадением кривой, выражаемой уравнением i $0{,}21\psi + 1{,}45\psi^7$, с действительной нисходящей кривой намагничивания $\Psi = F(i)$, т. е. удачным подбором аналитического выражения последней.

Достоинство аналитического метода заключается в том, что найденное общее выражение (****) для потокосцепления $\psi = \Psi - \Psi_r$ дает возможность рассмотреть влияние на ход кривой $\Psi(t)$ различных параметров: b, a, n, r, Ψ_0, Ψ_r.

Можно было бы получить аналитическим путем результат для случая включения той же катушки под действие постоянного напряжения (см. рис. 22.21), подобрав аналитическое выражение для кривой намагничивания (кривая *1* на рис. 22.17). Новым и осложняющим решение фактором является теперь наличие в уравнении постоянного члена ($U_0 \neq 0$). Ограничимся только указанием возможного общего пути такого решения, так как он относится к любым нелинейным уравнениям первого порядка, описывающим процесс в той или иной электрической цепи при постоянном напряжении на ее зажимах.

Выразим $i = F(\Psi)$ в виде ряда

$$i = a_0 + a_1\Psi + a_2\Psi^2 + \ldots + a_k\Psi^k + \ldots = \sum_{k=0}^{n} a_k\Psi^k.$$

В частном случае (кривая *1* на рис. 22.17) $a_0 = 0$, но вообще это не обязательно. Для рассматриваемого примера имеем

$$U_0 - ri = U_0 - r\sum_{k=0}^{n} a_k \Psi^k = G(\Psi).$$

Уравнение цепи $d\Psi/dt + ri = U_0$ можно написать в виде

$$\frac{d\Psi}{G(\Psi)} = dt \quad \text{или} \quad \int_{\Psi_0}^{\Psi} \frac{d\Psi}{G(\Psi)} = t - t_0,$$

где Ψ_0 — значение Ψ при $t = t_0$.

Если полином $G(\Psi)$ не имеет кратных корней, то, разлагая $1/G(\Psi)$ на простые дроби, получим

$$\int_{\Psi_0}^{\Psi} \frac{d\Psi}{G(\Psi)} = \sum_{s=1}^{s=n} \int_{\Psi_0}^{\Psi} \frac{A_s d\Psi}{(\Psi - \Psi_s)} = \sum_{s=1}^{s=n} A_s \ln \frac{\Psi - \Psi_s}{\Psi_0 - \Psi_s},$$

где Ψ_s — корни уравнения $G(\Psi) = 0$, а постоянные A_s определяются следующим образом:

$$A_s = \frac{1}{G'(\Psi_s)} \quad \text{и} \quad G'(\Psi_s) = \left[\frac{dG(\Psi)}{d\Psi}\right]_{\Psi=\Psi_s}.$$

Задаваясь значениями Ψ, нетрудно найти соответствующие им значения t.

Чем больше членов возьмем в выражении $i = \sum_{k=0}^{n} a_k \Psi^k$, тем точнее удается представить аналитически заданную нелинейную характеристику элемента цепи, но тем более громоздким оказывается решение. При этом основная трудность заключается в отыскании корней уравнения $G(\Psi) = 0$ при высоком его порядке. Избежать наличия кратных корней всегда возможно, так как выражение $i = \Sigma a_k \Psi^k$ выбираем сами. Изложенное ценно тем, что дает общую методику решения подобных задач.

В конкретных случаях часто оказывается более целесообразным выразить $i = F(\Psi)$ не в виде ряда, а с помощью той или иной подходящей элементарной функции, которая позволяет сравнительно просто взять интеграл $\int_{\Psi_0}^{\Psi} \frac{d\Psi}{G(\Psi)}$.

22.11. Метод последовательных интервалов для расчета переходных процессов в нелинейной цепи

Для иллюстрации метода последовательных интервалов произведем расчет этим методом задачи о включении катушки с ферромагнитным сердечником под действие постоянного напряжения U_0 (см. рис. 22.21), исследованной в предыдущих параграфах другими методами.

Разобьем промежуток времени, в течение которого рассматривается процесс, на достаточно большое число малых и равных друг другу интервалов Δt. Для оценки выбора величины Δt можно подсчитать по известным конечным значениям Ψ_0 и I_0 постоянную времени $\tau'_0 = L'_0/r = \Psi_0/(I_0 r)$, которая характеризовала бы процесс при $L = L_0 = \text{const}$. В данном случае $\tau'_0 = 1{,}1/(0{,}9 \cdot 8{,}5) = 0{,}144$ с. Выберем, соответственно, $\Delta t = h = 0{,}01$ с.

Пусть k — порядковый номер интервала. Индекс будем приписывать значениям всех величин в конце k-го интервала. Тогда их значения в начале k-го интервала, равные их значениям в конце предыдущего интервала, будут иметь индексы $k - 1$.

Дифференциальное уравнение цепи

$$\frac{d\Psi}{dt} = U_0 - ri = f(\Psi)$$

приближенно запишем в виде

$$(\Delta\Psi)_k = \Psi_k - \Psi_{k-1} \approx (U_0 - ri_{k-1})\Delta t \quad \text{или} \quad \Psi_k = \Psi_{k-1} + hf(\Psi_{k-1}).$$

В начале первого интервала $k = 1$, т. е. при $t = 0$ имеем

$$\Psi_{k-1} = \Psi_0 = 0; \quad i_{k-1} = i_0 = 0.$$

Следовательно, для первого интервала

$$(\Delta\Psi)_1 = \Psi_1 = U_0\Delta t = U_0 h.$$

Ток i_1 получаем из кривой намагничивания (кривая *1* на рис. 22.17) по найденному значению Ψ_1.

Приращение потокосцепления во втором интервале равно

$$(\Delta\Psi)_2 = \Psi_2 - \Psi_1 = (U_0 - ri_1)\Delta t.$$

Отсюда находим значение $\Psi_2 = \Psi_1 + (\Delta\Psi)_2$ и по нему из графика — ток i_2 и т. д.

Расчет для рассматриваемого нами конкретного примера приведен в таблице. Момент времени t_k к концу интервала, очевидно, равен $k\Delta t$.

k	t_k	$U_0 - ri_{k-1}$	$(\Delta$ $_k$	$_k$	i_k
1	0,01	7,65	0,0765	0,076	0,020
2	0,02	7,48	0,0748	0,151	0,036
3	0,03	7,34	0,0734	0,224	0,050
4	0,04	7,23	0,0723	0,296	0,067
5	0,05	7,08	0,0708	0,367	0,080
6	0,06	6,97	0,0697	0,437	0,100
7	0,07	6,80	0,0680	0,505	0,115
8	0,08	6,67	0,0667	0,572	0,130
9	0,09	6,55	0,0655	0,637	0,150
10	0,10	6,38	0,0638	0,701	0,170
11	0,11	6,21	0,0621	0,763	0,200
12	0,12	5,95	0,0595	0,822	0,230
13	0,13	5,70	0,0570	0,879	0,270
14	0,14	5,36	0,0536	0,933	0,325
15	0,15	4,90	0,0490	0,982	0,415

k	t_k	$U_0 - ri_{k-1}$	$(\Delta\ \ _k$	$_k$	i_k
16	0,16	4,13	0,0413	1,023	0,500
17	0,17	3,40	0,0340	1,057	0,605
18	0,18	2,50	0,0250	1,082	0,780
19	0,19	1,03	0,0103	1,092	0,850
20	0,20	0,45	0,0045	1,096	~0,9

На рис. 22.23 показаны кружками точки из таблицы. Эти точки хорошо ложатся на кривые, полученные методом графического интегрирования.

Метод последовательных интервалов, в принципе, должен обеспечивать тем большую точность, чем меньшими выбраны интервалы Δt. Однако при этом увеличивается количество вычислений, которые производятся с определенными погрешностями. Может оказаться, что погрешности будут нарастать, так как погрешность, допущенная при вычислении некоторой величины в каком-то интервале, отражается на значениях этой величины во всех последующих интервалах.

Действительно, из формулы $\Psi_k = \Psi_{k-1} + h(d\Psi/dt)_{k-1} = \Psi_{k-1} + hf(\Psi_{k-1})$ следует, что если функция $f(\Psi)$ — монотонно возрастающая (убывающая) функция времени, то эта формула дает заниженное (завышенное) значение Ψ_k, так как в интервале $(k-1)h < t < kh$ значение $f(\Psi)$ принимается неизменным и равным $f(\Psi_{k-1})$, в то время как в действительности $f(\Psi_k) > f(\Psi_{k-1})$ [$f(\Psi_k) < f(\Psi_{k-1})$]. Результирующая погрешность будет тем большей, чем больше число интервалов.

Для повышения точности метода последовательных интервалов следует повысить точность вычисления производной, например, корректируя ее значение в точке $k-1$. Определим новое значение производной как среднее арифметическое ее значений в точках $k-1$ и k:

$$\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)_{k-1} = f(\Psi_{k-1}) = \frac{1}{2}[f(\Psi_{k-1}) + f(\Psi_k)].$$

Тогда расчетная формула метода примет вид

$$\Psi_{k\,\text{кор}} = \Psi_{k-1} + \frac{h}{2}[f(\Psi_{k-1}) + f(\Psi_k)].$$

В новую формулу входит неизвестное еще значение $f(\Psi_k)$, которое можно прогнозировать, исходя из приближенного значения $\tilde{\Psi}_k$, вычисленного по обычной (без уточнения) формуле $\tilde{\Psi}_k = \Psi_{k-1} + hf(\Psi_{k-1})$. Тогда $f(\Psi_k) \approx f(\tilde{\Psi}_k)$. Эта формула дает неточное, прогнозируемое значение производной в точке k. Однако даже при этом описанный прием коррекции производной $(d\Psi/dt)_{k-1}$ позволяет повысить точность метода последовательных интервалов. Графически суть коррекции проиллюстрирована на рис. 22.25, где крестиком обозначено значение $\Psi_{1\,\text{кор}}$ после коррекции.

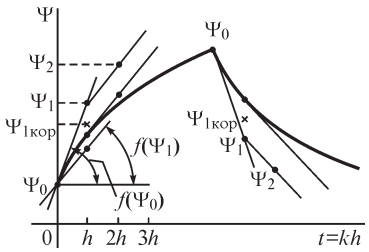


Рис. 22.25

В заключение необходимо отметить, что уменьшением шага Δt не только достигается более точный результат, но и устраняется неустойчивость процесса решения.

22.12. Метод расчета переходных процессов в нелинейной цепи, основанный на условной линеаризации уравнения цепи

Пусть в нелинейном дифференциальном уравнении, описывающем переходный процесс в цепи, член, содержащий коэффициент, зависящий от интенсивности процесса, имеет второстепенное значение по сравнению с другими членами уравнения, содержащими постоянные коэффициенты. Это значит, что максимальное значение этого члена в переходном процессе значительно меньше максимальных значений, достигаемых другими членами. В таком случае коэффициент при этом нелинейном члене приближенно может быть принят постоянным, равным некоторому среднему своему значению. Уравнение при этом становится линейным и может быть просто решено относительно искомой величины. Таким образом, этот метод основан на *условной линеаризации уравнения цепи*.

Применим этот метод к исследованию важного для практики случая включения катушки с ферромагнитным сердечником под синусоидальное напряжение. Уравнение цепи имеет вид

$$\frac{d\Psi}{dt} + ri = U_m \sin(\omega t + \psi).$$

Пусть член ri имеет второстепенное значение в указанном выше смысле по сравнению с членом $d\Psi/dt$. Такое условие соблюдается, например, при включении мощных ненагруженных во вторичной цепи трансформаторов, так как сопротивление r их обмоток обычно незначительно. Зависимость $\Psi = Li$ является нелинейной, так как L есть функция i. Если в уравнение подставить вместо Ψ его выражение через i, то уравнение относительно тока будет содержать нелинейность в главном члене. Если же выразить ток i через Ψ, то получим уравнение в виде

$$\frac{d\Psi}{dt} + \frac{r}{L}\Psi = U_m \sin(\omega t + \psi),$$

где нелинейный член $\frac{r}{L}\Psi$ является второстепенным и в нем можно приближенно принять $L = \text{const}$. Уравнение становится линейным и имеет решение

$$\Psi(t) = \Psi_m \sin(\omega t + \psi - \varphi) + Ae^{-\frac{r}{L}t}.$$

Если $\Psi(0) = 0$, то $A = -\Psi_m \sin(\psi - \varphi)$. Переходный процесс проявляется наиболее интенсивно при включении цепи в такой момент, когда начальная фаза напряжения ψ равна $\varphi \pm \pi/2$. Пусть $\psi = \varphi - \pi/2$. При этом $A = \Psi_m$ и $\Psi(t) = -\Psi_m \cos \omega t + \Psi_m e^{-\frac{r}{L}t}$.

На рис. 22.26, *а* приведены кривые потокосцепления $\Psi(t)$ и его составляющих $\Psi' = -\Psi_m \cos \omega t$ и $\Psi'' = \Psi_m e^{-\frac{r}{L}t}$. Мы видим, что при большой постоянной времени L/r по сравнению с периодом $T = 2\pi/\omega$ потокосцепление может достичь че-

рез полпериода почти удвоенного значения своей амплитуды Ψ_m. На рис. 22.26, *б* приведена нелинейная характеристика $\Psi = \varphi(i)$. При установившемся процессе амплитуда тока I_m, соответствующая амплитуде потокосцепления Ψ_m, имеет незначительную величину. Однако при увеличении потокосцепления до $2\Psi_m$ ток получает весьма большое значение вследствие нелинейности характеристики сердечника. На рис. 22.27 показано изменение тока i во времени в переходном процессе, которое может быть найдено, если воспользоваться полученным выше выражением для $\Psi(t)$ и зависимостью тока от потокосцепления (рис. 22.26, *б*).

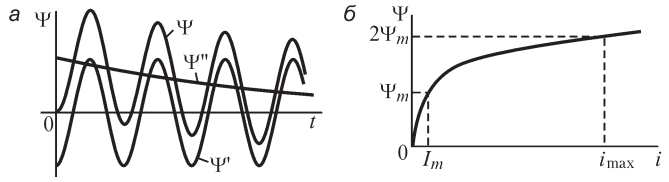


Рис. 22.26

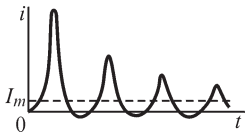


Рис. 22.27

Такой всплеск тока может вызвать механические разрушения обмотки, так как электродинамические усилия пропорциональны квадрату тока. Поэтому мощные ненагруженные трансформаторы включают через дополнительные сопротивления, которые затем замыкают накоротко.

Как было сказано выше, член ri можно считать второстепенным для достаточно больших катушек с ферромагнитным сердечником. Однако если бы мы стали рассматривать очень маленькую катушку с ферромагнитным сердечником, для которой r/L велико по сравнению с $1/T$, или рассмотрели бы случай, когда последовательно с катушкой в цепь включено большое активное сопротивление, то сделанное допущение могло бы оказаться несправедливым. Могло бы даже случиться, что второстепенным членом в вышеуказанном смысле оказалось слагаемое $d\Psi/dt$. В таком случае правильнее было бы принять $L = \text{const}$ в этом члене, т. е. написать

$$L\frac{di}{dt} + ri = U_m \sin(\omega t + \psi),$$

и, приняв приближенно $L = \text{const}$, найти $i(t)$ путем решения этого линейного уравнения. Кривую же $\Psi(t)$ при этом следовало бы найти, пользуясь вычисленной зависимостью $i(t)$ и кривой намагничивания $\Psi = F(i)$. При этом оказалось бы, что ток содержит экспоненту с наложенной на нее синусоидой, а полуволны кривой потокосцепления, при которых сердечник насыщается, имели бы уплощенный вид.

Характер изменения величины r/L ни в том, ни в другом случае нельзя считать несущественным, если интересоваться действительной скоростью перехода процесса от начального, имеющего место сразу после включения, к установившемуся. В этом отношении выполненное выше решение является весьма приближенным, так как остается неясным, какое значение L следует подставить в выражение $Ae^{-\frac{r}{L}t}$. Можно рекомендовать подставить один раз наибольшее

и другой раз наименьшее возможные значения, определяемые по кривой $\Psi = F(i)$. Этим путем определятся крайние пределы возможных процессов. Действительный процесс будет ближе к тому, который может быть рассчитан при некотором среднем значении L.

22.13. Изображение переходных процессов на фазовой плоскости

Пусть исследуемый процесс в цепи описывается линейным или нелинейным уравнением первого или второго порядка, причем коэффициенты уравнения не являются явными функциями времени. Рассмотрим случай замыкания таких цепей накоротко или включения их под действие постоянной ЭДС, т. е. случай, когда свободный член уравнения не зависит от времени. Для уяснения характера процесса при этом оказывается весьма полезным изобразить его на так называемой ф а з о в о й п л о с к о с т и. В этой плоскости одной из декартовых координат является изменяющаяся во времени величина $x(t)$, характеризующая исследуемый процесс, например ток в цепи $i(t)$, напряжение на конденсаторе $u_C(t)$, потокосцепление катушки $\Psi(t)$ и т. п. Другой координатой является производная от этой величины по времени $y = dx/dt$, например соответственно di/dt, du_C/dt, $d\Psi/dt$ и т. д.

Точка (x, y) на фазовой плоскости называется и з о б р а ж а ю щ е й т о ч к о й. Линия, которую вычерчивает на фазовой плоскости изображающая точка при протекании процесса во времени, называется ф а з о в о й т р а е к т о р и е й.

Значения x и $y = dx/dt$, т. е. положение изображающей точки на плоскости, вполне определяют состояние процесса в данный момент времени.

Заметим, что *в верхней полуплоскости* $y = dx/dt > 0$, т. е. x увеличивается и, следовательно, *изображающая точка движется слева направо. В нижней полуплоскости* $y < 0$, x убывает и *изображающая точка движется справа налево.*

Если имеем уравнение первого порядка ($ax' + bx + c = 0$ или, соответственно, $ay + bx + c = 0$), то каждому значению x соответствует определенное значение y, определяемое из этого уравнения. Следовательно, на фазовой плоскости процесс изображается одной определенной фазовой траекторией (прямой, если уравнение линейное, т. е. a, b и c не зависят от x, и кривой, если уравнение нелинейное, причем a, b, c суть однозначные функции от x или y). В виде примера на рис. 22.28 сплошной кривой изображена фазовая траектория для случая включения катушки с ферромагнитным сердечником, рассмотренного в § 22.9 и 22.10, под действие постоянного напряжения $U_0 = 7{,}65$ В, т. е. для случая, исследованного различными методами, причем в качестве переменной x принят ток i в катушке. Из уравнения цепи

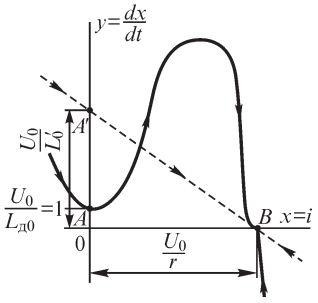


Рис. 22.28

$L_д \dfrac{di}{dt} + ri = U_0$ или, соответственно, $L_д y + rx = U_0$, где динамическая индуктивность $L_д = d\Psi/di = \varphi(i) = \varphi(x)$ находится по кривой намагничивания катушки

(кривая *1* на рис. 22.17), определяем для каждого значения x соответствующее ему значение y и строим по точкам фазовую траекторию. Точка B является точкой установившегося режима ($i = I_0 = U_0/r$), к которой стремится изображающая точка, перемещаясь по фазовой траектории. Положение точки B на оси x зависит от значения и знака U_0. Скорость движения изображающей точки по мере приближения ее к точке B замедляется, и теоретически точка B достигается только при $t = \infty$.

Штриховая кривая на рис. 22.28 изображает фазовую траекторию для катушки с тем же сопротивлением r = 8,5 Ом, но при постоянной индуктивности L_0' = 1,22 Гн, т. е. когда процесс описывается линейным уравнением.

Точки A и A' являются точками начала процесса при $t = 0$. В данном примере начальное значение тока $i = x = 0$. Если бы начальное значение тока было иное, то процесс начинался бы в других точках фазовых траекторий, но во всех случаях изображающая точка стремится по той же траектории к точке B установившегося режима. Изменения тока во времени, соответствующие кривым на рис. 22.28, представлены кривыми $i(t)$ (сплошной и штриховой) на рис. 22.23.

Если в качестве переменной x для той же задачи принять потокосцепление Ψ, то уравнение будет иметь вид $\frac{d\Psi}{dt} + \frac{r}{L_{\text{ст}}}\Psi = U_0$ или, соответственно, $y + \frac{r}{L_{\text{ст}}}x = U_0$, где статическая индуктивность $L_{\text{ст}} = \Psi/i = F(\Psi)$ находится также по кривой намагничивания (кривая *1* на рис. 22.17). На рис. 22.29 изображены фазовые траектории, дающие связь между потокосцеплением Ψ и скоростью его изменения $d\Psi/dt$ для той же катушки. Сплошная кривая соответствует нелинейной зависимости Ψ от i, а штриховая — линейной зависимости Ψ от i, т. е. предположению, что $L_0 = L_0' = \text{const}$. Соответствующие кривые зависимости Ψ от времени приведены на рис. 22.23.

Если процесс описывается уравнением второго порядка, то в зависимости от начальных условий $x(0) = x_0$ и $y(0) = y_0$ изображающая точка будет описывать ту или иную фазовую траекторию, проходящую через эту начальную точку. При этом ни одна фазовая траектория не пересекается с другой, так как во всех случаях в реальной электрической цепи процесс от любого его состояния протекает определенным образом. Фазовые траектории могут только сходиться или расходиться в некоторых точках, что будет видно из дальнейшего.

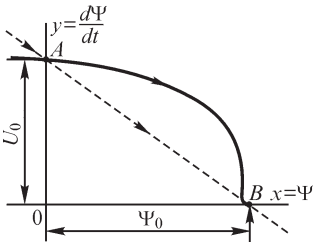


Рис. 22.29

Для лучшего уяснения вопроса рассмотрим сначала вид фазовых траекторий для уже изученных случаев разряда конденсатора на цепь r, L для линейной цепи (см. § 9.8, ч. II). Полагая в уравнении для тока в цепи $L\frac{d^2i}{dt^2} + r\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$, $i = x$ и $\frac{di}{dt} = \frac{dx}{dt} = y$, будем иметь

$$\frac{dy}{dt} + \frac{r}{L}y + \frac{1}{LC}x = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dt} = -\left(\frac{r}{L}y + \frac{1}{LC}x\right).$$

Разделив это уравнение на $dx/dt = y$, получаем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{r}{L}y + \frac{1}{LC}x}{y},$$

что и является уравнением фазовой траектории.

В случае когда $r = 0$, имеем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{LC}\frac{x}{y},$$

т. е.

$$y^2 + \frac{1}{LC}x^2 = A^2,$$

причем A^2 определяется начальными значениями $x(0) = x_0$ и $y(0) = y_0$. Таким образом, фазовая траектория является эллипсом с полуосями $A\sqrt{LC}$ и A. Так как при $x = x_{\max} = I_m$ имеем $y = 0$, то $A = I_m/\sqrt{LC} = y_{\max}$, где I_m — амплитуда тока, изменяющегося при $r = 0$ по синусоидальному закону (см. § 9.8). На рис. 22.30 приведены кривая тока $i(t)$ при $i(0) = 0$ и соответствующая ей фазовая траектория с начальной точкой A. При других начальных значениях тока и его производной изображающая точка будет также описывать эллипс, но в общем случае — с другими величинами полуосей. Все эти эллипсы охватывают точку M (в данном случае начало координат). Точка M, когда охватывающие ее фазовые траектории являются расположенными одна в другой замкнутыми кривыми, называется ц е н т р о м. В этом случае имеем устойчивые незатухающие колебания.

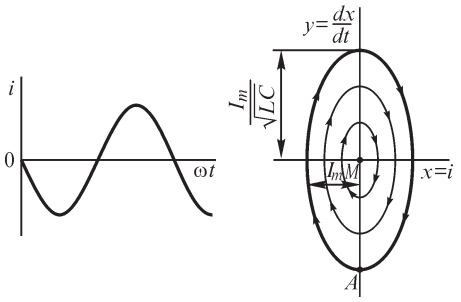


Рис. 22.30

Если $r \neq 0$, то разряд конденсатора будет либо затухающим колебательным при $r < 2\sqrt{L/C}$, либо апериодическим при $r > 2\sqrt{L/C}$. Кривые $i(t)$ для случая $i(0) = 0$ и соответствующие им фазовые траектории изображены на рис. 22.31 и 22.32.

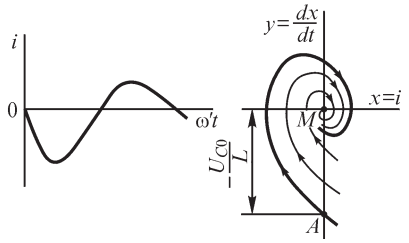


Рис. 22.31

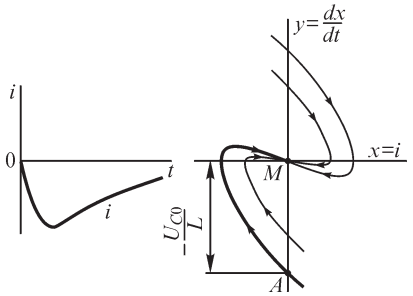


Рис. 22.32

В случае колебательного разряда ($r < 2\sqrt{L/C}$) фазовая траектория представляет собой свивающуюся к точке M спираль (см. рис. 22.31), причем каждому

витку спирали соответствует один период колебаний. Теоретически около точки M располагается бесконечно большое число витков спирали, соответствующее бесконечному числу колебаний с убывающими в одном и том же отношении амплитудами. Практически же процесс затухает в течение конечного промежутка времени. Точка M, к которой сходятся спирали фазовых траекторий, носит название устойчивого фокуса.

В случае $r > 2\sqrt{L/C}$ процесс будет апериодическим, ток не меняет своего знака и на фазовой траектории изображающая точка не совершает более одного полуоборота. Точка M такого типа носит наименование устойчивого узла.

Во всех случаях, изображенных на рис. 22.30–22.32, начальная точка A имеет координаты $x_0 = 0$ и $y_0 = (di/dt)_{t=0} = -U_{C0}/L$, где U_{C0} — начальное напряжение на конденсаторе, что вытекает из дифференциального уравнения цепи при условии $i(0) = 0$.

В рассмотренных случаях точки M являются точками устойчивого равновесия.

В нелинейных цепях, содержащих нелинейные элементы с падающими участками характеристик, как было показано в § 22.5, могут иметь место состояния как устойчивого, так и неустойчивого равновесия. Неустойчивое равновесие возможно также при наличии достаточной положительной обратной связи (см. § 22.6). В случае неустойчивого равновесия раз возникшее небольшое отклонение от положения равновесия в дальнейшем возрастает. При этом возможен случай апериодического перехода в другие устойчивые состояния равновесия или случай нарастания автоколебаний в цепи до некоторого устойчивого значения амплитуды колебаний, примером чего является транзисторный генератор (см. § 22.6). В обоих случаях новое устойчивое состояние или, соответственно, устойчивый периодический автоколебательный процесс определяются нелинейностью характеристик элементов цепи.

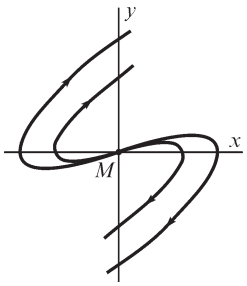


Рис. 22.33

При апериодическом процессе точке неустойчивого равновесия соответствует на фазовой плоскости точка M, называемая неустойчивым узлом (рис. 22.33). В этом случае расходящиеся от точки M фазовые траектории приходят в устойчивые узлы, не показанные на рисунке. При колебательном процессе это будет неустойчивый фокус (рис. 22.34). В этом случае расходящиеся от точки M спирали фазовых траекторий все свиваются к замкнутой кривой, называемой предельным циклом (рис. 22.34), который и соответствует установившимся автоколебаниям. Если, согласно начальным условиям, начальная точка окажется вне предельного цикла, то фазовая траектория, свиваясь, приходит также к этому предельному циклу.

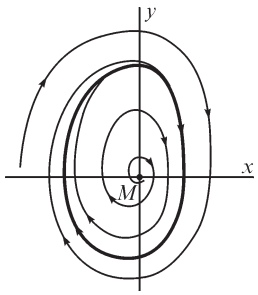


Рис. 22.34

Заметим, что хотя на фазовой траектории моменты времени, соответствующие точкам фазовой траектории, явно не фиксированы, однако они могут быть найдены методом, изложенным в следующем параграфе.

22.14. Метод изоклин для построения фазовых траекторий и расчета переходных процессов

Пусть процесс описывается уравнением второго порядка $F(x'', x', x) = 0$. Обозначая $dx/dt = y$, имеем $F(y', y, x) = 0$. Решая это уравнение относительно y', получаем

$$\frac{dy}{dt} = \varphi(y, x).$$

Разделив это последнее уравнение на $dx/dt = y$, находим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(y, x)}{y},$$

что представляет собой уравнение фазовой траектории. Величина dy/dx есть тангенс угла наклона касательной к фазовой траектории в соответствующей точке. Если принять $dy/dx = k = \text{const}$, то уравнение $k = \ (y, x)/y$ определит собой кривую, пересекающую фазовые траектории в точках, в которых касательные к ним имеют одинаковые углы наклона. Такая кривая носит наименование и з о к л и н ы. Выбирая разные значения k, получаем семейство изоклин (рис. 22.35). Если теперь на каждой изоклине нанести достаточное число черточек, тангенс угла наклона которых к оси абсцисс равен соответствующему данной изоклине числу k, то при достаточном числе изоклин на плоскости чертежа легко провести из данной начальной точки фазовую траекторию. Для этого только следует стремиться, чтобы она пересекала изоклины под углами, указанными черточками, нанесенными на изоклины.

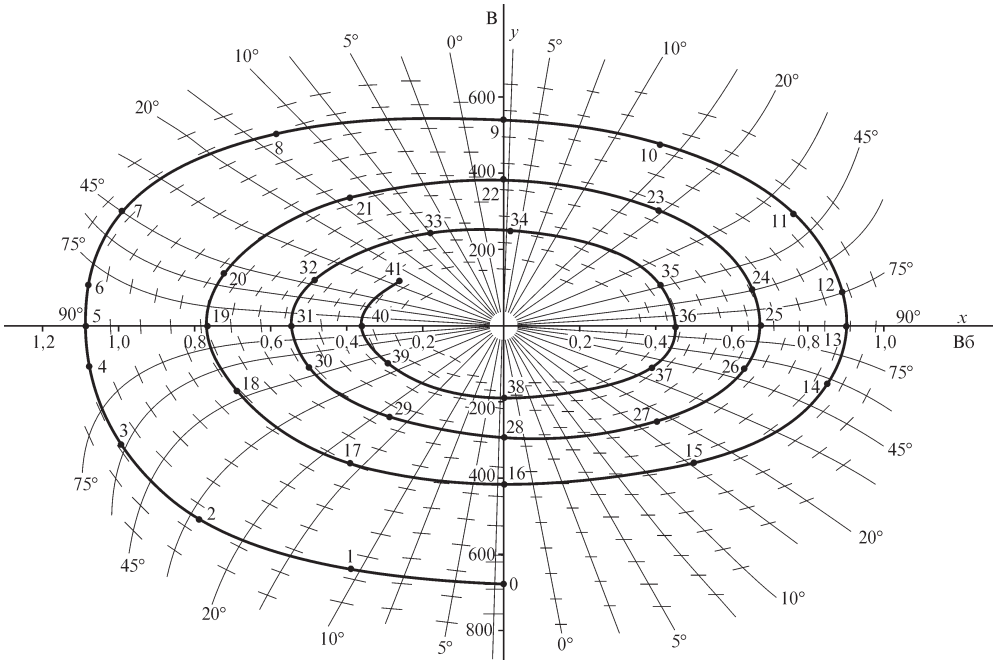


Рис. 22.35

Исследуем этим методом разряд конденсатора на цепь, состоящую из катушки с ферромагнитным сердечником и участка с сопротивлением. Пусть емкость конденсатора C 1 мкФ и сопротивление цепи, включая и сопротивление обмотки катушки, $r = 200$ Ом. Возьмем катушку, рассмотренную в § 22.9 (см. рис. 22.18), и, пренебрегая явлением гистерезиса, будем считать, что кривая намагничивания как при возрастании, так и при убывании тока изображается кривой *1* на рис. 22.17.

Дифференциальное уравнение цепи имеет вид

$$\frac{d\Psi}{dt} + ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + u_C(0) = 0$$

или

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + r\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0.$$

В данном случае удобнее принять в качестве координаты x на фазовой плоскости значение потокосцепления Ψ. Соответственно, уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + r\frac{di}{d\Psi}\frac{d\Psi}{dt} + \frac{1}{C}\frac{i}{\Psi}\Psi = 0.$$

Величины $d\Psi/di = L_д$ и $\Psi/i = L_{ст}$ — динамическая и статическая индуктивности, являющиеся функциями Ψ, определяемыми из кривой намагничивания. Полагая $\Psi = x$ и $d\Psi/dt = y$, запишем уравнение в форме

$$y' + \frac{r}{L_д}y + \frac{1}{CL_{ст}}x = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dt} = -\left(\frac{r}{L_д}y + \frac{1}{CL_{ст}}x\right).$$

Разделив последнее уравнение на $dx/dt = y$, получим уравнение фазовой траектории

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{r}{L_д}y + \frac{1}{CL_{ст}}x}{y}.$$

Полагая $dy/dx = k$, находим уравнение изоклины

$$y = -\frac{x}{CL_{ст}(k + r/L_д)},$$

где $L_{ст} = F_1(x)$ и $L_д = F_2(x)$.

Задаваясь рядом значений $x = \Psi$, вычисляем из последнего уравнения y и по точкам строим изоклину для данного k. На рис. 22.35 построены изоклины для данной конкретной задачи, около изоклин помечены соответствующие им значения угла $\alpha = \operatorname{arctg} k$ наклона касательных к фазовой траектории. Под этим углом нанесены черточки, пересекающие изоклину, и по ним проведена фазовая траектория для начальных значений $U_C(0) = 680$ В и $\Psi(0) = 0$. По характеру фазовой траектории видно, что разряд имеет колебательный характер.

Для построения кривой $\Psi(t)$ необходимо определить моменты времени, соответствующие точкам фазовой траектории. Промежуток времени Δt, в течение

которого совершается переход от ν-й точки (x_ν, y_ν) фазовой траектории к близкой к ней (ν + 1)-й точке ($x_{\nu+1}$, $y_{\nu+1}$), можно приближенно определить следующим образом. Так как $y = \dfrac{dx}{dt}$, то $\Delta t = \int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \dfrac{1}{y}\,dx$. Обозначая $\dfrac{1}{y} = f(x)$, имеем по теореме о среднем $\Delta t = f(\xi)(x_{\nu+1} - x_\nu) = f(\xi)\,\Delta x$, где $x_\nu < \xi < x_{\nu+1}$. При небольшом интервале Δt и монотонном изменении y в этом интервале можно принять $f(\xi) \approx \dfrac{1}{y_{\text{ср}}}$, где $y_{\text{ср}} = \dfrac{y_\nu + y_{\nu+1}}{2}$. При этом имеем

$$\Delta t \approx \frac{\Delta x}{y_{\text{ср}}}.$$

Если рассматриваемый участок фазовой траектории является отрезком прямой с тангенсом угла наклона к оси абсцисс $\dfrac{dy}{dx} = k = \dfrac{y_{\nu+1} - y_\nu}{x_{\nu+1} - x_\nu}$, то $dt = \dfrac{dx}{dy}\dfrac{dy}{y} = \dfrac{1}{k}\dfrac{dy}{y}$ и, следовательно,

$$\Delta t = \int\limits_{y_\nu}^{y_{\nu+1}} \frac{1}{k}\frac{dy}{y} = \frac{1}{k}\ln\frac{y_{\nu+1}}{y_\nu}.$$

Если рассматриваемый участок фазовой траектории является дугой окружности, имеющей центр на оси абсцисс, то Δt вычисляется следующим образом. Выразим координаты точек этой дуги окружности в виде $x = R\cos\varphi + x_0$, $y = R\sin\varphi$, где x_0 — координата центра окружности, R — радиус окружности и φ — угол между осью абсцисс и направлением радиуса, проведенного в точку (x, y) дуги. Получаем

$$\Delta t = \int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \frac{dx}{y} = -\int\limits_{\varphi_\nu}^{\varphi_{\nu+1}} d\varphi = \Delta\varphi,$$

где Δφ — центральный угол рассматриваемой дуги.

В случае, если отрезок фазовой траектории близко совпадает с отрезком прямой, то приближенно можно воспользоваться формулой $\Delta t = \dfrac{1}{k}\ln\dfrac{y_{\nu+1}}{y_\nu}$, за исключением случаев, когда $y_\nu = 0$ или $y_{\nu+1} = 0$, а также когда $y_{\nu+1} = y_\nu$. В последнем случае хороший результат дает формула $\Delta t = \Delta x / y_{\text{ср}}$.

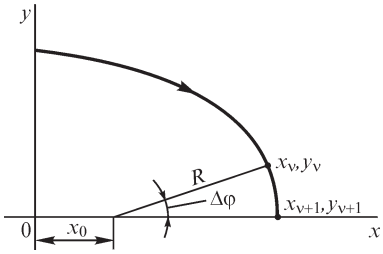


Рис. 22.36

Если отрезок фазовой траектории близко совпадает с дугой окружности, имеющей центр на оси абсцисс, то приближенно можно воспользоваться формулой $\Delta t = \Delta\varphi$. В частности, этой формулой рекомендуется пользоваться для случаев, когда $y_\nu = 0$ или $y_{\nu+1} = 0$ (рис. 22.36). Заметим, что в этом последнем случае величины Δt, вычисленные по формулам $\Delta t = \Delta x / y_{\text{ср}}$ и $\Delta t = \Delta\varphi$, отличаются меньше чем на 1 % при $\Delta\varphi \le 20°$.

Вычисляя промежутки времени, соответствующие последовательным отрезкам фазовой траектории, легко построить кривую $\Psi(t)$, что и сделано на рис. 22.37. На этом же рисунке построена кривая $i(t)$, причем значения тока брались из кривой намагничивания (см. рис. 22.17) по соответствующим значениям потокосцепления Ψ.

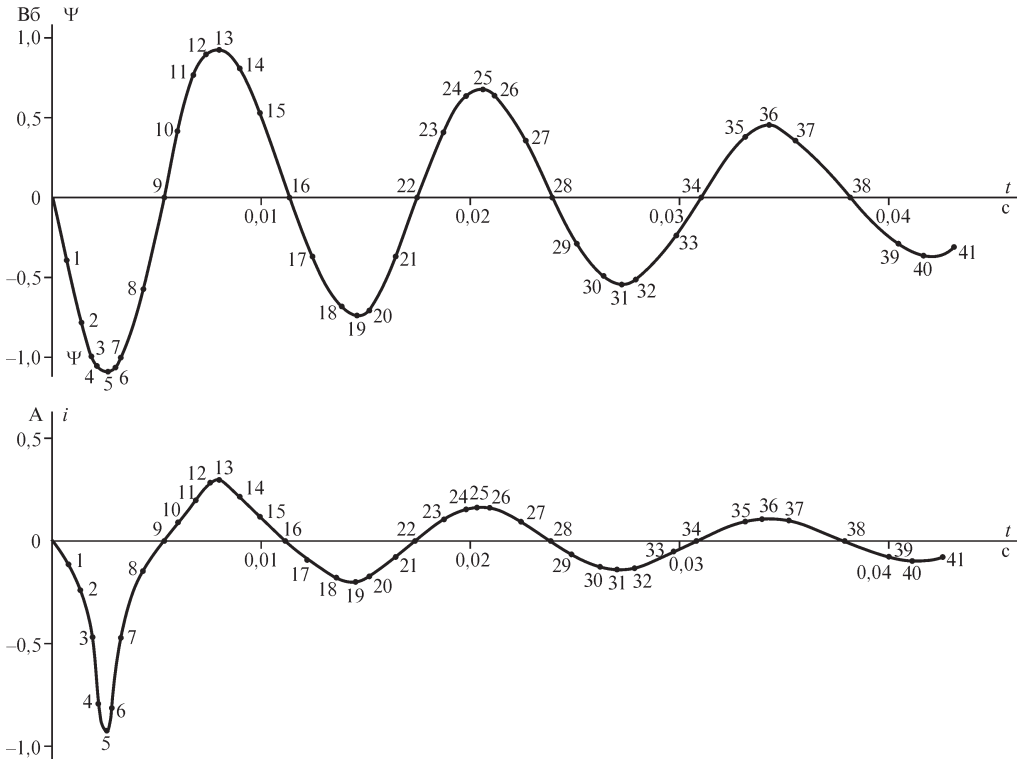


Рис. 22.37

Рассмотренное в настоящем и предыдущем параграфах изображение переходных процессов на фазовой плоскости дает возможность наглядно обозреть весь характер этих процессов. Этот метод применим в случаях, когда процесс описывается уравнениями первого или второго порядка со свободным членом, не зависящим от времени. Особенно ценным является то, что здесь открываются новые возможности расчета переходных процессов в нелинейных цепях.

22.15. Метод медленно меняющихся амплитуд — метод Ван-дер-Поля

Во многих нелинейных колебательных электрических цепях при установившемся режиме изменение во времени тока в колебательном контуре весьма близко к синусоидальному. Это означает, что в уравнении члены, содержащие нелинейные коэффициенты, малы по сравнению с остальными членами. В таких случаях может быть применен так называемый м е т о д м е д л е н н о м е н я ю щ и х с я

а м п л и т у д, называемый также методом Ван-дер-Поля. Далее этот метод будет изложен на примере анализа тока в колебательном контуре лампового генератора и напряжения на сетке лампы, пропорционального производной от этого тока во времени (рис. 22.38). Нетрудно убедиться в том, что уравнение для тока в колебательном контуре имеет вид, аналогичный полученному в § 22.6 уравнению для тока в контуре транзисторного генератора

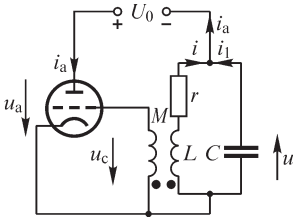


Рис. 22.38

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\delta \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{I_0 + SDU_0}{LC},$$

где $2\delta = S\dfrac{M + DL}{LC} + \dfrac{r}{L}$ и $\omega_0^2 = \dfrac{1 + rSD}{LC}$, S — крутизна характеристики, D — проницаемость лампы (см. § 19.8), I_0, U_0 — величины, определяющие состояние лампы при отсутствии колебаний.

Учитывая, что $rSD \ll 1$ вследствие применения в генераторах контуров с высокой добротностью, примем $\omega_0^2 = 1/(LC)$. Нам будет удобнее рассматривать напряжение u_c на сетке лампы, равное $u_c = -M\dfrac{di}{dt}$. Дифференцируя уравнение для i и умножая на $(-M)$, получим

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\delta \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0. \qquad (*)$$

Нелинейным является член $2\delta \dfrac{du_c}{dt}$, так как наклон характеристики S зависит от u_c и, следовательно, $2\delta \dfrac{du_c}{dt} = f(u_c, \dfrac{du_c}{dt})$. В ламповом генераторе этот член мал по сравнению с остальными членами, что вытекает из рассмотренных в § 22.6 условий возбуждения колебаний в ламповом генераторе. Вместе с тем этот член хотя и является малым, оказывает определяющее влияние на процесс возбуждения колебаний и на процесс нарастания и установления амплитуды колебаний.

При $\delta = 0$ имели бы место незатухающие синусоидальные колебания.

Наличие малого нелинейного члена $2\delta \dfrac{du_c}{dt}$ приводит к тому, что и установившиеся колебания будут немного отличаться от синусоиды. В процессе установления амплитуда A нарастает. Обычно скорость изменения амплитуды A и начальной фазы ψ настолько мала, что $dA/dt \ll A\omega_0$ и $d\psi/dt \ll \omega_0$, т. е. за период $T = 2\pi/\omega_0$ изменение ΔA амплитуды составляет малую долю самой амплитуды A и изменение $\Delta\psi$ начальной фазы много меньше 2π. Величину u_c при этом можно записать в виде

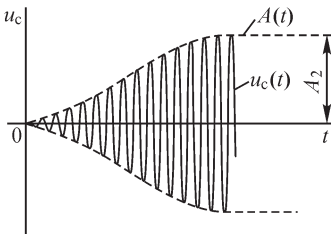


Рис. 22.39

$$u_c = A(t)\cos[\omega_0 t + \psi(t)] = A\cos(\omega_0 t + \psi).$$

Здесь как $A = A(t)$, так и $\psi = \psi(t)$ являются *медленно меняющимися* во времени величинами. При этих условиях кривая $A(t)$ определяет собой огибающую кривой $u_c(t)$ (рис. 22.39).

Скорость изменения напряжения u_c на сетке равна

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{dA}{dt}\cos(\omega_0 t + \psi) - A\left(\omega_0 + \frac{d\psi}{dt}\right)\sin(\omega_0 t + \psi) \approx -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \psi).$$

Последнее приближение соответствует тому, что мы принимаем условие

$$\frac{dA}{dt}\cos(\omega_0 t + \psi) - A\frac{d\psi}{dt}\sin(\omega_0 t + \psi) = 0. \qquad (**)$$

Приняв такое условие, получаем

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} = \frac{d}{dt}[-\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \psi)] = -\omega_0 \frac{dA}{dt}\sin(\omega_0 t + \psi) -$$

$$-\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \psi) - \omega_0 A\frac{d\psi}{dt}\cos(\omega_0 t + \psi).$$

Подставляя в уравнение (*) значение $d^2 u_c/dt^2$ и u_c и замечая, что главные члены $\omega_0 A \cos(\omega_0 t + \psi)$ сокращаются, получаем уравнение для остающихся малых величин:

$$\frac{dA}{dt}\sin(\omega_0 t + \psi) + A\frac{d\psi}{dt}\cos(\omega_0 t + \psi) = \frac{2\delta}{\omega_0}\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{\omega_0} f\left(u_c, \frac{du_c}{dt}\right). \qquad (***)$$

Заметим, что сделанные нами приближения вносят определенную неточность в значения этих малых величин. В этом непосредственно можно убедиться, если составить величину $d^2 u_c/dt^2$, взяв производную от полного выражения du_c/dt. Однако эти малые величины незначительно изменяют величины u_c, du_c/dt и $d^2 u_c/dt^2$, и, следовательно, определенный таким образом процесс будет близок к истинному.

Из уравнений (**) и (***) определяются отдельно скорости изменения амплитуды и фазы. Умножаем эти уравнения, соответственно, на $\sin(\omega_0 t + \psi)$ и на $\cos(\omega_0 t + \psi)$; затем, складывая или вычитая полученные уравнения, находим

$$\left.\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{1}{\omega_0} f\left(u_c, \frac{du_c}{dt}\right)\sin(\omega_0 t + \psi); \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{1}{A\omega_0} f\left(u_c, \frac{du_c}{dt}\right)\cos(\omega_0 t + \psi). \end{aligned}\right\} \qquad (****)$$

Усредняя правую часть в интервале от t до $t + T$, мы вправе считать в пределах этого интервала величины A и ψ неизменяющимися и равными их значениям в момент t. Действительно, было сказано, что эти величины мало меняются в течение любого периода. В результате такого усреднения получим

$$\frac{1}{T}\frac{1}{\omega_0}\int_t^{t+T} f\left(u_c, \frac{du_c}{dt}\right)\sin(\omega_0 t + \psi)dt = \Phi(A);$$

$$\frac{1}{T}\frac{1}{A\omega_0}\int_t^{t+T} f\left(u_c, \frac{du_c}{dt}\right)\cos(\omega_0 t + \psi)dt = \Psi(A).$$

При выполнении операции интегрирования в соответствии со сказанным будем считать величины A и ψ постоянными, но в выражениях $\Phi(A)$ и $\Psi(A)$ величина A является функцией времени, равной своему значению в момент t в начале интервала усреднения.

В результате уравнения (****) после усреднения их правых частей приобретают вид

$$\frac{dA}{dt} = \Phi(A) \quad \text{и} \quad \frac{d\psi}{dt} = \Psi(A).$$

Решая эти уравнения, находим законы изменения во времени медленно меняющихся амплитуды и начальной фазы. Амплитуда в установившемся режиме определяется из условия, что $dA/dt = \Phi(A) = 0$.

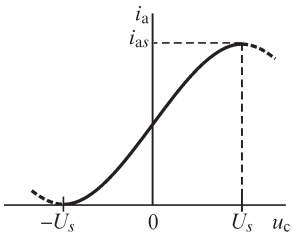


Рис. 22.40

Изображая процесс на фазовой плоскости (u_c, du_c/dt), получим в установившемся режиме замкнутый предельный цикл. Можно показать, что этот установившийся режим и соответствующий ему цикл являются устойчивыми, если $d\Phi(A)/dA < 0$ при значении A, соответствующем этому циклу, и неустойчивыми, если $d\Phi(A)/dA > 0$ при этом значении A.

Применим эти общие соображения к уравнению (*) лампового генератора. Пусть характеристика лампы $i_a = f(u_c)$ может быть аппроксимирована зависимостью

$$i_a = au_c^3 + bu_c + c,$$

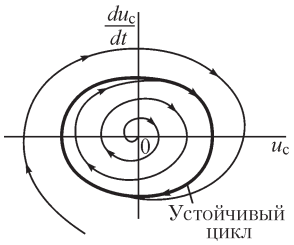


Рис. 22.41

причем коэффициенты a, b и c подобраны так, что вся кривая имеет вид, представленный на рис. 22.40, т. е. $a = -S_0/(3U_{cs}^2)$, $b = S_0$ и $c = i_{as}/2$, где S_0 — наклон характеристики при $u_c = 0$. Такая аппроксимация обеспечивает достаточно точное аналитическое выражение действительной характеристики лампы только в пределах $-U_{cs} \le u_c \le U_{cs}$. Наклон характеристики в любой ее точке в этих пределах получается равным

$$S = \frac{di_a}{du_c} = 3au_c^2 + b = S_0\left(1 - \frac{u_c^2}{U_{cs}^2}\right).$$

Таким образом, малый нелинейный член уравнения имеет вид

$$f\left(u_c, \frac{du_c}{dt}\right) = 2\delta\frac{du_c}{dt} = \left[S\left(\frac{M + DL}{LC}\right) + \frac{r}{L}\right]\frac{du_c}{dt} = (nu_c^2 - m)\frac{du_c}{dt},$$

где

$$m = -\left(S_0\frac{M + DL}{LC} + \frac{r}{L}\right); \quad n = -\frac{S_0}{U_{cs}^2}\frac{M + DL}{LC}.$$

Отметим, что $n > 0$ и $m > 0$ из условия самовозбуждения $\delta < 0$.

Теперь, учитывая что мы приняли закон изменения напряжения на сетке в виде $u_c = A\cos(\omega_0 t + \psi)$ и $du_c/dt = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \psi)$, где A и ψ — *медленно меняющиеся* величины, получаем

$$\Phi(A) = \frac{1}{T}\frac{1}{\omega_0}\int_t^{t+T}(nu_c^2 - m)\frac{du_c}{dt}\sin(\omega_0 t + \psi)dt =$$

$$= \frac{1}{T}\frac{1}{\omega_0}\int_t^{t+T}[nA^2\cos^2(\omega_0 t + \psi) - m][-\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \psi)] \times$$

$$\times \sin(\omega_0 t + \psi)dt = +\frac{m}{2}A - \frac{n}{8}A^3 = \frac{A}{2}\left(m - \frac{n}{4}A^2\right).$$

Таким образом, уравнение для *медленно меняющейся амплитуды* имеет вид

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A}{2}\left(m - \frac{n}{4}A^2\right).$$

Состояния равновесия имеют место при $A = \text{const}$ или при $dA/dt = 0$, т. е. при $A = A_1 = 0$ и при $A = A_2 = 2\sqrt{m/n}$.

Первое значение амплитуды $A_1 = 0$ соответствует отсутствию колебаний. Это состояние неустойчиво. Действительно, при появлении вследствие случайного толчка колебаний даже с любой малой амплитудой $A_0 \neq 0$ получаем $dA/dt > 0$, так как $m > 0$ и $\left(m - \frac{n}{4}A_0^2\right) > 0$ при малом A_0. Соответствующая точка $u_c = 0$ и $du_c/dt = 0$ (начало координат) на фазовой плоскости является неустойчивым фокусом (рис. 22.41). Нарастание амплитуды возникших колебаний будет происходить до тех пор, пока снова величина dA/dt не станет равной нулю. Это будет при $A = A_2$, когда $\left(m - \frac{n}{4}A_2^2\right) = 0$. Легко заметить, что такое состояние является устойчивым, так как при $A < A_2$ имеем $dA/dt > 0$ и амплитуда возрастает, а при $A > A_2$ будет $dA/dt < 0$ и амплитуда убывает. Соответствующий предельный цикл на фазовой плоскости будет устойчивым, т. е. при любых отклонениях от этого цикла фазовые траектории свертываются к нему (см. рис. 22.41).

Подставляя в формулу для A_2 выражения для m и n, получаем соотношение, связывающее амплитуду установившихся колебаний с параметрами характеристики лампы и колебательного контура:

$$A_2 = 2U_{cs}\sqrt{1 + \frac{rC}{S_0(M + DL)}} = 2U_{cs}\sqrt{1 - \frac{rC}{S_0|M + DL|}}.$$

Уравнение $\frac{dA}{dt} = \frac{A}{2}\left(m - \frac{n}{4}A^2\right)$ позволяет определить не только установившуюся амплитуду колебаний, но и весь переходный процесс от начального толчка $A = A_0$ при $t = 0$ до установления амплитуды A_2. Подстановкой $x = A^{-2}$ приведем это уравнение к виду $dx/dt + mx_0 = n/4$. Решение этого уравнения имеет вид

$$x = \frac{n}{4m} + ce^{-mt} = \frac{1}{A_2^2} + ce^{-mt} \quad \text{или} \quad A = \frac{A_2}{\sqrt{1 + cA_2^2 e^{-mt}}}.$$

Произвольную постоянную c определим из условия, что $A = A_0$ при $t = 0$. Получаем $c = (1/A_0^2 - 1/A_2^2)$.

Если $m < 0$, т. е. если $\delta > 0$, то условия самовозбуждения не обеспечены и при случайном возникновении малых колебаний с амплитудой $\Delta A \neq 0$ получаем $dA/dt < 0$. Следовательно, раз возникшие колебания затухают. При этом на фазовой плоскости точка в начале координат является устойчивым фокусом.

22.16. Частотные свойства нелинейных цепей

В линейных электрических цепях в кривой тока возможны только те гармоники, которые содержатся в кривой ЭДС. В отличие от этого в нелинейной цепи в кривой тока появляются гармоники, не содержащиеся в кривой ЭДС.

Пусть ток и напряжение на зажимах нелинейной цепи в некоторых пределах их изменения связаны соотношением

$$i = au + bu^2.$$

Предположим, что $u = U_{1m} \sin \omega_1 t + U_{2m} \sin \omega_2 t$, причем ω_2 и ω_1 вообще не кратны друг другу. Подставим это выражение для u в формулу для i и заменим квадраты синусов выражениями через косинусы двойных углов, а произведение синусов — через косинусы разности и суммы углов. Тогда увидим, что в выражении для тока i, кроме постоянной составляющей и составляющих с частотами ω_1 и ω_2, появляются также составляющие с удвоенными частотами $2\omega_1$, $2\omega_2$ и составляющие с комбинационными частотами $\omega_1 - \omega_2$ и $\omega_1 + \omega_2$, т. е.

$$i = \frac{b}{2}(U_{1m}^2 + U_{2m}^2) + aU_{1m} \sin\omega_1 t + aU_{2m} \sin\omega_2 t - \frac{b}{2}U_{1m}^2 \cos 2\omega_1 t -$$
$$- \frac{b}{2}U_{2m}^2 \cos 2\omega_2 t + bU_{1m}U_{2m} \cos(\omega_1 - \omega_2)t + bU_{1m}U_{2m} \cos(\omega_1 + \omega_2)t.$$

Уже на этом простом примере наглядно видны особенности частотных свойств нелинейных цепей. Во-первых, среднее значение (постоянная составляющая) тока i зависит от амплитуды гармонических составляющих напряжения. Несмотря на то что кривая напряжения не содержит постоянной составляющей, в кривой тока в данном случае возникает постоянная составляющая, что является результатом несимметрии характеристики. Во-вторых, в кривой тока появляются гармоники с частотами более высокого порядка ($2\omega_1$, $2\omega_2$, $\omega_1 + \omega_2$) по сравнению с гармониками в кривой напряжения. В-третьих, в кривой тока возникают гармоники с комбинационными частотами ($\omega_1 - \omega_2$ и $\omega_1 + \omega_2$). Таким образом, в кривой тока появляется ряд новых гармоник с частотами, отличными от частоты гармоник в кривой напряжения. Это обстоятельство и дает возможность использовать нелинейные цепи для преобразования частоты, для модуляции и детектирования колебаний, что было рассмотрено ранее.

Если отношение ω_1 к ω_2 представляет собой рациональное число, то напряжение u есть периодическая функция. Если при этом $\omega_1/\omega_2 = n/m$, то период напря-

жения u будет равен $nT_1 = mT_2$. Если $\omega_1 > \omega_2$ и $\omega_1 - \omega_2$ имеет период, превышающий nT_1, то период тока окажется больше периода напряжения, что можно рассматривать как возникновение в кривой тока гармоник с частотой, меньшей частоты напряжения. Эти гармоники называют субгармониками.

Применяя приведенные рассуждения для нелинейных элементов, характеристики которых могут быть аппроксимированы полиномами более высоких порядков, придем к выводу, что в нелинейных цепях с подобными элементами возможны колебания, частоты которых заполняют широкий диапазон рациональных чисел.

Комбинационные колебания, в частности субгармоники, могут возникать и при действии на зажимах нелинейной цепи синусоидального напряжения, т. е. напряжения одной частоты. При этом напряжения на отдельных участках цепи с нелинейными элементами будут несинусоидальными, т. е. состоять из нескольких синусоидальных составляющих разных частот. Согласно вышеизложенному, в этом случае при надлежащих условиях могут возникать комбинационные колебания.

22.17. Значение нелинейных электрических цепей в современной технике

Все изложенное в настоящей части показывает исключительно широкие возможности, которые открываются при использовании нелинейных элементов для создания электрических цепей, обладающих самыми различными весьма важными для практики свойствами.

Мы видели, что, используя нелинейные элементы, можно осуществить стабилизаторы напряжения и тока, усилители мощности, модуляторы, генераторы незатухающих колебаний, выпрямители, инверторы и т. д. Рассмотренными примерами далеко не исчерпывается перечень возможных применений нелинейных элементов в электрических цепях. Так, например, очень важным является создание устройств для формирования импульсов напряжения различной формы, создание так называемых спусковых устройств — триггеров, в которых используется неустойчивое состояние и при плавном изменении входного напряжения происходит скачок напряжения или тока на выходе, создание на этой основе счетчиков импульсов и т. д.

Радиотехника, автоматика, телемеханика, электроизмерительная техника, техника электронных быстродействующих счетно-решающих и управляющих машин, электроэнергетика и другие области техники на современном этапе развития все шире используют особые свойства нелинейных цепей. Еще большие возможности открываются в этом направлении в будущем.

Вместе с тем явления в нелинейных системах представляют собой еще недостаточно разработанную и весьма интересную область для теоретических и экспериментальных исследований, хотя многое, как отмечалось, здесь уже сделано; причем весьма существенный вклад в решение нелинейных задач внесли русские ученые.

Вопросы, задачи и упражнения к главам 19–22

19.1. Параметры элементов нелинейных электрических цепей

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) Может ли ток в нелинейной электрической цепи содержать постоянную составляющую, если в ней действуют только периодические ЭДС?

2. При каком условии динамическое и дифференциальное сопротивления (проводимости) нелинейного элемента одинаковы?

3. (О) Справедливы ли соотношения: *а*) $r_{ст} = 0$; *б*) $r_д = 0$; *в*) $r_{ст} > 0$; *г*) $r_д > 0$; *д*) $r_{ст} < 0$; *е*) $r_д < 0$ для точек 0, *A*, *B*, *C*, *D* (рис. В19.1) характеристики нелинейного элемента?

4. (О) Для каких точек (0, *A*, *B*, *C*, *D*) изображенной на рис. В19.1 характеристики нелинейного элемента справедливы соотношения: *а*) $r_д > r_{ст}$; *б*) $r_д = r_{ст}$; *в*) $r_д < r_{ст}$?

5. Вид экспериментально полученной вольт-амперной характеристики нелинейного элемента зависит от частоты приложенного напряжения. Можно ли в этом случае утверждать, что нелинейный элемент является инерционным?

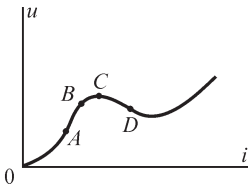


Рис. В19.1

6. Какие (большие или малые) значения динамических сопротивления $r_д$ и проводимости $g_д$ присущи нелинейным элементам, применяемым для стабилизации тока и напряжения, в области стабилизации?

7. (Р) Каким следует принять сопротивление резистора *r* в изображенной на рис. В19.2, *а* схеме для стабилизации напряжения $u_2 = 10$ В при $r_2 = 100$ Ом, $u_1 = 20$ В? Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента изображена на рис. В19.2, *б*.

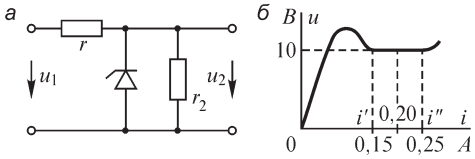


Рис. В19.2

8. (Р) В каком диапазоне изменения входного напряжения u_1 (в условиях предыдущего упражнения) напряжение u_2 на нагрузке остается неизменным? В каком диапазоне изменения сопротивления нагрузки r_2 напряжение на ней сохраняется постоянным?

19.2. Транзистор как элемент электрической цепи

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) Почему у биполярных транзисторов в схеме с общим эммитером коэффициент усиления по току меньше, чем у полевых?

2. (О) Какие основные допущения использованы при получении эквивалентных схем для малосигнального режима работы триода?

3. Почему входное сопротивление полевых транзисторов значительно больше входного сопротивления биполярных транзисторов?

4. (О) Почему коэффициент усиления по току транзистора для схемы с общей базой (см. рис. В19.3, *а*) значительно меньше, чем для схемы с общим эмиттером (рис. В19.3, *б*) или общим коллектором (рис. В19.3, *в*)?

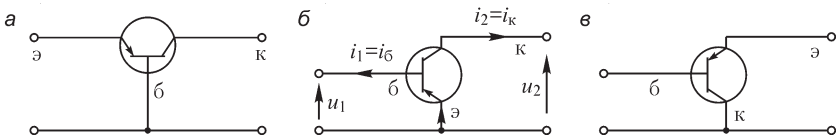


Рис. В19.3

5. (О) Выразите *h*-параметры транзистора в схеме с общим эммитером через параметры его эквивалентной схемы (см. рис. В19.4). Постройте эквивалентную схему транзистора, элементы которой выражены через *h*-параметры.

6. (Р) Выразите через *h*-параметры коэффициенты усиления по напряжению и току триода, нагрузка которого в цепи коллектора $r_н$, используя полученную при решении упр. 5 эквивалентную схему.

7. Заменяя триод его эквивалентной схемой (см. решение упр. 5), изобразите электрическую цепь для расчета усилителя (рис. В19.5) в режиме «малого» сигнала.

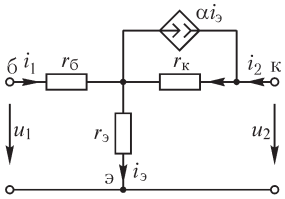


Рис. В19.4

Примечание. Емкости конденсаторов таковы, что их сопротивлением при частоте сигнала можно пренебречь. Источник ЭДС e_0 в режиме «малого» сигнала можно замкнуть накоротко, так как его внутреннее сопротивление равно нулю.

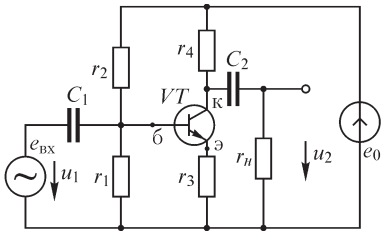


Рис. В19.5

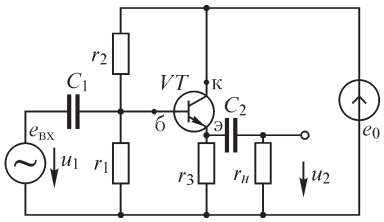


Рис. В19.6

8. (Р) Найдите коэффициенты усиления по напряжению и току усилителя, называемого эмиттерным повторителем (рис. В19.6), при работе триода в режиме «малого» сигнала, пренебрегая сопротивлением конденсаторов (см. прим. к упр. 7). Примите $r_1 = 5{\cdot}10^4$ Ом, $r_2 = 10^4$ Ом, $r_3 = 2{\cdot}10^3$ Ом, $r_н = 5{\cdot}10^3$ Ом, $h_{11} = 10^3$ Ом, $h_{12} = 10^{-4}$, $h_{21} = 10^2$, $h_{22} = 10^{-5}$ См.

9. (Р) Найдите коэффициенты усиления по напряжению и току усилителя (см. рис. В19.5) при условии, что параллельно резистору r_3 подключен конденсатор C_3, сопротивлением которого в режиме «малого» сигнала можно пренебречь.

10. (Р) Используя эквивалентную схему полевого транзистора (рис. В19.7, *а*), выразите его *Y*-параметры через крутизну $S = \Delta i_{c1}/\Delta u_{зи}$ и выходную проводимость $G = \Delta i_{c2}/\Delta u_{си}$, заданные в точке *A* его семейства характеристик $i_с = f(u_{си}, u_{зи})$ (рис. В19.7, *б*).

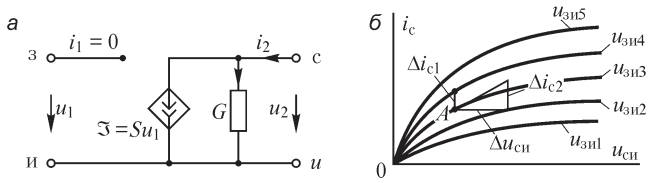


Рис. В19.7

11. (Р) Выразите коэффициент усиления напряжения полевого транзистора, сопротивление нагрузки которого равно $r_н$, через его параметры S, G.

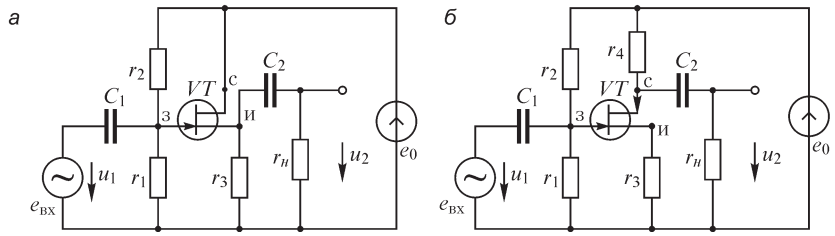


Рис. В19.8

12. (Р) Выразите коэффициент усиления напряжения (рис. В19.8) электрических цепей с полевыми транзисторами, работающими в режиме «малого» сигнала, через параметры элементов цепи и параметры S, G, заданные в рабочей точке характеристик триода.

19.3. Нелинейные свойства ферромагнитных материалов

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. На рис. В19.9 изображены статические гистерезисные петли трех ферромагнитных материалов. У какого из этих материалов: *а*) наибольшая (наименьшая) коэрцитивная сила; *б*) наибольшая (наименьшая) остаточная намагниченность; *в*) наибольшие (наименьшие) потери на перемагничивание?

Какой из материалов в большей степени подходит для изготовления постоянных магнитов? Могут ли гистерезисные петли *а* и *б* быть характеристиками одного и того же материала, полученными при различной частоте?

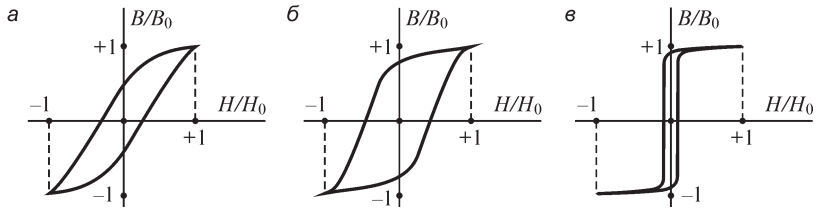


Рис. В19.9

2. Какие изменения претерпевает статическая петля гистерезиса при увеличении скорости перемагничивания?

3. Предложите способ размагничивания ферромагнитных материалов.

4. Предложите опыты, позволяющие разделить потери на гистерезис и на вихревые токи в сердечнике, выполненном из ферромагнитного материала.

5. На рис. В19.10 изображена характеристика $\Psi = F(i)$ катушки с ферромагнитным сердечником. Укажите на графике интервалы изменения тока, для которых выполняется неравенство $L_{ст} > L_д$. Постройте зависимости $L_{ст} = f(i)$, $L_д = f(i)$ и $\mu = f(i)$.

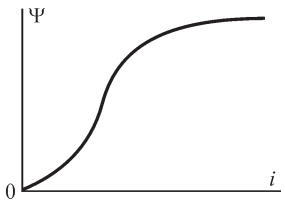


Рис. В19.10

6. Проводя аналогию между катушкой с ферромагнитным сердечником и конденсатором с нелинейной характеристикой, укажите характеризующие конденсатор величины, соответствующие коэрцитивной силе H_c, остаточной индукции B_r, магнитной проницаемости μ, напряженности магнитного поля H, магнитной индукции B, току i, потокосцеплению Ψ, индуктивности L.

19.4. Аппроксимация нелинейных характеристик

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) В чем заключаются недостатки кусочно-линейной аппроксимации нелинейных характеристик? Почему некоторые из них нельзя преодолеть, увеличивая число прямолинейных отрезков, аппроксимирующих нелинейную характеристику?

2. (О) Почему при расчетах нелинейных электрических цепей чаще используют не одну функцию, аппроксимирующую характеристику нелинейного элемента на всем рабочем участке, а несколько функций, которые аппроксимируют характеристику на нескольких отрезках?

3. (О) При кусочно-линейной аппроксимации характеристики $u_{нэ} = f(i_{нэ})$ на участке $i_{нэ,\,1} \ldots i_{нэ,\,n+1}$ с помощью n отрезков $u = a_k i + b_k$ (k — номер отрезка) число подлежащих определению коэффициентов составляет $2n$. Запишите условия, позволяющие их рассчитать.

4. (О) При сплайновой аппроксимации характеристики $u_{нэ} = f(i_{нэ})$ на n участках полиномами третьей степени $u = a_k i^3 + b_k i^2 + c_k i + d_k$ число искомых коэффициентов составляет $4n$. Запишите условия, из которых они могут быть рассчитаны.

20.1. Последовательное, параллельное и смешанное соединение нелинейных элементов электрических цепей

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) Какой вид должна иметь характеристика $u = F(i)$ нелинейного элемента (рис. В20.1), подключенного к источнику напряжения, чтобы значение тока зависело от способа установления напряжения: при его увеличении от 0 до u_0 ток принимал одно значение, а при уменьшении от $u_1 > u_0$ до u_0 — другое?

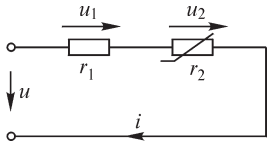


Рис. В20.1

2. (О) Какими должны быть напряжение u_0 на входе цепи (см. рис. В20.1) и сопротивление линейного резистора, чтобы при заданной характеристике $u_{нэ} = F(i)$ нелинейного элемента (рис. В20.2) состояние равновесия в цепи было не единственным?

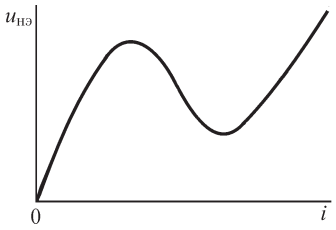


Рис. В20.2

3. (Р) Определите вид характеристики $u_1 = F(i_1)$ одного из двух параллельно соединенных нелинейных элементов, при которой зависимость $u = f(i)$ для всей цепи становится линейной. Характеристика второго нелинейного элемента задана выражением $u_2 = ki_2^2$.

4. Решите предыдущую задачу при условии, что нелинейные элементы соединены последовательно.

5. (О) Укажите операции, которые необходимо выполнить над заданными характеристиками нелинейных элементов в цепи (рис. В20.3) для построения зависимости $u_{вх} = f(i_1)$.

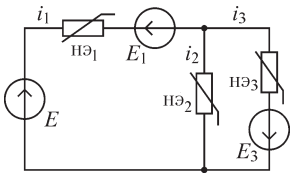


Рис. В20.3

6. Изобразите характеристику $u = F(i)$ схемы с параллельно соединенными нелинейным элементом ($u_{нэ} = ki_{нэ}^2$) и источником тока $\mathfrak{I}$.

7. Нелинейная характеристика диода D аппроксимирована отрезками прямых *1*, *2* (рис. В20.4, *а*). Постройте зависимость $i = f(u)$ цепи (рис. В20.4, *б*), принимая e_0 = const.

8. (Р) Постройте зависимость $i_{вх} = f(u)$ цепи (рис. В20.5), содержащей ветви с идеальными диодами. Примите $r_1 > r_2 > r_3$, $e_{01} < e_{02} < e_{03}$. При каких величинах r, e зависимость будет линейной?

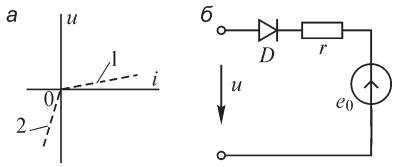


Рис. В20.4

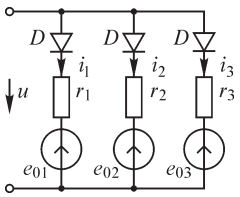


Рис. В20.5

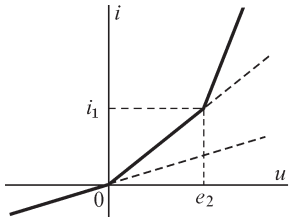


Рис. В20.6

9. (Р) Используя идеальные диоды, постройте электрическую цепь, характеристика $i = f(u)$ которой изображена на рис. В20.6.

20.2. Методы расчета нелинейных электрических цепей

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Для расчета тока в ветви с нелинейным элементом используют метод эквивалентного генератора, в котором применяется наложение двух режимов. Почему, несмотря на нелинейность электрической цепи, в этом случае возможно применение метода наложения?

2. (О) Выражение для тока нелинейного элемента $i = \dfrac{u_0}{r_г + r_{нэ}(i)}$, полученное методом эквивалентного генератора, удобно использовать, если нелинейный элемент имеет вольт-амперную характеристику управляемую током. Запишите выражение для напряжения на нелинейном элементе с вольт-амперной характеристикой, управляемой напряжением. Поясните метод определения параметров эквивалентного генератора в этом случае.

3. Нелинейные элементы с вольт-амперной характеристикой, управляемой напряжением, отнесены к ветвям дерева, а нелинейные элементы с управляемой током вольт-амперной характеристикой отнесены к связям. На каком этапе формирования итерационной формулы для расчета токов встретятся трудности?

4. Изменяются ли элементы матрицы Якоби

$$\mathbf{\Phi}'(\mathbf{x}) = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_n} \end{Vmatrix},$$

где (x) — нелинейные функции, в ходе итерационного процесса $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - [\mathbf{\Phi}'(\mathbf{x}^k)]^{-1}\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}^k)$ решения уравнения $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = 0$?

5. Может ли матрица Якоби $\mathbf{\Phi}'(\mathbf{x})$ цепи стать в ходе вычислительного процесса вырожденной?

6. (Р) Получите уравнения итерационного процесса методов простой итерации и Ньютона для тока или напряжения в электрических цепях, изображенных на рис. В20.7. Вид характеристик нелинейных элементов указан соответственно рисунку в таблицах *а*, *б*, *в*.

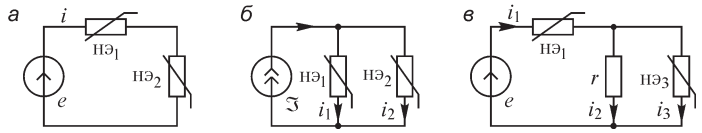


Рис. В20.7

Вариант	*а* нэ$_1$	*а* нэ$_2$	*б* нэ$_1$	*б* нэ$_2$	*в* нэ$_1$	*в* нэ$_3$
1	$u_1 = r_1 i$	$u_2 = f(i)$	$i_1 = g_1 u$	$i_2 = f(u)$	$u_1 = f_1(i_1)$	$u_3 = f_2(i_3)$
2	$u_1 = r_1 i$	$i = f(u_2)$	$i_1 = g_1 u$	$u = f(i_2)$	$i_1 = f_3(u_1)$	$i_3 = f_4(u_3)$
3	$u_1 = f_1(i)$	$u_2 = f_2(i)$	$i_1 = f_1(u)$	$i_2 = f_2(u)$		
4	$u_1 = f_1(i)$	$i = f_2(u_2)$	$i_1 = f_1(u)$	$u = f_2(i_2)$		

7. Для показанной на рис. В20.8 цепи изобразите граф, выберите дерево, а также запишите итерационную формулу для расчета *а*) токов ветвей дерева; *б*) напря-

жений на ветвях дерева; *в*) токов связей. Вид характеристик нелинейных элементов указан в таблице.

Вариант	нэ$_1$	нэ$_2$	нэ$_3$	Вариант	нэ$_1$	нэ$_2$	нэ$_3$
1	$i_1 = f_1(u_1)$	$i_2 = f_2(u_2)$	$i_3 = f_3(u_3)$	5	$u_1 = f_1(i_1)$	$i_2 = f_2(u_2)$	$i_3 = f_3(u_3)$
2	$i_1 = f_1(u_1)$	$u_2 = f_2(i_2)$	$i_3 = f_3(u_3)$	6	$u_1 = f_1(i_1)$	$u_2 = f_2(i_2)$	$i_3 = f_3(u_3)$
3	$i_1 = f_1(u_1)$	$i_2 = f_2(u_2)$	$u_3 = f_3(i_3)$	7	$u_1 = f_1(i_1)$	$i_2 = f_2(u_2)$	$u_3 = f_3(i_3)$
4	$u_1 = f_1(u_1)$	$u_2 = f_2(i_2)$	$u_3 = f_3(i_3)$	8	$u_1 = f_1(i_1)$	$u_2 = f_2(i_2)$	$u_3 = f_3(i_3)$

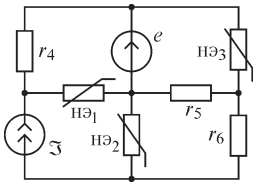


Рис. В20.8

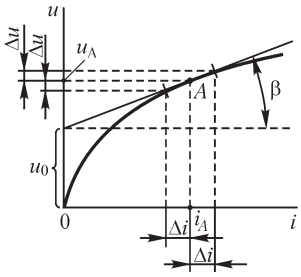


Рис. В20.9

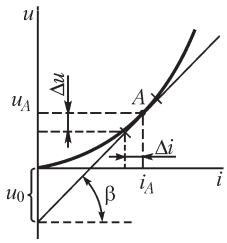


Рис. В20.10

8. (О) Запишите соотношения для определения сопротивление r и ЭДС e схемы замещения нелинейных элементов, вольт-амперные характеристики которых изображены на рис. В20.9, В20.10, при их линеаризации в точке A.

20.3. Нелинейные магнитные цепи

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Почему при учете потока рассеяния в магнитной цепи ее приходится рассматривать, как цепь с распределенными параметрами? Почему влияние потоков рассеяния в магнитных цепях может быть значительным?

2. В каких единицах измеряются магнитное сопротивление $R_м$ и магнитная проводимость Λ?

3. (О) Составьте таблицу аналогии электрической и магнитной цепей. Запишите в ней величины, которые в магнитной цепи соответствуют следующим величинам в электрической цепи: e, i, u, J, r, g, γ.

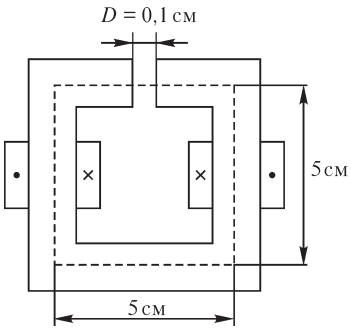


Рис. В20.11

4. (Р) Во сколько раз различаются магнитные сопротивления сердечника $R_{мс}$ и воздушного промежутка $R_{мв}$ упрощенной конструкции электромагнита (рис. В20.11), если сделано допущение о том, что вещество сердечника намагничено равномерно ($\mu_с = 100\mu_0$) и что в силу малости воздушного промежутка магнитный поток в нем проходит сквозь сечение, равное сечению сердечника?

5. Чем обусловлена нелинейность магнитных цепей?

6. Следует ли поток вектора магнитной индукции, линии которого замыкаются полностью внутри проводов обмоток катушки, отнести к потоку рассеяния?

7. Как изменяется (увеличивается или уменьшается) индуктивность катушек (см. рис. В20.11) с ростом насыщения вещества сердечника?

8. Почему при расчете магнитной цепи, участки которой находятся в режиме насыщения, нельзя пренебрегать потоками рассеяния?

9. Могут ли в электрическую цепь, аналогичную нелинейной магнитной цепи, входить линейные резисторы?

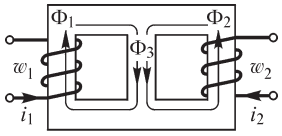


Рис. В20.12

10. (О) Магнитная цепь (рис. В20.12) изготовлена из материала, обладающего широкой петлей гистерезиса, которую необходимо учитывать в расчетах. При $i_1 = i_2 = 0$ материал был размагничен.

а) Будут ли различаться значения потоков Φ_1, Φ_2, Φ_3, если в одном случае постоянные токи $i_1 \neq 0$ и $i_2 \neq 0$ устанавливались одновременно, а в другом случае был установлен вначале ток i_1, а затем i_2?

б) Возможно ли, что при изменении порядка установления токов i_1 и i_2 будут меняться не только величины, но и направления магнитных потоков?

в) Возможно ли, что при неодновременном установлении токов i_1 и i_2 некоторые участки цепи перейдут в режим насыщения, а при одновременном этого не произойдет?

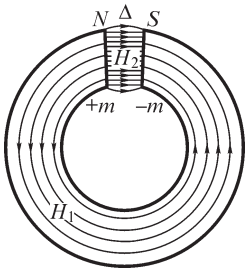


Рис. В20.13

11. В постоянном магните с воздушным зазором уменьшают величину зазора Δ (рис. В20.13), вставляя в него ферромагнитную пластину. Как будет изменяться: *а*) напряженность H2 поля в зазоре; *б*) индукция магнитного поля в зазоре; *в*) величина магнитного потока?

21.1. Формы кривых тока и напряжения в нелинейных цепях. Метод эквивалентных синусоид

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Почему при действии на входе цепи с инерционными нелинейными элементами синусоидального напряжения ток в ней будет также синусоидальным?

2. Зависят ли комплексные сопротивление и проводимость цепи с инерционным нелинейным элементом от действующих значений тока и напряжения?

3. Форма кривой тока при подключении элемента к источнику синусоидального напряжения и форма кривой напряжения на элементе при подключении его к источнику синусоидального тока одинаковы. Какую характеристику имеет элемент?

4. Будет ли ток нелинейного элемента, характеристика которого $i = au^3$, содержать четные гармонические составляющие при действии на его входе напряжения $u = U_0 + U_m \sin \omega t$?

5. (О) Для представленной на рис. В21.1 зависимости $\Psi = f(i)$ постройте кривые: *а*) $i(t)$ при $\Psi(t) = \Psi_m \sin \omega t$; *б*) $\Psi(t)$ и $u(t) = d\Psi/dt$ при $i(t) = I_m \sin \omega t$ ($\Psi_m > \Psi_0$, $I_m > I_0$).

6. Приложенное к катушке с ферромагнитным сердечником напряжение и эквивалентная синусоида протекающего по ней тока сдвинуты на угол α. Как изменяется угол α при изменении площади петли гистерезиса? В каком случае получаем α = 0? Может ли угол α изменить знак при изменении формы петли гистерезиса?

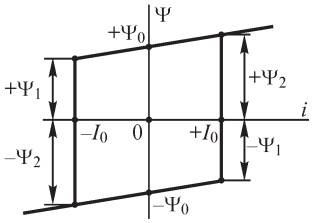


Рис. В21.1

7. Лист из ферромагнитного материала толщиной d, высотой $h >> d$ и длиной $l >> h$ находится в однородном переменном электромагнитном поле, линии магнитной индукции которого направлены вдоль листа нормально его поперечному сечению. В какой области листа мощность потерь в единице его объема больше: в центре листа или вблизи поверхности? Каков вид зависимости $P_{фер}/f = F(f)$, где $P_{фер}$ — потери в листе, f — частота изменения поля? Можно ли, имея эту зависимость, определить для заданной частоты потери на гистерезис и на вихревые токи?

8. (О) Как изменяется угол φ сдвига по фазе между эквивалентными синусоидами тока и напряжения катушки с ферромагнитным сердечником: *а*) при использовании материала с меньшей площадью петли гистерезиса; *б*) увеличении толщины листов, из которых набран сердечник катушки; *в*) уменьшении удельной электрической проводимости материала сердечника? Каковы предельные значения угла φ? Может ли угол φ быть отрицательным?

9. Приложенное к катушке с ферромагнитным сердечником напряжение изменилось. Действующие значения эквивалентных синусоид напряжения и тока также будут другими. Изменится ли угол φ сдвига по фазе между эквивалентными синусоидами напряжения и тока?

10. Покажите, что при замене эквивалентными синусоидами напряжения и тока катушки с ферромагнитным сердечником величины потокосцепления Ψ и тока i связаны уравнением эллипса.

21.2. Катушка и трансформатор с ферромагнитным сердечником. Явление феррорезонанса

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Будут ли изменяться пропорционально все векторы на векторной диаграмме катушки с ферромагнитным сердечником (см. рис. В21.4), построенной для эквивалентных синусоидальных величин, при изменении приложенного к катушке напряжения? Будут ли сохраняться при этом угды между векторами?

2. (Р) Выразите параметры r_0, x_0 схемы замещения катушки с ферромагнитным сердечником, приведенной на рис. В21.2, через параметры g_0, b_0 эквивалентной

схемы, показанной на рис. В21.3. Изобразите на соответствующей этой схеме векторной диаграмме напряжения U_{r0} и U_{x0}.

3. (О) Как отразится на векторной диаграмме (рис. В21.4) и эквивалентной схеме (см. рис. В21.3) катушки с ферромагнитным сердечником: *а*) замена листов шихтованного сердечника листами того же материала большей толщины при сохранении тех же размеров сердечника; *б*) введение в сердечник воздушного зазора?

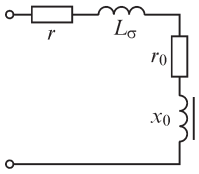


Рис. В21.2

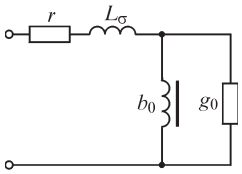


Рис. В21.3

4. (О) Зависит ли комплексное магнитное сопротивление $Z_м$ магнитного сердечника от способа выбора эквивалентных синусоид тока и напряжения?

5. Какова связь между аргументами комплексного магнитного $Z_м$ и электрического $Z_{0э}$ сопротивлений катушки с ферромагнитным сердечником?

6. Почему определяемые потоками рассеяния трансформатора индуктивности $L_{\sigma 1}$, $L_{\sigma 2}$ можно принять постоянными, не зависящими от токов i_1, i_2?

7. Приложенное к зажимам первичной обмотки трансформатора с ферромагнитным сердечником напряжение синусоидально. Будет ли синусоидальным напряжение на зажимах приемника?

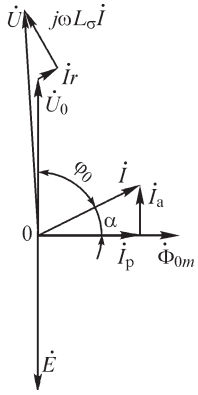


Рис. В21.4

8. С какой целью выполняют приведение величин вторичной цепи трансформатора к первичной?

9. Можно ли намагничивающий ток трансформатора ввести соотношением $\dot{I}_{0m} = \dot{I}_{1m} + \dot{I}_{2m}$, а не соотношением $\dot{I}_{0m} = \dot{I}_{1m} + \dot{I}'_{2m}$ (здесь $\dot{I}_{1m}$, $\dot{I}_{2m}$ — комплексные амплитудные значения токов, $\dot{I}'_{2m}$ — комплексная амплитуда приведенного тока вторичной обмотки трансформатора)?

10. Зависит ли намагничивающий ток (его аргумент и модуль) от того, выполняется ли приведение величин вторичной цепи к первичной?

11. (О) Каким образом, используя характеристику $U_L = f(I)$ катушки с ферромагнитным сердечником, определить наименьшее значение емкости C подключенного последовательно с ней конденсатора (рис. В21.5), при котором в цепи имеет место явление феррорезонанса?

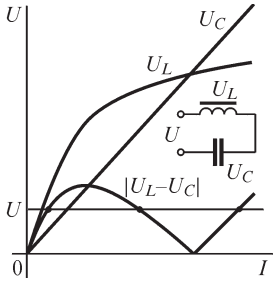


Рис. В21.5

12. Какое наименьшее сопротивление r, включенное последовательно с идеальными катушкой с ферромагнитным сердечником и конденсатором (рис. В21.5), приведет к исчезновению падающего участка характеристики $U = f(I)$ цепи?

13. Может ли увеличение емкости конденсатора (см. рис. В21.5) привести: *а*) к увеличению протяженности скачка тока; *б*) к уменьшению действующего

значения напряжения на входе цепи, при котором имеет место явление феррорезонанса? *в*) к исчезновению явления феррорезонанса при любом значении напряжения на входе цепи?

21.3. Методы гармонического баланса и кусочно-линейной аппроксимации нелинейных характеристик

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Какой порядок имеет в общем случае система алгебраических уравнений метода гармонического баланса при расчете k гармоник решения?

2. Можно ли применить метод гармонического баланса для расчета токов в нелинейной цепи при действии на ее входе: *а*) периодического несинусоидального напряжения; *б*) совокупности гармонических напряжений различных частот?

3. Какие особенности имеют задачи расчета периодических процессов в нелинейных цепях, при решении которых метод гармонического баланса: *а*) весьма эффективен; *б*) неэффективен?

4. Справедливо ли утверждение, что нахождение решения методом гармонического баланса требует применения метода наложения?

5. (О) Характеристики нелинейных элементов цепи аппроксимируют отрезками прямых. При каких условиях на прямолинейном отрезке *ab* характеристики одного из элементов процесс в цепи описывается одним и тем же линейным дифференциальным уравнением?

6. Могут ли на границах отрезков, аппроксимирующих нелинейную характеристику, на участках электрической цепи скачком изменяться токи и напряжения, не являющиеся переменными состояния?

22.1. Устойчивость состояния равновесия

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Может ли состояние равновесия в нелинейной цепи быть устойчивым при малых отклонениях тока или напряжения и неустойчивым при больших?

2. (О) Можно ли для анализа устойчивости состояния равновесия давать отклонение η току (либо напряжению) в одном из линейных (а не нелинейных) элементов электрической цепи?

3. Анализ показывает, что в электрической цепи (рис. В22.1) с электрической дугой, имеющей падающую характеристику $u = F(i)$ (рис. В22.2), состояние равновесия в точке A является неустойчивым. Как, пользуясь графиком на рис. В22.2, найти такое сопротивление r, при котором дуга гореть не может?

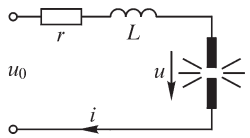


Рис. В22.1

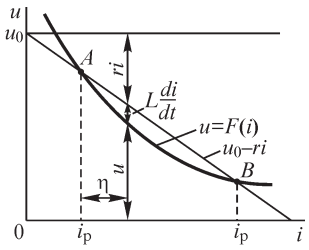


Рис. В22.2

4. (О) Какие качественные изменения зависимости $i(t)$ будут наблюдаться в процессе перехода из точки A

неустойчивого равновесия (см. рис. В22.2) в точку *B* устойчивого равновесия при *а*) увеличении индуктивности *L* катушки (r = const), *б*) увеличении сопротивления *r* резистора (L = const)?

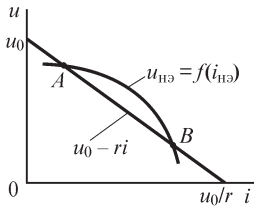


Рис. В22.3

5. В каком виде можно изобразить характеристику $u = F(i)$ нелинейного элемента вблизи точек *A*, *B* равновесия (см. рис. В22.2) при разложении функции $u = F(i_р + \eta)$ в ряд и удержании слагаемых не выше первой степени отклонения η тока?

6. В электрической цепи (см. рис. В22.1) с нелинейным сопротивлением, имеющим падающую характеристику $u = F(i)$ (см. рис. В22.2), устойчивым является состояние равновесия в точке *B*, а неустойчивым — в точке *A*. Сохранится ли в точках *A*, *B* тот же характер равновесия, если нелинейное сопротивление имеет показанную на рис. В22.3 падающую характеристику $u_{нэ} = f(i_{нэ})$?

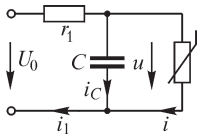


Рис. В22.4

7. Изобразите схемы электрических цепей, которые соответствуют линейным дифференциальным уравнениям первого порядка для малых приращений $\eta = \Delta i_{нэ}$ и $\eta = \Delta u_{нэ}$ в цепях, показанных на рис. В22.1, В22.4.

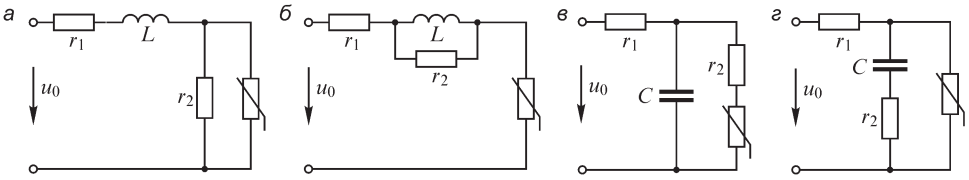


Рис. В22.5

8. (Р) Найдите соотношения, которым должны удовлетворять параметры элементов изображенных на рис. В22.5 цепей и при выполнении которых состояние равновесия устойчиво для малых отклонений от него токов и напряжений. Сопротивление нелинейного элемента при линеаризации его характеристики в точке равновесия примите равным $r_д$.

22.2. Автоколебания в нелинейных электрических цепях

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. (О) Возможно ли возникновение автоколебаний в электрической цепи, в которой выполнена не положительная, а отрицательная обратная связь?

2. (О) Возможно ли возникновение незатухающих колебаний в пассивной цепи, содержащей неидеальные катушки индуктивности и конденсаторы?

3. Почему форма автоколебаний обычно отличается от синусоидальной?

4. Корни характеристического уравнения, получаемого при линеаризации зависимости $u_{нэ}(i)$, вещественные. Могут ли в цепи возникать автоколебания?

5. В генераторе, содержащем индуктивно связанные катушки, существуют автоколебания. Будут ли они существовать при изменении знака (см. рис. В22.9) взаимной индукции, т. е. при переключении зажимов одной из катушек?

6. (О) В цепи с одним нелинейным элементом, характеристика которого показана на рис. В22.6, существуют автоколебания. Какой может быть наибольшая амплитуда колебаний тока этого элемента? Почему могут существовать автоколебания с меньшей амплитудой?

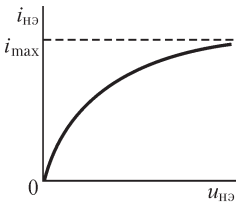


Рис. В22.6

7. Является ли необходимым для возникновения автоколебаний наличие в электрической цепи нелинейного элемента с падающей характеристикой?

8. (О) В линейной цепи с передаточной функцией $K(p)$, охваченной устройством обратной связи с передаточной функцией $K_{ос}(p)$, существуют незатухающие колебания. Запишите уравнения, позволяющие рассчитать частоту и амплитуду колебаний на выходе цепи. Какой вид примут эти уравнения, если цепью обратной связи с передаточной функцией $K_{ос}(p)$ охвачен безынерционный усилитель с коэффициентом усиления $K_у$?

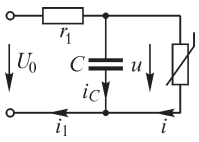


Рис. В22.7

9. (О) Почему релаксационные колебания в цепи, изображенной на рис. В22.7, невозможны, если прямая $u = U_0 - r_1 i$ пересекает характеристику $u = \varphi(i)$ (рис. В22.8, *а*) нелинейного элемента на одном из ее восходящих участков?

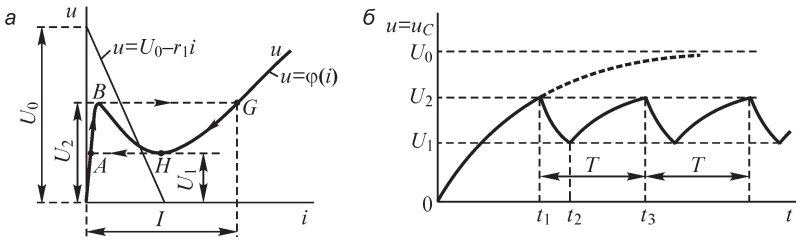


Рис. В22.8

10. Как изменяется период релаксационных колебаний (рис. В22.8, *б*) в цепи (рис. В22.7) при изменении: *а*) емкости C конденсатора; *б*) напряжения U_0; *в*) сопротивления r_1 резистора?

22.3. Расчет переходных процессов в нелинейных цепях

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. В чем заключаются достоинства аналитического решения задачи расчета переходного процесса в нелинейных электрических цепях?

2. Из каких соображений следует выбирать выражение для аппроксимации характеристики нелинейного элемента при поиске аналитической зависимости тока либо напряжения в переходном процессе?

3. В чем состоят трудности получения аналитических решений дифференциальных уравнений при расчете переходных процессов в нелинейных цепях?

4. (О) Характеристику нелинейного элемента аппроксимируют отрезками прямых. Какие условия для нахождения постоянных интегрирования следует принимать на границах отрезков, если дифференциальное уравнение на каждом из участков имеет порядок: *а*) первый; *б*) второй; *в*) k-й?

5. При кусочно-линейной аппроксимации характеристики нелинейного элемента на границах участков аппроксимации соответствующая величина (сопротивление, индуктивность либо емкость) изменяется скачком. Следует ли принимать во внимание мгновенное изменение параметра при расчете переходного процесса на каждом из отрезков?

6. Для нахождения какой из указанных далее величин метод условной линеаризации более точен: *а*) для определения максимальных значений Ψ_{max}, i_{max} в переходном процессе; *б*) для определения времени переходного процесса?

7. (Р) Рассчитайте токи ветвей и напряжение на нелинейном элементе в схемах, изображенных на рис. В22.9, методом кусочно-линейной аппроксимации характеристики нелинейного элемента. Характеристики нелинейных элементов приведены в таблице. Напряжения на входе цепи указаны в вольтах, сопротивления резисторов — в омах, емкости конденсаторов — в микрофарадах.

Вебер-амперная характеристика катушки индуктивности		Вольт-кулоновская характеристика конденсатора		Вольт-амперная характеристика резистора	
Ψ, Вб	i_L, А	q, мкКл	u_C, В	u_R, В	i_R, А
0	0	0	0	0	0
0,01	0,5	10	4	20	0,04
0,03	1	20	11	40	0,08
0,055	1,5	24	16	50	0,1
0,09	3	28	22	70	0,2
0,109	4,5	32	33	80	0,3
0,113	5	36	47	93	0,5
0,119	6	40	63	106	0,9
0,124	7	44	84	115	1,4
0,132	9	48	113	120	1,8
0,137	11	49	129	126	2,8
0,141	15	50	155	127	3,2

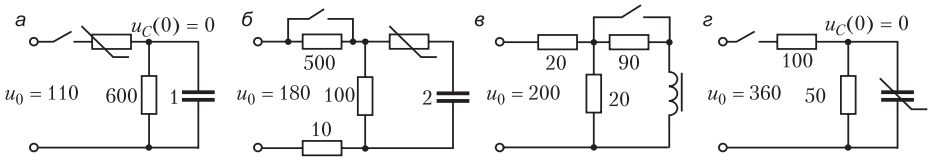


Рис. В22.9

22.4. Метод фазовой плоскости

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Можно ли по фазовой траектории цепи определить направление движения изображающей точки?

2. Может ли фазовая траектория нелинейной цепи: *а*) быть разрывной; *б*) располагаться только в одном квадранте плоскости $x0y$; *в*) иметь внутри предельного цикла неустойчивый узел?

3. Какие точки фазовой плоскости соответствуют положению равновесия нелинейной цепи?

4. Являются ли изоклинами линии $x = 0$, $y = 0$?

5. В каких случаях целесообразно предварительно изображать семейство изоклин и лишь затем строить фазовую траекторию?

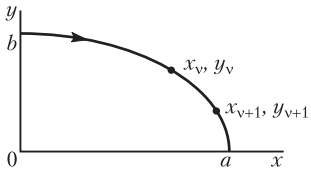


Рис. В22.10

6. (Р) Получите выражение для расчета промежутка времени T переходного процесса, фазовая траектория которого (рис. В22.10) выражена уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, при изменении x от 0 до a, где a, b — длины полуосей эллипса.

7. (Р) Участок $\nu \ldots n + 1$ фазовой траектории (рис. В22.10) является отрезком эллипса с уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Рассчитайте промежуток Δt времени движения изображающей точки по этому участку.

Ответы на вопросы, решения упражнений и задач

9.1. Общий путь расчета переходных процессов. Метод переменных состояния

ВОПРОСЫ

3. Порядок дифференциального уравнения, описывающего переходный процесс в электрической цепи, в общем случае не равен полному числу катушек индуктивности и конденсаторов в цепи. Последовательно (или параллельно) включенные катушки индуктивности можно объединить в одну, также как и соответствующим образом включенные конденсаторы. Однако и после такого объединения число катушек и конденсаторов может превышать порядок дифференциального уравнения. Действительно, если к некоторому узлу подходят ветви, каждая из которых включает в себя катушку индуктивности (в этом случае, как говорят, имеется $L\mathfrak{I}$-сечение), то ток одной из катушек можно выразить через токи других катушек из уравнения первого закона Кирхгофа, составленного для этого узла. Аналогично из уравнения второго закона Кирхгофа, записанного для контура, содержащего конденсаторы (если такие контуры, называемые *CE*-контурами, имеются), можно исключить напряжение одного из конденсаторов, выразив его через напряжения других конденсаторов. Если число $L\mathfrak{I}$-сечений в цепи равно k, а число *CE*-контуров — m, то порядок дифференциального уравнения уменьшится на число $k + m$.

Если в цепи нет последовательно (или параллельно) соединенных элементов одного вида, а также нет $L\mathfrak{I}$-сечений и *CE*-контуров, то порядок дифференциального уравнения равен числу катушек и конденсаторов в цепи.

4. При $f_k(t) = A = \text{const}$ ток $i'_k(t)$ установившегося режима будет постоянным и все его производные, входящие в левую часть дифференциального уравнения, обратятся в нуль. Искомый ток $i_k = A/a_0$ находим из получаемого при этом уравнения $a_0 i_k = A$.

Для расчета тока в случае *б* следует, записав в комплексной форме функцию $\dot{f}_k$, а также ток и его производные, решить получаемое алгебраическое уравнение относительно тока $\dot{I}_k$, после чего найти его мгновенное значение.

5. Выбираемый метод составления системы уравнений определяет только их число, но не порядок дифференциального уравнения, который (см. ответ на вопрос 3) зависит от схемы электрической цепи и количества входящих в нее катушек индуктивности и конденсаторов.

9. Наличие отрицательных вещественных корней характеристического уравнения означает, что в электрической цепи имеются резисторы. Это исключает существование мнимых корней, появление которых возможно только при отсутствии потерь в цепи, когда в ней возникают незатухающие колебания тока.

Однако в электрических цепях, состоящих из нескольких подцепей, переходные процессы в которых не оказывают взаимного влияния, возможно существование указанной комбинации корней характеристического уравнения. Пример такой цепи показан на рис. Р9.1, *а*. Ее можно представить в виде двух подцепей,

переходные процессы в которых независимы (рис. Р9.1, *б*). Как видно, вещественный корень соответствует одной подцепи, а два мнимых — другой. Поэтому эти корни не следует рассматривать как совокупность корней одной электрической цепи.

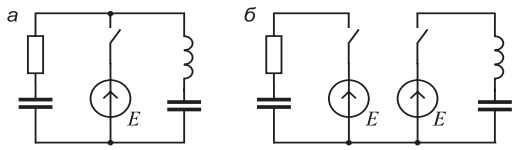


Рис. Р9.1

УПРАЖНЕНИЯ

1. Учитывая, что в цепях действуют источники постоянных напряжений и токов, при расчете токов и напряжений в установившемся режиме катушки индуктивности замыкаем накоротко, а ветви с конденсаторами разрываем. Получаем: *а*) $u_C(\infty) = E$; *б*) $u_C(\infty) = 0$; *в*) $u_C(\infty) = 0{,}5E$; *г*) $u_C(\infty) = 0{,}5E$; *д*) $i_L(\infty) = E/r$; *е*) $i_L(\infty) = 0{,}5\mathfrak{I}$; *ж*) $i_L(\infty) = E/r$; *з*) $i_L(\infty) = 0{,}5\mathfrak{I}$.

2. *а*) $W(0) = 0$, $W(\infty) = 0{,}5CE^2$; *б*) $W(0) = 0{,}5CU_C^2(0)$, $W(\infty) = 0$; *в*) $W(0) = 0{,}5CE^2$, $W(\infty) = CE^2/8$; *г*) $W(0) = 2CE^2/9$, $W(\infty) = CE^2/8$; *д*) $W(0) = 0$, $W(\infty) = LE^2/2r^2$; *е*) $W(0) = 0{,}5L\mathfrak{I}^2$, $W(\infty) = L\mathfrak{I}^2/8$; *ж*) $W(0) = LE^2/8r^2$, $W(\infty) = LE^2/2r^2$; *з*) $W(0) = 0{,}5L\mathfrak{I}^2$, $W(\infty) = L\mathfrak{I}^2/8$.

3. Напряжения на конденсаторах и токи катушек в установившемся режиме равны:

а) $E_m[1 + (r\omega C)^2]^{-0,5} \sin[\omega t + \operatorname{arctg}(\omega rC)^{-1} - 0{,}5\pi]$; *б*) 0;

в, г) $\dfrac{E_m}{\sqrt{4+\omega^2 r^2 C^2}}\sin\left(\omega t - \operatorname{arctg}\dfrac{\omega rC}{2}\right)$; *д, ж*) $\dfrac{E_m}{\sqrt{r^2+\omega^2 L^2}}\sin\left(\omega t - \operatorname{arctg}\dfrac{\omega L}{r}\right)$;

е) $\dfrac{r\mathfrak{I}_m}{\sqrt{4r^2+\omega^2 L^2}}\sin\left(\omega t - \operatorname{arctg}\dfrac{\omega L}{2r}\right)$.

4. *а*) $L\left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}\right)\dfrac{di_L}{dt} + i_L = \dfrac{E}{r_1}$, $\dfrac{di_L}{dt} = -\dfrac{r_1 r_2}{L(r_1+r_2)}i_L + \dfrac{r_2}{L(r_1+r_2)}E$;

б, в) $C\dfrac{du_C}{dt} + \left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}\right)u_C = \dfrac{E}{r_1}$, $\dfrac{du_C}{dt} = -\dfrac{1}{C}\left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}\right)u_C + \dfrac{1}{r_1 C}E$;

г) $\dfrac{d^2 i_L}{dt^2} + \dfrac{1}{rC}\dfrac{di_L}{dt} + \dfrac{i_L}{LC} = \dfrac{E}{rLC}$, $\dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{1}{L}u_C$, $\dfrac{du_C}{dt} = -\dfrac{1}{C}i_L - \dfrac{1}{rC}u_C + \dfrac{E}{rC}$;

д) $\dfrac{d^2 u_C}{dt^2} + \dfrac{1}{rC}\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{1}{LC}u_C = \dfrac{E}{LC}$, $\dfrac{di_L}{dt} = -\dfrac{1}{L}u_C + \dfrac{E}{L}$, $\dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{1}{C}i_L - \dfrac{1}{rC}u_C$;

е) $\dfrac{d^2 i_L}{dt^2} + \dfrac{1}{rC}\dfrac{di_L}{dt} + \dfrac{1}{LC}i_L = 0$, $\dfrac{di_L}{dt} = -\dfrac{1}{L}u_C + \dfrac{E}{L}$, $\dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{1}{C}i_L - \dfrac{1}{rC}u_C + \dfrac{E}{rC}$.

5. При расчете токов в ветвях цепи токи i_L в катушках и напряжения u_C на конденсаторах рассматриваем как заданные. Поэтому, изображая схему цепи (вариант *д*), можем заменить катушки индуктивности источниками тока $\mathfrak{I} = i_L$ и конденсаторы — источниками ЭДС $e = -u_C$ (рис. Р9.2). Получаемые таким

способом электрические цепи, содержащие источники тока $\mathfrak{I}$ и источники ЭДС e, можно использовать для составления уравнений состояния, выражая величины $u_L = L\dfrac{di_L}{dt}$, $i_C = C\dfrac{du_C}{dt}$ через параметры цепи и все действующие в ней источники.

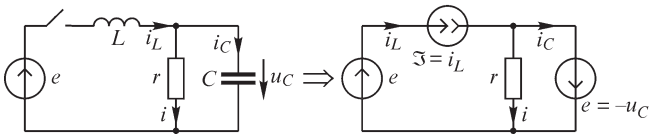


Рис. Р9.2

6. Порядок дифференциального уравнения равен $m + p - k - n$ (см. ответ на вопрос 3). Число постоянных интегрирования совпадает с порядком уравнения. Для нахождения постоянных порядок наибольшей производной искомой переменной при $t = 0$ будет на единицу меньше порядка уравнения.

10. В цепях (рис. Р9.3) переходный процесс отсутствует, так как $u_C(0) = u_C(\infty)$.

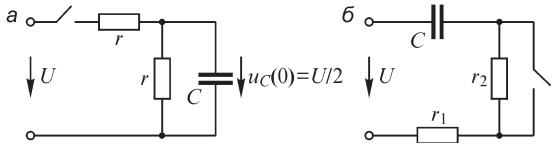


Рис. Р9.3

11. Для нахождения величины $i_L(+0) = i_L(-0)$ определяем вначале ток $i_L(-0)$ в катушке до коммутации, принимая во внимание обстоятельство, что все катушки индуктивности можно замкнуть накоротко. Величину $\dfrac{di_L}{dt}(+0)$ находим, записывая уравнения законов Кирхгофа в цепи, получаемой после коммутации, и подставляя в них найденный ток $i_L(+0)$. Имеем (при замыкании ключа):

а) $i_L(-0) = 0$, $\dfrac{di_L}{dt}(+0) = \dfrac{1}{L}u_L(+0) = \dfrac{U}{2L}$; *б)* $i_L(-0) = \dfrac{U}{r}$, $\dfrac{di_L}{dt}(+0) = 0$;

в) $i_L(-0) = \dfrac{U}{3r}$, $\dfrac{di_L}{dt}(+0) = \dfrac{U}{3L}$; *г)* $i_L(-0) = \dfrac{E}{r}$, $\dfrac{di_L}{dt}(+0) = \dfrac{E}{5L}$;

д) $i_L(-0) = \dfrac{\mathfrak{I}}{2}$, $\dfrac{di_L}{dt}(+0) = -\dfrac{\mathfrak{I}r}{2L}$; *е)* $i_L(-0) = \dfrac{E}{3r}$, $\dfrac{di_L}{dt}(+0) = \dfrac{2E}{3L}$.

12. Получаем при замыкании ключа:

а) $u_C(+0) = u_C(-0)$, $\dfrac{du_C}{dt}(+0) = \dfrac{U}{rC}$; *б)* $u_C(+0) = U$, $\dfrac{du_C}{dt}(+0) = \dfrac{U}{rC}$;

в) $u_C(+0) = \dfrac{E}{2}$, $\dfrac{du_C}{dt}(+0) = \dfrac{E}{2rC}$; *г)* $u_C(+0) = r\mathfrak{I}$, $\dfrac{du_C}{dt}(+0) = -\dfrac{\mathfrak{I}}{C}$;

д) $u_C(+0) = \dfrac{2E}{3}$, $\dfrac{du_C}{dt}(+0) = \dfrac{2E}{9rC}$.

13. При замыкании ключа имеем *а*) $i_{L_1}(+0) = i_{L_2}(+0) = \frac{U}{r}$, $u_C(+0) = 0$. Из уравнений

$$L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} + i_{L_2} r = U, \quad L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + u_C = U, \quad i_{L_1} = i_{L_2} + C\frac{du_C}{dt}$$

находим:

$$\frac{di_{L_1}}{dt}(+0) = \frac{U}{L_1}, \quad \frac{di_{L_2}}{dt}(+0) = -\frac{U}{L_2}, \quad \frac{du_C}{dt}(+0) = 0, \quad \frac{d^2 i_{L_1}}{dt^2}(+0) = 0,$$

$$\frac{d^2 i_{L_2}}{dt^2}(+0) = \frac{rU}{L_2^2}, \quad \frac{d^2 u_C}{dt^2}(+0) = \frac{U}{C}\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right);$$

б) $i_{L_1}(+0) = i_{L_2}(+0) = \frac{U}{3r}$, $u_C(+0) = \frac{2U}{3}$, $\frac{di_{L_1}}{dt}(+0) = 0$, $\frac{di_{L_2}}{dt}(+0) = \frac{2U}{3L_2}$, $\frac{du_C}{dt}(+0) = 0$,

$$\frac{d^2 i_{L_1}}{dt^2}(+0) = 0, \quad \frac{d^2 i_{L_2}}{dt^2}(+0) = 0, \quad \frac{d^2 u_C}{dt^2}(+0) = -\frac{2U}{3L_2 C};$$

в) $i_{L_1}(+0) = i_{L_2}(+0) = 0$, $u_C(+0) = U$, $\frac{di_{L_1}}{dt}(+0) = \frac{du_C}{dt}(+0) = \frac{d^2 i_{L_1}}{dt^2}(+0) = 0$,

$$\frac{di_{L_2}}{dt}(+0) = \frac{U}{L_2}, \quad \frac{d^2 i_{L_2}}{dt^2}(+0) = -\frac{rU}{L_2^2}, \quad \frac{d^2 u_C}{dt^2} = -\frac{U}{L_2 C};$$

г) $i_L(+0) = u_{C_1}(+0) = u_{C_2}(+0) = 0$, $\frac{du_{C_1}}{dt}(+0) = \frac{U}{rC_1}$, $\frac{du_{C_2}}{dt}(+0) = \frac{U}{rC_2}$, $\frac{di_L}{dt}(+0) = \frac{U}{L}$,

$$\frac{d^2 u_{C_1}}{dt^2}(+0) = = \frac{U}{C_1}\left[\frac{1}{L} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\right], \quad \frac{d^2 u_{C_2}}{dt^2}(+0) = -\frac{U}{r^2 C_2}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right),$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2}(+0) = -\frac{rU}{L^2} - \frac{U}{rLC_1}.$$

14. В дополнении к указанным уравнение должно иметь также своими корнями: *а*) $-j20$, *б*) $-2 - j5$, *в*) $j20$, *г*) любое отрицательное вещественное число.

9.2. Переходные процессы в цепях *r*, *L* и *r*, *C*

УПРАЖНЕНИЯ

5. В цепи с произвольным числом резисторов и одной катушкой индуктивности (одним конденсатором) свободная составляющая $x''(t)$ определяется выражением $x''(t) = x_0 \exp(-t/\tau)$, где x_0 — ее начальное значение ($i_L(0)$ либо $u_C(0)$). Так как при нахождении свободной составляющей все источники ЭДС должны быть замкнуты накоротко, а ветви с источниками тока — разомкнуты, то цепь можно представить в виде последовательно соединенных резистора и катушки индуктивности (конденсатора). Постоянная времени такой цепи $\tau = L/r_э$ (либо $\tau = r_э C$). Таким образом, для нахождения постоянной времени следует, замкнув нако-

ротко источники ЭДС и разомкнув ветви с источниками тока, найти сопротивление $r_э$, подключенное к зажимам катушки индуктивности (конденсатора), после чего рассчитать τ с помощью выражения $\tau = L/r_э$ ($\tau = r_э C$).

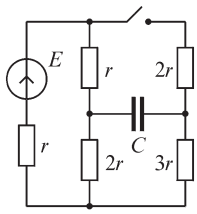


Рис. Р9.4

6. *а*) Рассматривая резистивную цепь между зажимами конденсатора, получаемую после замыкания накоротко источника ЭДС (рис. Р9.4), видим, что резисторы в ней не соединены последовательно-параллельно. После преобразования элементов r, $2r$, r, соединенных треугольником, в трехлучевую звезду, находим сопротивления в лучах звезды: $r_{10} = 0{,}75r$, $r_{20} = 0{,}5r$, $r_{30} = 0{,}75r$. Искомое сопротивление $r_э = 2{,}25r$, так что постоянная времени равна $\tau = 2{,}25rC$. *б*) Размыкая ветвь, содержащую источник тока, находим сопротивление цепи между зажимами конденсатора $r_э = 1{,}2r$ и постоянную времени $\tau = 1{,}2rC$; *в*) $r_э = 2r/3$, $\tau = 2rC/3$; *г*) $r_э = 1{,}2r$, $\tau = L/1{,}2r$; *д*) $r_э = 7r/6$, $\tau = 6L/7r$; *е*) $r_э = 2r$, $\tau = L/2r$.

7. Используя соотношение $L\dfrac{di}{dt} = E$, получаем:

$$a)\ i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t E\,dt + i_L(0) = Et/L; \quad б)\ i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t E(t)\,dt + i_L(0) = \frac{1}{L}\int_0^t E(t)\,dt.$$

8. Вся запасенная в электрическом поле конденсатора энергия $W = 0{,}5CE^2 = 2\cdot 10^{-4}$ Дж преобразуется в тепловую энергию, выделяемую в резисторе:

$$W = r\int_0^\infty i^2\,dt = r\int_0^\infty (E/r)^2 \exp(-2t/rC)dt = 0{,}5CE^2 = 2\cdot 10^{-4}\ \text{Дж}.$$

9.3. Переходные процессы в цепи *r, L, C*

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

3. Период колебаний будет минимальным и равным $T = 2\pi/\omega_0$ при $r = 0$. Он возрастает и стремится к бесконечности по мере приближения процесса к апериодическому, когда корни характеристического уравнения становятся вещественными и равными, что происходит при $r \to 2(L/C)^{0,5}$.

5. В предельном случае апериодического заряда конденсатора напряжение на нем $u_C(t) = U_0(1 + \delta t)[\exp(-\delta t)]$. Уравнение $\dfrac{du_C}{dt} = -U_0\delta^2 t \exp(-\delta t) = 0$ имеет своим решением значение $t = 0$. Поэтому при апериодическом заряде конденсатора напряжение на нем меняется монотонно от U_0 до 0.

6. Напряжение на конденсаторе имеет экстремумы при $t = k\pi/\omega'$ ($k = 1, 2, \ldots$): $U_{C\max_k} = -U_0(\omega_0/\omega')[\exp(-\delta k\pi/\omega')]\sin(k\pi - \theta)$. Первый минимум напряжения (при $t = \pi/\omega'$) при $\delta > 0$ оказывается по модулю меньше напряжения U_0 и может стать равным U_0 при $\delta = 0$. Последующие (при $t > \pi/\omega'$) экстремальные значения напряжения u_C также не превышают напряжение U_0 при любых δ.

9.4. Переходные процессы в цепях при мгновенном изменении параметров участков цепи

ВОПРОСЫ

1. Бесконечные импульсы напряжения на катушках индуктивности появляются, если ток в них при коммутации изменяется скачком подобно рассмотренному в § 9.10. Аналогично этому можем утверждать, что импульсы тока бесконечной амплитуды протекают в конденсаторах, если при коммутации напряжение на них изменяется скачком. В противном случае мгновенные изменения индуктивности (емкости) не приводят к появлению бесконечных импульсов напряжения или тока.

3. Ток в катушке индуктивности может измениться скачком, если только при коммутации образуется сечение, содержащее ветви с катушками. Поэтому условие появления такого сечения является необходимым для возникновения бесконечных импульсов напряжения. Если токи катушек в ветвях, образующих такие сечения, в момент коммутации сохраняют свои значения, то такие импульсы не возникают. Поэтому указанное условие не является достаточным для появления бесконечных импульсов напряжения.

4. Вариант *а*: появление бесконечного импульса тока возможно, так как при условии постоянства напряжения на зажимах источника ЭДС напряжение на конденсаторах должно измениться скачком. Вариант *б*: в силу того, что напряжение на резисторе может изменяться мгновенно при конечном токе, напряжения на конденсаторах сохраняют при коммутации свои значения и бесконечных импульсов не возникает. Вариант *в*: напряжение на зажимах источника тока может изменяться мгновенно, в связи с чем ответ на вопрос будет таким же, как и для варианта *б*.

10.1. Операторные изображения функций, их производных и интегралов

ВОПРОСЫ

3. Не существует, так как функция e^{t^2} не удовлетворяет условию $|e^{t^2}| < Ae^{\alpha t}$ при больших значениях t. Она возрастает быстрее, чем функция $Ae^{\alpha t}$, и поэтому интеграл Лапласа не имеет конечного значения. Напряжения и токи, возрастающие быстрее функции $e^{\alpha t}$, на практике не встречаются.

5. В соответствии с определением преобразования Лапласа за нижний предел интеграла Лапласа принимают значение $t = +0$, в связи с чем следует принять $f(0) = f(+0)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Соответствующие изображения имеют вид:

а) $I(p) = 2e^{30}\dfrac{1}{p+10}$; *б*) $I(p) = \dfrac{500\pi}{(p+1)^2 + (100\pi)^2}$;

в) $I(p) = \dfrac{10}{(p+1)^2}$; *г*) $I(p) = \dfrac{30}{p(p+10)}$.

2. *а*) Применяя метод наложения, представляем напряжение в виде суммы двух скачкообразных напряжений $U_0(t - t_1)$ и $-U_0(t - t_2)$ и записываем искомое изображение $U(p) = \frac{U_0}{p}e^{-pt_1} - \frac{U_0}{p}e^{-pt_2} = \frac{U_0}{p}(e^{-pt_1} - e^{-pt_2})$, учитывая, что изображение скачкообразного напряжения U_0 есть U_0/p.

Вычисляя интеграл Лапласа, получаем тот же результат:

$$U(p) = \int_0^\infty u(t)e^{-pt}\,dt = U_0\int_{t_1}^{t_2} e^{-pt}\,dt = \frac{U_0}{p}(e^{-pt_1} - e^{-pt_2}).$$

Если длительность $t_2 - t_1 = \Delta t$ действия импульса напряжения стремится к нулю, а его амплитуда возрастает, так что произведение $U_0 \cdot \Delta t$ сохраняется постоянным, то в пределе при $\Delta t \to 0$ изображение принимает вид

$$U(p) = \frac{U_0}{p}\lim_{t_2 \to t_1}\frac{e^{-pt_1} - e^{-pt_2}}{\Delta t}\Delta t = U_0 \Delta t e^{-pt_1}.$$

3, 4. Воспользуемся изображением производной $f'(t)$ функции $f(t)$:

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt = pF(p) - f(0).$$

При $p \to \infty$ имеем $\lim\limits_{p\to\infty} pF(p) = \lim\limits_{p\to\infty}\left[f(0) + \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt\right] = f(0)$, а при $p \to 0$

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = f(0) + f(t)\Big|_0^\infty = f(\infty).$$

5. *а*) $i(+0) = 0$, $i(\infty) = U_0/2r$; *б*) $i(+0) = U_0/r$, $i(\infty) = 0$; *в*) $i(+0) = U_0/r$, $i(\infty) = U_0/r$; *г*) $i(+0) = 0$, $i(\infty) = 0$; *д*) $i(+0) = U_0/r$, $i(\infty) = 0$.

10.2. Расчет переходных процессов операторным методом

ВОПРОСЫ

1. При расчете переходных процессов операторным методом токи в катушках индуктивности и напряжения на конденсаторах в момент времени $t = +0$ входят в уравнения второго закона Кирхгофа и учитываются, таким образом, на начальной стадии решения задачи, а именно на этапе составления уравнений в операторной форме. При расчете переходных процессов классическим методом начальные условия (токи в катушках и напряжения на конденсаторах) учитывают уже после составления и решения уравнений, а именно на этапе нахождения постоянных интегрирования, входящих в решение дифференциальных уравнений цепи.

2. В общем случае при ненулевых начальных условиях ток $I(p)$ на входе двухполюсника нельзя представить в виде $I(p) = U(p)/Z(p)$, где $U(p)$ — операторное изображение входного напряжения. Поэтому операторное сопротивление $Z(p)$ нельзя получить, заменив в выражении $Z(j\omega)$ комплексного сопротивления двухполюсника величину $j\omega$ на оператор p. Однако при нулевых начальных

условиях из выражения $I(p) = U(p)/Z(p)$ можно найти операторное сопротивление $Z(p) = U(p)/I(p)$, которое совпадает с комплексным сопротивлением $Z(j\omega)$ после замены в нем величины $j\omega$ на оператор p.

4. При нулевых начальных условиях уравнения законов Кирхгофа можно получить, заменяя в соответствующих уравнениях комплексного метода комплексные токи $\dot{I}$, напряжения $\dot{U}$, сопротивления Z и проводимости Y на величины $I(p)$, $U(p)$, $Z(p)$, $Y(p)$. Обратное также справедливо: записав уравнения законов Кирхгофа, можем, принимая начальные условия нулевыми, перейти к уравнениям в комплексной форме после замены в них оператора p на величину $j\omega$.

7. Если полином $H(p)$ операторного изображения тока $I(p) = G(p)/H(p)$ не имеет комплексных корней, то все коэффициенты $G(p)/H(p)$ вещественные. Если же он имеет хотя бы одну пару комплексно-сопряженных корней $p_1 = -\alpha + j\omega$ и $p_2 = -\alpha - j\omega$, то коэффициенты $A(p_1) = G(p_1)/H'(p_1)$, $A(p_2) = G(p_2)/H'(p_2)$, входящие в выражение искомого тока $i(t) = \exp(-\alpha t)[A(p_1)\exp(j\omega t) + A(p_2)\exp(-j\omega t)]$ в общем случае, когда $A(p_1) \neq A(p_2)$, должны быть комплексными, так как только тогда ток $i(t)$ будет вещественным.

8. Из уравнения $Z(p)I(p) = U(p)$, в котором $I(p)$ — ток на входе двухполюсника, $Z(p)$ — его операторное сопротивление, следует, что полином $Z(p)$ совпадает с характеристическим полиномом соответствующего дифференциального уравнения цепи. Действительно, переход от дифференциального уравнения цепи к характеристическому выполняется так же, как и переход от дифференциального уравнения к операторному, а именно путем замены k-й производной тока на k-ю степень величины α (при составлении характеристического уравнения) либо на k-ю степень оператора p при получении операторного уравнения. В последнем случае начальные условия можно всегда принять нулевыми, так как свойства цепи не зависят от задаваемых начальных условий. При расчете операторного сопротивления цепи токи всех катушек индуктивности и напряжения на всех конденсаторах следует принять равными нулю, все источники ЭДС должны быть замкнуты накоротко, а ветви с источниками тока — разорваны.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Операторные сопротивления цепей соответствующих вариантов равны:

а) $Z(p) = \dfrac{r_1 r_2 + pL(r_1 + r_2)}{r_2 + pL}$; *б)* $Z(p) = \dfrac{r + pL + p^2 rLC}{rCp + 1}$; *в)* $Z(p) = \dfrac{r + pL + p^2 rLC}{(r + pL)Cp}$;

г) $Z(p) = \dfrac{pL(prC + 1)}{Cp(r + pL) + 1}$; *д)* $Z(p) = \dfrac{r + pL}{(r + pL)pC + 1}$; *е)* $Z(p) = \dfrac{r + pL + p^2 rLC}{p^2 LC + 1}$.

2. Изображенным на рис. Р10.1 схемам электрических цепей соответствуют записанные в операторной форме уравнения законов Кирхгофа:

а) $I_r(p) = I_L(p) + I_C(p)$, $rI_r(p) + pLI_L(p) = E(p) + Li_L(0)$, $pLI_L(p) - \dfrac{1}{Cp}I_C(p) =$

$= Li_L(0) + \dfrac{E}{p} + \dfrac{u_C(0)}{p}$.

б) $I_C(p) = \Im(p) + I_L(p),\ pLI_L(p) + \dfrac{1}{Cp} I_C(p) = Li_L(0) - \dfrac{u_C(0)}{p}.$

д) $I_L(p) = I_C(p) + I_{r_1}(p),\ \Im(p) + I_{r_1}(p) = I_{r_2}(p),\ I_L(p)pL + I_C(p)\dfrac{1}{Cp} =$

$= \dfrac{E}{p} + Li_L(0) - \dfrac{u_C(0)}{p},\ I_{r_1}(p)r_1 + I_{r_2}(p)r_2 - I_C(p)\dfrac{1}{Cp} = \dfrac{u_C(0)}{p}.$

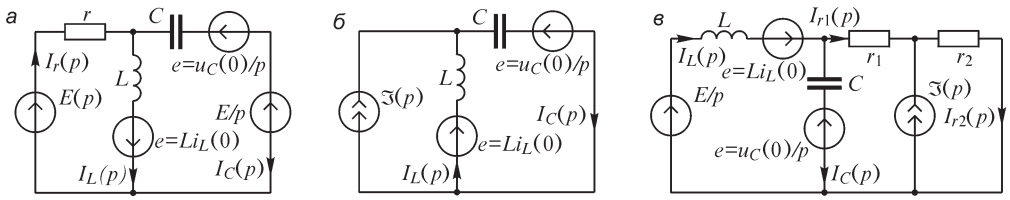


Рис. Р10.1

4. Учитывая, что операторное изображение ЭДС и тока заданных источников суть $E(p) = \dfrac{E_m\omega}{p^2+\omega^2}$, $\Im(p) = \dfrac{\Im_m\omega}{p^2+\omega^2}$, получаем:

б) $I(p) = \dfrac{E_m\omega[(r_1+r_2)Cp+1]}{(p^2+\omega^2)r_1(r_2Cp+1)}$; *в)* $I(p) = \dfrac{E_m\omega Cp}{(p^2+\omega^2)(p^2LC+1)}$;

г) $I(p) = \dfrac{E_m\omega(r_1+r_2+pL)}{(p^2+\omega^2)r_1(pL+r_2)}$; *д)* $U(p) = \dfrac{J_m\omega r}{(p^2+\omega^2)(prC+1)}$;

е) $U(p) = \dfrac{\Im_m\omega rpL}{(p^2+\omega^2)(pL+r)}$; *з)* $I(p) = \dfrac{E_m\omega(pL+r)}{(p^2+\omega^2)[(r_1+r_2)pL+r_1r_2]}$.

5. Учитывая заданные начальные условия $i_L(-0) = 0$, $u_C(-0) = U_0 = 120$ В при составлении уравнений законов Кирхгофа в операторной форме

$$-I_1(p) + I_2(p) + I_3(p) = 0,$$

$$rI_1(p) + \frac{I_2(p)}{Cp} = \frac{U_0}{p} - \frac{u_C(0)}{p},$$

$$I_3(p)pL - \frac{I_2(p)}{Cp} = \frac{u_C(0)}{p}$$

и решая их относительно тока $I_2(p)$, получаем:

$$I_2(p) = -\frac{u_C(0)rC}{p^2rLC + pL + r} = \frac{-4{,}8\cdot 10^{-2}}{4\cdot 10^{-5}p^2 + 0{,}1p + 40}.$$

Решая уравнение $H(p) = 0$, получаем $p_1 = -2000$, $p_2 = -500$. Далее находим $G(p_1) = G(p_2) = -4{,}8\cdot 10^{-2}$, $H'(p_1) = -0{,}06$, $H'(p_2) = 0{,}06$ и ток $i_2(t) = 0{,}8e^{-2000t} - 0{,}8e^{-500t}$ А.

Далее получаем:

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_2(t)dt + u_C(0) = -40e^{-2000t} + 160e^{-500t},\ i_3(t) = 3 + 0{,}2e^{-2000t} - 3{,}2e^{-500t}\ \text{А},$$

$$i_1(t) = 3 + e^{-2000t} - 4e^{-500t}\ \text{А}.$$

7. Раскладывая выражения $I(p)$ на простые дроби, находим:

$$а)\ I(p) = \frac{U_0}{r}\left[\frac{Ap+B}{(p+1)^2} + \frac{C}{p+3}\right] = \frac{U_0}{r}\left[\frac{0{,}25p+0{,}75}{(p+1)^2} - \frac{0{,}25}{p+3}\right],$$

$$i(t) = \frac{U_0}{4r}[e^{-t} + 2te^{-t} - e^{-3t}];$$

$$б)\ i(t) = \frac{U_0}{r}(1 - 0{,}25e^{-0{,}5t});$$

$$в)\ I(p) = U_0\frac{2p+1}{(p^2+\omega^2)(p+2)} = U_0\left[\frac{Ap+B}{p^2+\omega^2} + \frac{C}{p+2}\right] =$$

$$= U_0\left[\frac{3p+2+2\omega^2}{(4+\omega^2)(p^2+\omega^2)} - \frac{3}{(4+\omega^2)(p+2)}\right],$$

$$i(t) = \frac{3U_0}{4+\omega^2}\cos\omega t + \frac{(2+2\omega^2)U_0}{\omega(4+\omega^2)}\sin\omega t - \frac{3U_0}{4+\omega^2}e^{-2t}.$$

8. Подставляя в выражение $I(p) = \dfrac{U(p)}{r+pL}$ изображение $U(p) = \dfrac{U_m}{p+\alpha}$ входного напряжения, получаем ток $I(p) = \dfrac{U_m}{L(p+\alpha)(p+\delta)}$, где $\delta = \dfrac{r}{L}$,

$$i(t) = \frac{U_m}{r-\alpha L}(e^{-\alpha t} - e^{-\delta t}).$$

Зависимость $i(t)$ при $\delta = 2\alpha$ изображена на рис. Р9.5. Ток $i(t)$ достигает наибольшего значения, равного $\dfrac{U_m}{2r}$, при

$$t_0 = \frac{1}{\delta-\alpha}\ln\frac{\delta}{\alpha} \cong \frac{0{,}3}{\alpha}\ \text{с}.$$

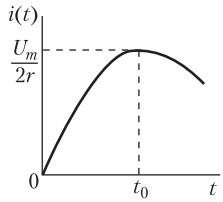


Рис. Р9.5

9. Записываем уравнения

$$r_1 i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} = U_0,$$

$$r_2 i_2 + M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} = 0$$

в операторной форме

$$(r_1 + pL_1)I_1(p) + MpI_2(p) = U_0/p,$$

$$MpI_1(p) + (r_2 + L_2 p)I_2(p) = 0$$

и, вводя обозначения $\delta_1 = \dfrac{r_1}{L_1}, \delta_2 = \dfrac{r_2}{L_2}, \sigma = 1 - k^2, k^2 = \dfrac{M^2}{L_1 L_2}$, после простых преобразований получаем:

$$I_1(p) = \frac{U_0}{pL_1} \frac{\delta_2 + p}{[\sigma p^2 + (\delta_1 + \delta_2)p + \delta_1\delta_2]},$$

$$I_2(p) = -\frac{U_0 M}{L_1 L_2 [\sigma p^2 + (\delta_1 + \delta_2)p + \delta_1\delta_2]}.$$

Используя теорему разложения, находим величины

$$i_1(t) = \frac{U_0}{r_1} + \frac{U_0}{bL_1}\left[\left(1 + \frac{\sigma p_2}{\delta_2}\right)e^{p_1 t} - \left(1 + \frac{\sigma p_1}{\delta_1}\right)e^{p_2 t}\right], \quad U_2(t) = -\frac{U_0 M}{bL_1 L_2}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}),$$

где $b = \sqrt{(\delta_1 - \delta_2)^2 + 4k^2\delta_1\delta_2}$, $p_{1,2} = [-(\delta_1 + \delta_2) \pm b] \big/ 2\sigma$.

В частных случаях токи $i_1(t), i_2(t)$ выражаются более простыми формулами. Например, при $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ имеем

$$i_1(t) = \frac{U_0}{r_1} - \frac{U_0}{2r_1}\left(e^{-\frac{\delta}{1+k}t} + e^{-\frac{\delta}{1-k}t}\right), \quad i_2(t) = \frac{U_0}{2\sqrt{r_1 r_2}}\left(e^{-\frac{\delta}{1+k}t} + e^{-\frac{\delta}{1-k}t}\right).$$

При $k = 1$, т. е. при $M^2 = L_1 L_2$, получаем

$$i_1(t) = \frac{U_0}{r_1} - \frac{U_0}{r_1}\frac{\delta_2}{\delta_1 + \delta_2}e^{p_1 t}, \quad i_2(t) = -\frac{U_0}{M(\delta_1 + \delta_2)}e^{p_1 t}.$$

Если при этом $r_1 = r_2 = r$ и $L_1 = L_2 = L$, то

$$i_1(t) = \frac{U_0}{r}\left(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{\delta}{2}t}\right), \quad i_2(t) = -\frac{U_0}{2r}e^{-\frac{\delta}{2}t}.$$

10. Введем обозначения $G(j\omega) = G(\omega)\exp[j\ \ (\ \ )]$, $N(j\omega) = N(\omega)\exp[j\ \ (\omega)]$. Тогда получаем:

$$\frac{G(j\omega)}{H'(j\omega)}e^{j\omega t} + \frac{G(-j\omega)}{H'(-j\omega)}e^{-j\omega t} = \frac{G(\omega)e^{j\alpha(\omega)}e^{j\omega t}}{2j\omega N(\omega)e^{j\beta(\omega)}} + \frac{G(\omega)e^{-j\alpha(\omega)}e^{-j\omega t}}{-2j\omega N(\omega)e^{-j\beta(\omega)}} =$$

$$= \frac{G(\omega)[e^{j[\omega t + \alpha(\omega) - \beta(\omega)]} - e^{-j[\omega t + \alpha(\omega) + \beta(\omega)]}]}{2j\omega N(\omega)} = \frac{G(\omega)\sin[\omega t + \alpha(\omega) - \beta(\omega)]}{\omega N(\omega)} =$$

$$= \mathrm{Im}\left[\frac{G(\omega)e^{j\alpha(\omega)}}{\omega N(\omega)e^{j\beta(\omega)}}e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Im}\left[\frac{G(j\omega)}{\omega N(j\omega)}e^{j\omega t}\right].$$

11.1. Частотные характеристики непериодических сигналов

ВОПРОСЫ

5. Как видно из амплитудной частотной характеристики $U(\omega) = 2U_0|(\sin a\omega)/\omega|$ прямоугольного импульса длительностью $2a$ (см. рис. Р11.1), при уменьшении

длительности импульса ширина ее первого лепестка увеличивается, а амплитуда падает. Это означает, что ширина полосы частот, в пределах которой заключена основная часть энергии сигнала, увеличивается. Таким образом, длительность импульса и ширина той части его спектра, в которой заключена большая часть энергии сигнала, связаны обратно-пропорциональной зависимостью. Такая связь существует не только для прямоугольных импульсов, но и для сигналов других форм. Говорят, что чем меньше длительность сигнала, тем шире его спектр, понимая под ним полосу частот, определяющих его энергию.

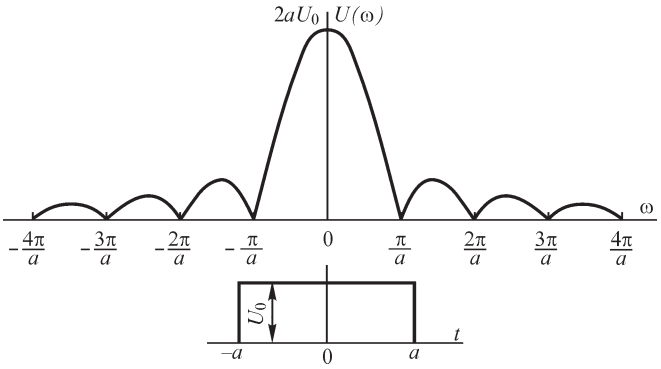


Рис. Р11.1

УПРАЖНЕНИЯ

2. Частотную характеристику напряжения $u(t)$ можно получить, записывая преобразование Лапласа $U(p)$ и заменяя оператор p на величину $j\omega$, либо вычисляя интеграл прямого преобразования Фурье. Упростить получение решения можно, представляя напряжение $u(t)$ в виде суммы сдвинутых во времени напряжений, частотную характеристику каждого из которых можно легко рассчитать.

Вариант *а*. Представляя напряжение в виде суммы двух сдвинутых на время $2a$ ступенчатых напряжений U_0 и $U_0(t - 2a)$ и записывая их операторные изображения U_0/p, $-U_0\,[\exp(-2ap)]/p$, получаем после замены оператора p на величину $j\omega$ искомую частотную характеристику $U(j\omega) = \frac{U_0}{j\omega}(1 - e^{-2ja\omega})$, $U(\omega) = 2U_0\left|\frac{\sin a\omega}{\omega}\right|$, $\alpha(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{\cos 2a\omega - 1}{\sin 2a\omega}$.

Амплитудная частотная характеристика $U(\omega)$ совпадает с характеристикой такого же, но симметрично расположенного относительно начала координат прямоугольного импульса (см. рис. Р11.1).

Вариант *б*. Используя операторное изображение синусоидального напряжения, запишем

$$U(p) = \frac{U_m\omega_0}{\omega_0^2 + p^2} + \frac{U_m\omega_0}{\omega_0^2 + p^2}\,e^{-\frac{p\pi}{\omega_0}}$$

и находим после замены $p \to j\omega$ частотную характеристику

$$U(j\omega) = \frac{U_m\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(1 + e^{-j\frac{\omega\pi}{\omega_0}}\right) = \frac{U_m\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(1 + \cos\frac{\omega\pi}{\omega_0} - j\sin\frac{\omega\pi}{\omega_0}\right),$$

а также амплитудную и фазовую частотные характеристики

$$U(\omega) = \left|\frac{2U_m\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\frac{\omega\pi}{2\omega_0}\right|, \quad \alpha(\omega) = -\mathrm{arctg}\frac{\sin\frac{\omega\pi}{\omega_0}}{1 + \cos\frac{\omega\pi}{\omega_0}} = -\frac{\omega\pi}{2\omega_0}.$$

7. Сопоставляя спектральную характеристику $U(j\omega)$ одиночного импульса

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{имп}}(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_0^T u_{\text{имп}}(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

с дискретным спектром периодического напряжения

$$U(jq\omega_1) = \int_0^T u(t)e^{-jq\omega_1 t}\,dt,$$

видим, что выражение для расчета величины $U(jq\omega_1) = U(2\pi q/T)$ можно получить, выполняя замену ω на $q\omega_1$ в выражении $U(j\omega)$.

11.2. Расчет переходных процессов при помощи частотных характеристик сигналов и электрических цепей

ВОПРОСЫ

3. Метод частотных характеристик позволяет рассчитать переходные процессы в цепях только при нулевых начальных условиях для токов в катушках и напряжениях на конденсаторах. При ненулевых начальных условиях можно, пользуясь линейностью электрической цепи, рассчитать токи переходного процесса, обусловленные начальными запасами энергии в цепи при отсутствии внешних источников (замкнутых накоротко источниках ЭДС и разомкнутых ветвях с источниками тока), а также действием внешних источников при нулевых начальных условиях. Последний расчет можно выполнить методом частотных характеристик.

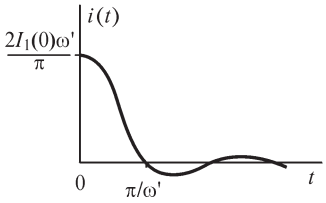


Рис. Р11.2

УПРАЖНЕНИЯ

6. Для варианта *а* имеем

$$i(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} I_1(\omega)\cos\omega t\,d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^{\omega'} I_1(0)\cos\omega t\,d\omega = \frac{2I_1(0)}{\pi t}\sin\omega' t.$$

Зависимость $i(t)$ изображена на рис. Р11.2.

Для варианта *б* получаем

$$i(t) = -\frac{2I_1(0)}{\pi\omega' t^2}(1 - \cos\omega' t).$$

12.1. Переходные и импульсные характеристики электрических цепей

ВОПРОСЫ

5. В промежутках времени между импульсами источник ЭДС должен быть замкнут накоротко, так как его внутреннее сопротивление равно нулю. Ветви, содержащие импульсные источники тока, в промежутках времени между импульсами должны быть разомкнуты, так как внутреннее сопротивление таких источников бесконечно велико.

6. Процессы в цепи в моменты действия импульсов описывают неоднородными дифференциальными уравнениями, тогда как в моменты паузы — однородными, с равной нулю правой частью.

8. При действии импульса катушки индуктивности и конденсаторы накапливают энергию в виде энергии магнитных и электрических полей. После окончания действия импульса токи катушек и напряжения на конденсаторах могут быть не равными нулю, так что в промежутках времени между импульсами протекают переходные процессы, при которых накопленная в этих элементах энергия рассеивается в резисторах.

10. В момент действия импульса тока заряд конденсатора изменяется на величину $\Delta q = I\Delta t$ и напряжение на нем получает приращение $\Delta u = \Delta q/C$. После окончания действия импульса напряжение на конденсаторе, как и его заряд, остаются неизменными до момента появления следующего импульса тока.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Для получения переходных характеристик на вход цепи подаем скачкообразное напряжение и, рассчитывая переходный процесс, находим напряжение $u_2(t)$ и ток $i_1(t)$. После деления их на величину u_1 находим искомые характеристики:

а) $h(t) = e^{-\frac{r}{L}t}$, $Y(t) = \frac{1}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right)$; *б)* $h(t) = \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right)$, $Y(t) = \frac{1}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right)$;

в) $h(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{r}{2L}t}$, $Y(t) = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{r}{2L}t}\right)$; *г)* $h(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{rC}}\right)$, $Y(t) = \frac{1}{r}e^{-\frac{t}{rC}}$;

д) $h(t) = e^{-\frac{t}{rC}}$, $Y(t) = \frac{1}{r}e^{-\frac{t}{rC}}$; е) $h(t) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{2t}{rC}}\right)$, $Y(t) = \frac{1}{2r}\left(1 + e^{-\frac{2t}{rC}}\right)$.

3. Записывая операторное изображение прямоугольного импульса $U(p) = U_0/p - (U_0/p)\exp(-pT) = (U_0/p)[1 - \exp(-pT)]$, а также операторное сопротивление цепи $Z(p) = \frac{r_н LCp^2 + pL + r_н}{r_н Cp + 1}$, получаем операторное изображение напряжения на сопротивлении нагрузки $U_r(p) = \frac{G(p)}{H(p)} = \frac{U_0 r_н (1 - e^{-pT})}{p(r_н LCp^2 + pL + r_н)}$. Для расчета функции $u_r(t)$ используем теорему разложения. Корни полинома $H(p)$ равны: $p_1 = 0$, $p_2 = -8{,}87 \cdot 10^5$, $p_3 = -1{,}13 \cdot 10^5$. Вычисляя значения $H'(p_1)$,

$H'(p_2)$, $H'(p_3)$, находим искомое напряжение $u_{1r}(t) = 10^{-2} + 1{,}45 \cdot 10^{-3} e^{-8{,}87 \cdot 10^5 t} - 1{,}15 \cdot 10^{-2} e^{-1{,}127 \cdot 10^5 t}$ В при $0 \le t \le T$ и $u(t) = u_{2r}(t) - u_{1r}(t - T)$ при $t \ge T$.

4. Указанные интегралы равны *а*) U_0; *б*) 0; *в*) 0; *г*) 0; *д*) 0; *е*) 0; *ж*) 1; *з*) 0; *и*) 1; *к*) τ; *л*) $U_0 1(t)$; *м*) $+\infty$.

5. В момент времени действия импульса выходная величина изменяется по закону $x_{\text{вых}}(t) = Kh(0)\delta(t)$, а после его окончания, для $t > 0$ — по закону $x_{\text{вых}}(t) = Kh_\delta(t)$.

6. Импульсные характеристики имеют вид:

а) $h_\delta(t) = -\dfrac{r}{L} e^{-\frac{r}{L}t}$, $Y_\delta(t) = \dfrac{1}{L} e^{-\frac{r}{L}t}$; *б*) $h_\delta(t) = \dfrac{r}{L} e^{-\frac{r}{L}t}$, $Y_\delta(t) = \dfrac{1}{L} e^{-\frac{r}{L}t}$;

в) $h_\delta(t) = -\dfrac{r}{4L} e^{-\frac{r}{2L}t}$, $Y_\delta(t) = \dfrac{1}{4L} e^{-\frac{r}{2L}t}$; *г*) $h_\delta(t) = \dfrac{1}{rC} e^{-\frac{t}{rC}}$, $Y_\delta(t) = -\dfrac{1}{r^2 C} e^{-\frac{t}{rC}}$;

д) $h_\delta(t) = -\dfrac{1}{rC} e^{-\frac{t}{rC}}$, $Y_\delta(t) = -\dfrac{1}{r^2 C} e^{-\frac{t}{rC}}$; *е*) $h_\delta(t) = \dfrac{1}{rC} e^{-\frac{2t}{rC}}$, $Y_\delta(t) = \dfrac{1}{-r^2 C} e^{-\frac{2t}{rC}}$.

7. В момент действия импульса конденсатор заряжается, причем ток заряда бесконечно велик. К моменту времени окончания импульса ($t = +0$) напряжение на конденсаторе становится равным $u(+0) = Kh_\delta(0) = K/rC$. После окончания действия импульса конденсатор разряжается, в связи с чем ток в цепи изменяет свое направление. При $t > 0$ имеем $u_C(t) = (K/rC)\exp(-t/rC)$, $i_C(t) = -(K/r^2C)\exp(-t/rC)$.

8. В момент действия импульса имеем $u_2(t) = Kh(0)\delta(t)$, $i_1(t) = KY(0)\delta(t)$, а после его окончания — $u_2(t) = Kh'(t)$, $i_1(t) = KY'(t)$.

В цепях вариантов *а*, *в*, *д* имеем $h(0) \ne 0$, в связи с чем напряжение u_2 в момент действия импульса становится бесконечным. Аналогично в цепях вариантов *в*, *г*, *д*, *е* имеем $Y(0) \ne 0$, и, следовательно, ток i_1 в момент действия импульса также становится бесконечным.

В цепях вариантов *б*, *г*, *е* получаем, как нетрудно проверить, $h(0) = 0$ и величина $u_2(0) = Kh'(0)$ оказывается равной в цепях вариантов *б*) $u_2(0) = Kr/L$; *г*) $u_2(0) = K/rC$; *е*) $u_2(0) = K/rC$. В цепях вариантов *а*, *б* имеем $Y(0) = 0$ и ток $i_1(0)$ равен: *а*) $i_1(0) = K/L$; *б*) $i_1(0) = K/L$.

Искомые величины после окончания действия импульса описываются выражениями:

а) $u_2(t) = -\dfrac{Kr}{L} e^{-\frac{r}{L}t}$, $i_1(t) = \dfrac{K}{L} e^{-\frac{r}{L}t}$; *б*) $u_2(t) = \dfrac{Kr}{L} e^{-\frac{r}{L}t}$, $i_1(t) = \dfrac{K}{L} e^{-\frac{r}{L}t}$;

в) $u_2(t) = \dfrac{Kr}{4L} e^{-\frac{r}{2L}t}$, $i_1(t) = \dfrac{K}{4L} e^{-\frac{r}{2L}t}$; *г*) $u_2(t) = \dfrac{K}{rC} e^{-\frac{t}{rC}}$, $i_1(t) = -\dfrac{K}{r^2 C} e^{-\frac{t}{rC}}$;

д) $u_2(t) = -\dfrac{K}{rC} e^{-\frac{t}{rC}}$, $i_1(t) = -\dfrac{K}{r^2 C} e^{-\frac{t}{rC}}$; *е*) $u_2(t) = \dfrac{K}{rC} e^{-\frac{2t}{rC}}$, $i_1(t) = -\dfrac{K}{r^2 C} e^{-\frac{2t}{rC}}$.

12.2. Расчет переходных процессов в цепях при помощи интеграла Дюамеля

ВОПРОСЫ

1. При условии *а*) интеграл сохранит свой вид, однако переходную проводимость $Y(t)$ следует рассчитать с помощью соотношения $Y(t) = i_k(t)/U_0$, где входное напряжение U_0 — постоянное. При расчете напряжения $u_k(t)$ на k-ой ветви переходную проводимость в выражении интеграла Дюамеля следует заменить на переходную характеристику $h(t) = u_k(t)/U_0$.

2. Входящая в интеграл Дюамеля переходная (либо импульсная) характеристика цепи определяется при нулевых начальных условиях. Поэтому непосредственное использование интеграла Дюамеля для расчета токов и напряжений при ненулевых начальных условиях невозможно. Для расчета переходного процесса можно воспользоваться методом наложения, принимая, что искомая величина содержит в переходном процессе две составляющие, одну из которых можно найти с помощью интеграла Дюамеля при нулевых начальных условиях, а другую составляющую, обусловленную начальным запасом энергии в цепи, — любым из рассмотренных ранее методов, например классическим или операторным.

Аналогичный подход можно применить и при расчете переходного процесса, возникающего при подключении активного двухполюсника к внешнему источнику с ЭДС (либо током) произвольной формы.

3. При условии *а* интеграл Дюамеля для $t < t_1$ равен $i(t) = u(0)Y(t) + \int_0^t u'_{1x} Y(t-x)dx$,

а для $t > t_1$ — $i(t) = u(0)Y(t) + \int_0^{t_1} Y(t-x)u'_{1x}dx + \int_{t_1}^t Y(t-x)u'_{2x}dx$.

Условие *б* означает, что напряжение имеет скачок $\Delta u = u_2(t_1) - u_1(t_1)$ при $t = t_1$. Поэтому можем записать при $t < t_1$: $i(t) = u(0)Y(t) + \int_0^t Y(t-x)u'_{1x}dx$ и при $t > t_1$:

$$i(t) = u(0)Y(t) + \int_0^{t_1} Y(t-x)u'_{1x}dx + [u_2(t_1) - u_1(t_1)]Y(t-t_1) + \int_{t_1}^t Y(t-x)u'_{2x}dx.$$

Входящее в последнее выражение слагаемое $\Delta u Y(t-t_1) = [u_2(t_1) - u_1(t_1)]Y(t-t_1)$ определяет ток в цепи, обусловленный действием скачкообразного напряжения $\Delta u(t_1)$, подключаемого ко входу цепи в момент времени t_1.

УПРАЖНЕНИЯ

4. Для вариантов напряжения $u(t)$ *а*, *б*, *д*, *е* выражения для тока $i_1(t)$ имеют различный вид при $t < t_1$ и при $t > t_1$, тогда как в вариантах *в*, *г* можно использовать единое выражение для тока при $t > 0$:

а) $t < t_1$: $i_1(t) = \int_0^t Y(t-x)\frac{U_0}{t_1}dx,\ u'_x = \frac{U_0}{t_1}$, $\quad t > t_1$: $i_1(t) = \int_0^{t_1} Y(t-x)\frac{U_0}{t_1}dx$;

б) $t < t_1$: $i_1(t) = \int_0^t Y(t-x)\frac{U_0}{t_1}\,dx$, $t > t_1$: $i_1(t) = \int_0^{t_1} Y(t-x)\frac{U_0}{t_1}\,dx - U_0 Y(t-t_1)$;

д) $t < t_1$: $i_1(t) = \int_0^t Y(t-x)\frac{U_0}{t_1}\,dx$, $t > t_1$: $i_1(t) = \int_0^{t_1} Y(t-x)\frac{U_0}{t_1}\,dx + (U_1 - U_0)Y(t-t_1)$;

е) $t < t_1$: $i_1(t) = U_m Y(t) - \int_0^t Y(t-x)U_m\omega\sin\omega x\,dx$;

$t > t_1$: $i_1(t) = U_m Y(t) - \int_0^{t_1} U_m\omega Y(t-x)\sin\omega x\,dx$.

Например, для цепи варианта *а* при напряжении вида *б* имеем при $t < t_1$

$$i_1(t) = \int_0^t \frac{1}{r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\cdot\frac{U_0}{t_1}\,dt = \frac{U_0}{rt_1}t - \frac{U_0}{rt_1}\tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

и при $t > t_1$

$$i_1(t) = \frac{U_0}{r}\left[1 - \frac{\tau}{t_1}\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right)\right]e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}.$$

5. Для цепи варианта *г* переходная проводимость $Y(t) = \frac{1}{r}e^{-\frac{t}{\tau}}$, так что можем записать при $t < T/4$

$$i_1(t) = \int_0^t \frac{1}{r}e^{-\frac{t-x}{\tau}}U_m\omega\cos\omega x\,dx = \frac{\omega U_m}{r(\tau^{-2} + \omega^2)}\left[\left(\frac{1}{\tau}\cos\omega t + \omega\sin\omega t\right) - \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right],$$

при $T/4 < t < T/2$

$$i(t) = \int_0^{T/4}\frac{1}{r}U_m\omega e^{-\frac{t-x}{\tau}}\cos\omega x\,dx - \frac{U_m}{2\sqrt{2}r}e^{-\frac{t-T/4}{\tau}} + \int_{T/4}^t \frac{1}{2r}U_m\omega e^{-\frac{t-x}{\tau}}\cos\omega x\,dx$$

и при $t > T/2$

$$i(t) = \int_0^{T/4}\frac{1}{r}U_m\omega e^{-\frac{t-x}{\tau}}\cos\omega x\,dx - \frac{U_m}{2r}e^{-\frac{t-T/4}{\tau}} + \int_{T/4}^{T/2}\frac{1}{2r}U_m\omega e^{-\frac{t-x}{\tau}}\cos\omega x\,dx - \frac{U_m}{2r}e^{-\frac{t-T/2}{\tau}}.$$

6. Представляя напряжение $u(t)$ на входе цепи в виде последовательности прямоугольных импульсов напряжения амплитудами $u(t)$ и длительностью Δx, запишем ток, обусловленный действием в момент времени t одного импульса напряжения: $i(t) = Y'(t-x)u(x)\Delta x + Y(0)u(t)$. Здесь первое слагаемое определяет ток при $t > 0$ после окончания действия импульса, а второе слагаемое — ток во время действия импульса. Суммируя токи от всех импульсов при $t > 0$ и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем искомое выражение

$$i(t) = u(t)Y(0) + \int_0^t Y'(t-x)u(x)dx.$$

12.3. Расчет переходных процессов в цепях при действии последовательности импульсов

УПРАЖНЕНИЯ

1. Учитывая, что цепь содержит один реактивный элемент и действующие на ее входе импульсы имеют прямоугольную форму, можем решать разностное уравнение

$$x_{\text{вых}}[n+1] = x_{\text{вых}}[n]\exp(-T/\tau) + x_{\text{вх}}[n](h(T) - h(T - T_{\text{и}})) = a\, x_{\text{вых}}[n] + b\, x_{\text{вх}}[n],$$

где $x_{\text{вых}}[n+1] = u_C[n+1]$, $x_{\text{вх}}[n] = U_0 \cdot 1[n]$, $h(t)$ — переходная характеристика цепи.

Так как $h(t) = \dfrac{r_2}{r_1 + r_2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$, где $\tau = \dfrac{r_1 r_2 C}{r_1 + r_2}$, то

$$b = h(T) - h(T - T_{\text{и}}) = h(t) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} e^{-\frac{T}{\tau}}\left(e^{-\frac{T_{\text{и}}}{\tau}} - 1\right).$$

Решение полученного уравнения имеет вид

$$u_C[n] = U_0 b \frac{1 - e^{-\frac{nT}{\tau}}}{1 - e^{-T/\tau}} = \frac{U_0 r_2}{r_1 + r_2} e^{-\frac{T}{\tau}} \frac{(e^{\frac{T_{\text{и}}}{\tau}} - 1)(1 - e^{-\frac{nT}{\tau}})}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}.$$

Подставляя численные значения, находим $u_C[n] \approx 7(1 - e^{-1{,}25n})$ В. При действии на входе цепи последовательности мгновенных импульсов напряжения постоянной интенсивности получаем

$$u_C[n] = \frac{K}{r_1 C} e^{-\frac{T}{\tau}} \frac{(1 - e^{-\frac{nT}{\tau}})}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \approx 5(1 - e^{-1{,}25n}) \text{ В}.$$

2. Обозначим через n номер импульса и номер промежутка времени, следующего за этим импульсом. В моменты действия импульсов ток получает приращение $\Delta i = KY(0)\delta(t)$, где $Y(0)$ — переходная проводимость $Y(t) = \dfrac{1}{r}(1 - e^{-t/\tau})$, найденная при $t = 0$ (здесь $\tau = L/r$). Учитывая, что $\Delta i = KY'(0) = K/L$, получаем соотношение, связывающее ток в цепи в моменты времени $(n-1)T + 0$ и $(n-1)T - 0$: $i[(n-1)T + 0] = i[(n-1)T - 0] + K/L$, $n = 1, 2, \ldots$ В промежутке времени n ток в цепи равен $i(t) = i[(n-1)T + 0]\exp(-T/\tau) = \{i[(n-1)T - 0] + K/L\}\exp(-t/\tau)$, $n = 1, 2, \ldots$

Таким образом, в конце промежутка времени с номером n ток равен

$$i(nT - 0) = \{i[(n-1)T - 0] + K/L\}\exp(-T/\tau).$$

Так как $i(-0) = 0$, то можем, принимая последовательно $n = 1, 2, \ldots$, записать

$$i(T - 0) = (K/L)\exp(-T/\tau),\ i(2T - 0) = (K/L)[\exp(-T/\tau) + \exp(-2T/\tau)],$$

$$i(3T - 0) = (K/L)[\exp(-T/\tau) + \exp(-2T/\tau) + \exp(-3T/\tau)], \ldots\ i(nT - 0) =$$

$$= (K/L)\sum_n \exp(-nT/\tau = (K/L)[\exp(-T/\tau)]\frac{1 - [\exp(-nT/\tau)]}{1 - [\exp(-T/\tau)]},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

В начале n-го промежутка времени ток в цепи равен

$$i(nT+0) = i(nT-0) + K/L = (K/L)\frac{1-\{\exp[-(n+1)T/\tau)]\}}{1-\exp(-T/\tau)}.$$

Здесь в выражениях для $i(nT-0)$ и $i(nT+0)$ значение $n=0$ соответствует первому импульсу (при $t=0$), $n=1$ — второму и т. д.

Для заданных численных значений находим $\tau = 2\cdot10^{-3}$ с, $K/L = 5\cdot10^{-3}$ А

$$i(nT-0) = 2{,}9\cdot10^{-3}[1-\exp(-n)],\ i(nT+0) = 7{,}9\cdot10^{-3}\{1-\exp[-(n+1)]\}.$$

В промежутках времени между импульсами ток в цепи

$$i(t) = i(nT+0)\exp(-t/\tau) = 7{,}9\cdot10^{-3}[1-e^{-(n+1)}]e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ (рис. Р12.1).}$$

В установившемся режиме при $n\to\infty$ получаем

$$i(\infty T-0) = (K/L)[\exp(-T/\tau)][1-\exp(-T/\tau)]^{-1} =$$

$$= 2{,}9\cdot10^{-3}\text{ А},\ i(\infty T+0) = 7{,}9\cdot10^{-3}\text{ А}.$$

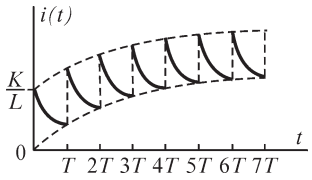


Рис. Р12.1

3. *а)* $f(z)$ 1; *б)* $f(z)$ $(1+z)/z$; *в)* $f(z)$ $(1+z+z^2)/z$; *г)* $f(z)$ $z/(1+z)$; *д)* $f(z)$ $\dfrac{z(1+z)}{1+z^2}$.

4. *а)* $U(z) = U_0\dfrac{z}{z-1} - U_0\dfrac{z}{z-e^{\alpha T}} = U_0\dfrac{z(1-e^{\alpha T})}{(z-1)(z-e^{\alpha T})}$;

б) $u(t)$ $U_m \sin\omega t$ $U_m\dfrac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}$;

$$U(z) = \frac{U_m}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega T}} - \frac{z}{z-e^{-j\omega T}}\right) = U_m\frac{z\sin\omega T}{1-2z\cos\omega T+z^2};$$

в) $U(z) = aT^2\dfrac{z(1+z)}{(z-1)^3}$.

5. Используя решетчатую функцию $f[n] = 1, -1, 1, -1, \ldots$, представим действующее на входе цепи напряжение в виде $u[n] = U_0 f[n]$, z-изображение которого $U(z)$ $U_0\, z/(1+z)$ (см. решение упр. 3, вариант *г*).

Записывая выражение для переходной проводимости $Y(t) = \dfrac{i_L(t)}{U_0} = \dfrac{1}{r_1}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$, находим:

$$h_{\text{и}}(t) = \frac{1}{r_1}(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) - \frac{1}{r_1}\left(1-e^{-\frac{t-T_{\text{и}}}{\tau}}\right) = \frac{1}{r_1}\left(e^{-\frac{T_{\text{и}}}{\tau}}-1\right)e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$h_{\text{и}}[n] = \frac{1}{r_1}\left(e^{\frac{T_{\text{и}}}{\tau}}-1\right)e^{\frac{nT}{\tau}},\quad H_{\text{и}}(z) = \frac{1}{r_1}\left(e^{\frac{T_{\text{И}}}{\tau}}-1\right)e^{\frac{T}{\tau}}\frac{1}{z-e^{-T/\tau}}.$$

Искомый ток имеет своим z-изображением функцию

$$I_L(z) \quad H_и(z)U(z) = \frac{U_0}{r_1}\left(e^{\frac{T_и}{\tau}} - 1\right)e^{-\frac{T}{\tau}}\frac{z}{(z+1)(z-e^{-T/\tau})},$$

которой соответствует решетчатая функция

$$i_L[n] = \frac{U_0}{r_1}\left(e^{\frac{T_и}{\tau}} - 1\right)e^{-\frac{T}{\tau}}\frac{(-1)^{n-1} + e^{-\frac{T}{\tau}}}{1+e^{\frac{T}{\tau}}},$$

корни полинома знаменателя $I_L(z)$ равны

$$z_1 \quad -1,\ z_2 = e^{-\frac{T_и}{\tau}},\ G(z_1) \quad -1,\ G(z_2) \quad e^{-\frac{T}{\tau}},\ H'(z_1) = -\left(1+e^{-\frac{T}{\tau}}\right),\ H'(z_2) = 1+e^{-\frac{T}{\tau}}.$$

Подставляя численные значения, получаем $i_L[n] \approx 0{,}83(-1)^{n-1} + 0{,}83e^{-2{,}4n}$ А.

13.1. Уравнения и системы параметров четырехполюсников

ВОПРОСЫ

7. Так как любая из пар величин $\dot{U}_1, \dot{I}_1, \dot{U}_2, \dot{I}_2$ может входить в левую (либо правую) часть уравнений четырехполюсника, то полное число вариантов уравнений, или, что то же, систем параметров четырехполюсника равно числу сочетаний из четырех элементов по два, что составляет 6. Наиболее распространенными являются системы *A*-, *Z*-, *Y*- и *H*-параметров.

УПРАЖНЕНИЯ

3. Для нахождения параметров четырехполюсника можно: *а*) записать уравнения законов Кирхгофа и после их преобразования приравнять коэффициенты при величинах $\dot{U}$, $\dot{I}$ к соответствующим параметрам; *б*) найти сопротивления четырехполюсника в режимах холостого хода и короткого замыкания и, используя известные соотношения, рассчитать искомые величины.

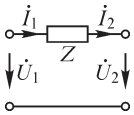


Рис. Р13.1

Представим четырехполюсники варианта *а* в виде как на рис. Р13.1. Записав уравнение второго закона Кирхгофа $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z$, с учетом соотношения $\dot{I}_1 = \dot{I}_2$, найдем $A = 1$, $B = Z$, $C = 0$, $D = 1$. Матрица *A*-параметров суть

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Для получения *Y*-параметров запишем уравнения в виде $\dot{I}_2 = \frac{1}{Z}\dot{U}_1 - \frac{1}{Z}\dot{U}_2$, $\dot{I}_1 = \frac{1}{Z}\dot{U}_1 - \frac{1}{Z}\dot{U}_2$, откуда находим

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{Z}\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Записывая входящее в матрицы **A**, **Y** сопротивление *Z* в комплексной форме, можем найти искомые параметры каждого из четырехполюсников варианта *а*.

Для цепей варианта *б* (рис. Р13.2) из уравнений законов Кирхгофа $\dot{U}_1 = \dot{U}_2$, $\dot{I}_1 = \frac{1}{Z}\dot{U}_2 + \dot{I}_2$ получаем

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{Vmatrix}.$$

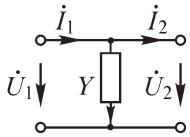


Рис. Р13.2

После преобразования уравнений к виду $\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z - \dot{I}_2 Z$, $\dot{U}_2 = \dot{I}_1 Z - \dot{I}_2 Z$ находим

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{Y}\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

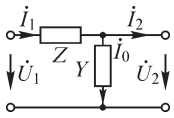


Рис. Р13.3

Для цепей варианта *в* (рис. Р13.3) из уравнений законов Кирхгофа $\dot{I}_1 = \dot{I}_0 + \dot{I}_2$, $\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z + \dot{U}_2$, $\dot{U}_2 = \frac{1}{Y}\dot{I}_0$ находим выражения $\dot{U}_1 = \dot{U}_2(1 + 2Y) + \dot{I}_2 Z$, $\dot{I}_1 = \dot{U}_2 Y + \dot{I}_2$, из которых следует:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1+ZY & Z \\ Y & 1 \end{Vmatrix}.$$

После преобразования уравнений законов Кирхгофа к виду $\dot{I}_1 = \frac{1}{Z}\dot{U}_1 - \frac{1}{Z}\dot{U}_2$, $\dot{I}_2 = \frac{1}{Z}\dot{U}_1 - \left(\frac{1}{Z} + Y\right)\dot{U}_2$ находим *Y*-параметры:

$$\mathbf{Y} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{Z} & -\frac{1}{Z} \\ \frac{1}{Z} & -\left(\frac{1}{Z} + Y\right) \end{Vmatrix}.$$

Аналогично получаем матрицу

$$\mathbf{Z} = \begin{Vmatrix} Z + \frac{1}{Y} & -\frac{1}{Y} \\ \frac{1}{Y} & -\frac{1}{Y} \end{Vmatrix}.$$

Для нахождения *H*-параметров преобразуем уравнения законов Кирхгофа к виду $\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z + \dot{U}_2$, $\dot{I}_2 = \dot{I}_1 - \dot{U}_2 Y$. Матрица *H*-параметров

$$\mathbf{H} = \begin{Vmatrix} Z & 1 \\ 1 & -Y \end{Vmatrix}.$$

Для четырехполюсников варианта *а* *Z*-параметры не существуют, не существует также *Y*-параметров четырехполюсников варианта *б*.

ЗАДАЧИ

1. *A*-параметры симметричного четырехполюсника можно найти из соотношений $Z_{1к} = B/A$, $Y_{10} = Y_{10} = C/A$, $A^2 - BC = 1$ ($Z_{1к}$ — входное сопротивление в режиме

короткого замыкания, Y_{10} — входная проводимость в режиме холостого хода): $A = (1 - Z_{1к}Y_{10})^{-2}$, $B = Z_{1к}A$, $C = Y_{10}A$.

Для варианта *а* получаем

$$Z_{1к} = \frac{2Z_1Z_2}{2Z_1 + Z_2},\ \ Y_{10} = \frac{2(Z_1 + Z_2)}{Z_2(2Z_1 + Z_2)},\ \ A = \frac{2Z_1 + Z_2}{Z_2},\ \ B = 2Z_1,\ \ C = \frac{2(Z_1 + Z_2)}{Z_2^2}.$$

Z-параметры находим из соотношений $Z_{11} = Z_{10} = \dfrac{Z_2(2Z_1 + Z_2)}{2(Z_1 + Z_2)}$, $Z_{22} = -Z_{20} = -Z_{10}$, $Z_{12} = -Z_{21} = \sqrt{(Z_{1к} - Z_{11})Z_{22}}$.

Аналогично Y-параметры получаем, используя соотношения

$$Y_{11} = Y_{1к} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{2Z_1},\ Y_{22} = -Y_{2к} = -Y_{11},\ Y_{12} = -Y_{21} = \sqrt{(Y_{10} - Y_{11})Y_{22}}.$$

Отметим, что если некоторая система параметров четырехпролюсника получена (например, на основе опытов холостого хода и короткого замыкания), то для нахождения других систем параметров можно воспользоваться связывающими эти системы соотношениями.

Для варианта *б* находим

$$Z_{1к} = \frac{2Z_1Z_2}{2Z_1 + Z_2},\ Y_{10} = \frac{2}{Z_1 + Z_2},\ A = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 - Z_2},\ B = \frac{2Z_1Z_2}{Z_1 - Z_2},\ C = \frac{2}{Z_1 - Z_2}.$$

Для варианта *в* получаем $Z_{1к} = \dfrac{4Z(1 + ZY_0)}{1 + 2ZY_0}$, $Y_{10} = \dfrac{Y_0}{1 + 2ZY_0}$, $A = \sqrt{\dfrac{1 + 2ZY_0}{1 - 2ZY_0}}$.

Записывая уравнения законов Кирхгофа для цепи варианта *г*

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 j\omega L_1 - \dot{I}_2 j\omega M, \dot{U}_2 = \dot{I}_1 j\omega M - \dot{I}_2 j\omega L_2,$$

находим $Z_{11} = j\omega L_1$, $Z_{12} = -j\omega M$, $Z_{21} = j\omega M$, $Z_{22} = -j\omega L_2$. Используя соотношения между Z, Y и A- параметрами, получаем:

$$\mathbf{Y} = \frac{j}{\omega(M^2 - L_1L_2)}\begin{Vmatrix} L_2 & -M \\ M & -L_1 \end{Vmatrix},\quad \mathbf{A} = \frac{1}{M}\begin{Vmatrix} L_1 & j\omega(L_1L_2 - M^2) \\ \dfrac{1}{j\omega} & L_2 \end{Vmatrix}.$$

Аналогичный подход позволяет найти матрицы Z-, Y- и A-параметров для цепи варианта *д*

$$\mathbf{Z} = j\omega\begin{Vmatrix} L_1 + L_2 + 2M & -(L_2 + M) \\ L_2 + M & -L_2 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{j\omega(L_1L_2 - M^2)}\begin{Vmatrix} L_2 & -(L_2 + M) \\ L_2 + M & -(L_1 + L_2 + M) \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{L_2 + M}\begin{Vmatrix} L_1 + L_2 + 2M & j\omega(L_1L_2 - M^2) \\ 1/j\omega & L_2 \end{Vmatrix}.$$

Для цепи варианта *е* имеем

$$\mathbf{Z} = \begin{Vmatrix} j\omega L_1 + r & -(j\omega M + r) \\ j\omega M + r & -(j\omega L_2 + r) \end{Vmatrix}.$$

2. Условные положительные направления токов и напряжений принимаем такими же, как и на рис. Р13.1. Записывая уравнения законов Кирхгофа

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 j\omega L_1 - \dot{I}_2 j\omega M + \dot{U}_{N1}, \quad \dot{U}_2 = \dot{I}_1 j\omega M - \dot{I}_2 j\omega L_2 + \dot{U}_{N2}$$

и подставляя в них величины

$$\dot{U}_{N1} = \dot{I}_1 Z_{N11} + \dot{I}_2 Z_{N12}, \quad \dot{U}_{N2} = \dot{I}_1 Z_{N21} + \dot{I}_2 Z_{N22},$$

получаем

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1(j\omega L_1 + Z_{N11}) + \dot{I}_2(Z_{N12} - j\omega M), \quad \dot{U}_2 = \dot{I}_1(Z_{N21} + j\omega M) + \dot{I}_2(Z_{N22} - j\omega L_2).$$

Матрица коэффициентов этой системы уравнений суть искомая матрица Z-параметров.

3. Обозначим A-параметры четырехполюсника N с индексом N (A_N, B_N, C_N, D_N). Учитывая соотношения $\dot{U}_1 = \dot{U}_{N1}$, $\dot{I}_1 = \dot{I}_{N1} + \dot{U}_1 j\omega C$, $\dot{U}_2 = \dot{U}_{N2}$, $\dot{I}_2 = \dot{I}_{N2}$ (вариант *а*), переписываем уравнения

$$\dot{U}_{N1} = A_N \dot{U}_{N2} + B_N \dot{I}_{N2}, \; \dot{I}_{N1} = C_N \dot{U}_{N2} + D_N \dot{I}_{N2}$$

в виде $\dot{U}_1 = A_N \dot{U}_2 + B_N \dot{I}_2$, $\dot{I}_1 = (j\omega C A_N + C_N)\dot{U}_2 + (j\omega C \cdot B_N + D_N)\dot{I}_2$.

Из последних уравнений видно, что

$$A = A_N, \; B = B_N, \; C = j\omega C A_N + C_N, \; D = j\omega C B_N + D_N.$$

Для четырехполюсников вариантов *б* и *в* получаем аналогично

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} A_N + j\omega L C_N & B_N + j\omega L D_N \\ C_N & D_N \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{Vmatrix} A_N & A_N r + B_N \\ C_N & C_N r + D_N \end{Vmatrix}.$$

13.2. Схемы, эквивалентные четырехполюснику

ВОПРОСЫ

1. Количество независимых параметров симметричного четырехполюсника равно двум, однако простейшая эквивалентная схема такого четырехполюсника не может содержать два элемента: она содержит либо один (Y_0 в Т-образной схеме или Z_0 в П-образной схеме), либо три элемента (в Т-образной схеме при этом $Z_1 = Z_2$, а в П-образной схеме — $Y_1 = Y_2$). Поэтому нельзя утверждать, что число элементов простейшей эквивалентной схемы четырехполюсника всегда равно числу его независимых параметров.

УПРАЖНЕНИЯ

5. Приравнивая A-параметры Т- и П-образных схем, эквивалентных четырехполюснику, получаем $1 + Z_1 Y_0 = 1 + Y_2 Z_0$, $Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y_0 = Z_0$, $Y_0 = Y_1 + Y_2 + Y_1 Y_2 Z_0$, $1 + Z_2 Y_0 = 1 + Y_1 Z_0$, откуда находим $Z_0 = Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y_0$, $Y_1 = \dfrac{Z_2 Y_0}{Z_0}$, $Y_2 = \dfrac{Z_1 Y_0}{Z_0}$.

Для заданных вариантов получаем: *а*) $Z_0 = 2r$, $Y_1 = 0$, $Y_2 = 0$ (рис. Р13.4, *а*); *б*) $Z_0 = \dfrac{gL}{C}$, $Y_1 = \dfrac{1}{j\omega L}$, $Y_2 = j\omega C$, (рис. Р13.4, *б*);

в) $Z_0 = Z_1 = j\omega L$, $Y_1 = 0$, $Y_2 = Y_0 = g + j\omega C$ (в последнем случае Т- и П-образные схемы совпадают).

6. Параметры эквивалентных четырехполюснику схем можно найти различными способами: *а*) приравнивая коэффициенты при напряжениях и токах уравнений законов Кирхгофа, составленных для исходного четырехполюсника и его эквивалентной схемы; *б*) вычисляя параметры четырехполюсника (например, *А*-параметры) и определяя далее искомые параметры эквивалентных схем с помощью известных соотношений; *в*) преобразуя соединения элементов четырехполюсника к аналогичному соединению Т- или П-образных схем.

Для условия варианта *а* получаем $Z_1 = \dfrac{Z}{3}$, $Z_2 = \dfrac{4Z}{3}$, $Y_0 = \dfrac{3}{Z}$ (Т-образная схема) (рис. Р13.5, *а*) и $Z_0 = 3Z$, $Y_1 = \dfrac{4}{3Z}$, $Y_2 = \dfrac{1}{3Z}$ (П-образная схема).

Для условия варианта *б* имеем: $Z_1 = \dfrac{4Z}{3}$, $Z_2 = \dfrac{4Z}{3}$, $Y_0 = \dfrac{3}{Z}$ (Т-образная схема) (рис. Р13.5, *б*) и $Z_0 = 8Z$, $Y_1 = \dfrac{1}{2Z}$, $Y_2 = \dfrac{1}{2Z}$ (П-образная схема).

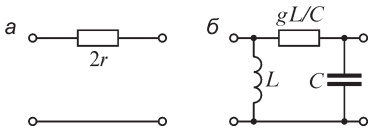


Рис. Р13.4

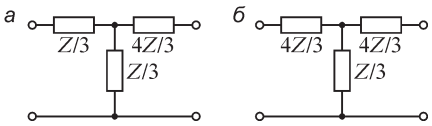


Рис. Р13.5

А-параметры четырехполюсника варианта *в* были найдены при решении задачи 1, §13.1:

$A = \dfrac{Z_1 + Z_2}{Z_1 - Z_2}$, $B = \dfrac{2Z_1Z_2}{Z_1 - Z_2}$, $C = \dfrac{2}{Z_1' - Z_2'}$, $D = A$. Учитывая связи между А-параметрами четырехполюсника и параметрами его эквивалентных схем, получаем, в частности, $Y_1 = Y_2 = \dfrac{A-1}{B} = \dfrac{1}{Z_1'}$, $Z_0 = B = \dfrac{2Z_1Z_2}{Z_1 - Z_2}$ (П-образная схема).

7. Так как $A = \sqrt{BC+1}$, то получаем: $Y_0 = C$, $Z_1 = Z_2 = \dfrac{1-\sqrt{BC+1}}{C\sqrt{BC+1}}$ (Т-образная схема), $Z_0 = B$, $Y_1 = Y_2 = \dfrac{1-\sqrt{BC+1}}{B\sqrt{BC+1}}$ (П-образная схема).

8. Запишем уравнения четырехполюсника в системе *А*-параметров: $\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2$, $\dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2$. Если $\dot{U}_1 = \text{const}$ и $\dot{I}_2 = \text{const}$, а $\dot{U}_2 = \text{var}$, то $A = 0$, таким ообразом $\dot{U}_1 = B\dot{I}_2$. Для Т-образной схемы имеем $A = 1 + Z_1Y_0 = 0$, $Z_1 = -1/Y_0 = -Z_0$, и при

$Z_1 = jx_1$ получаем $Z_0 = -jx_1$. Пусть, например, $Z_1 = j\omega L$, тогда $Z_0 = 1/j\omega C$. При этом $B = Z_1 + Z_2 + Z_1Z_2Y_0 = Z_1$ и $\dot{I}_2 = \dot{U}_1/Z_1$, т. е. параметры четырехполюсника не зависят Z_2. Эквивалентная Т-образная схема изображена на рис. Р13.6. Полученное выражение для тока $\dot{I}_2$ справедливо при любом сопротивлении $Z_{пр}$ и, следовательно, ток $\dot{I}_2$ не зависит от $Z_{пр}$.

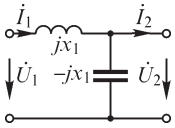


Рис. Р13.6

13.3. Экспериментальное определение параметров четырехполюсника

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Два четырехполюсника неразличимы при выполнении опытов холостого хода и короткого замыкания при любой частоте напряжения, если они содержат только резисторы. В общем случае параметры четырехполюсников, содержащих катушки индуктивности и конденсаторы, не могут быть одинаковыми при любой частоте напряжения. Поэтому они различимы при выполнении опытов холостого хода и короткого замыкания при различных частотах напряжения и неразличимы при частоте $\omega = \omega_0$.

4. Выражения $Z_{1к} = \dfrac{B}{D}$, $Y_{10} = \dfrac{C}{A}$, $Z_{2к} = \dfrac{B}{A}$, $Y_{20} = \dfrac{C}{D}$, $AD - BC = 1$ позволяют получить соотношения $\dfrac{Z_{1к}}{Z_{2к}} = \dfrac{Y_{20}}{Y_{10}}$, $A = \sqrt{\dfrac{Z_{1к}}{Z_{2к}(1 - Z_{2к}Y_{20})}}$, $B = Z_{2к}A$, $D = \dfrac{Z_{2к}}{Z_{1к}}A$, $C = Y_{20}D$.

Для нахождения A-параметров несимметричного четырехполюсника достаточно рассчитать три величины из четырех $Z_{1к}$, $Z_{2к}$, Y_{10}, Y_{20}. Если четырехполюсник симметричный, то учитывая соотношения $Z_{1к} = Z_{2к}$, $Y_{10} = Y_{20}$, можно ограничиться расчетом двух величин, например, $Z_{2к}$, Y_{20}.

Для варианта 1*а* находим: $Z_{1к} = \dfrac{1}{j\omega C}$, $Z_{2к} = \dfrac{L/C}{j(\omega L - 1/\omega C)}$, $Y_{20} = \dfrac{1}{j\omega L}$, $A = \dfrac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC}$, $B = \dfrac{1}{j\omega C}$, $C = \dfrac{1}{j\omega L}$, $D = 1$.

Для варианта 3*а* имеем: $Z_{1к} = r$, $Z_{2к} = \dfrac{jr\omega L}{r + j\omega L}$, $Y_{20} = \dfrac{1}{j\omega L}$, $A = \dfrac{r + j\omega L}{j\omega L}$, $B = r$, $C = \dfrac{1}{j\omega L}$, $D = 1$.

Четырехполюсники вариантов 1*в*, 2*в*, 3*в* симметричны, поэтому для нахождения их A-параметров достаточно предварительно рассчитать две величины, например $Z_{1к} = Z_{2к}$ и $Y_{10} = Y_{20}$, и далее найти искомые параметры, используя приведенные ранее соотношения.

Для варианта *в*-1 получаем: $Y_{10} = \dfrac{j\omega C}{1 - \omega^2 LC}$, $Z_{1к} = j\omega L\dfrac{2 - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC}$, $A = 1 - \omega^2 LC$, $B = j\omega L(2 - \omega^2 LC)$, $C = j\omega C$, $D = A = 1 - \omega^2 LC$.

5. Рассчитывая предварительно величины Y_{10}, $Z_{1к}$ с помощью соотношений $Y_{10} = \dfrac{I_1}{U_1}e^{-j\varphi_1}$, $Y_{1к} = \dfrac{I_2}{U_2}e^{-j\varphi_2}$, где $\varphi_1 = \arccos\dfrac{P_1}{U_1I_1}$, $\varphi_2 = \arccos\dfrac{P_2}{U_2I_2}$, можем найти

A-параметры четырехполюсника, используя полученные при решении предыдущего упражнения выражения: $A = \sqrt{\dfrac{1}{1 - Y_{10} Z_{1к}}}$, $B = Z_{1к} A$, $C = Y_{10} A$, $D = A$.

6. Подключим к выходным зажимам четырехполюсника сопротивление $Z_н$ и измерим величины $\dot{I}_1$, $\dot{U}_1$, $\dot{I}_2$. Из уравнений $\dot{U}_1 = (AZ_н + B)\dot{I}_2$, $\dot{I}_1 = (CZ_н + D)\dot{I}_2$, $AD - BC = 1$, $D = A$ можем найти параметры симметричного четырехполюсника.

Если четырехполюсник несимметричный, то три записанные выше уравнения следует дополнить еще одним, получаемым при выполнении еще одного опыта. Подключая, например, к выходным зажимам четырехполюсника сопротивление $Z'_н$ и измеряя величины $\dot{U}'_1$, $\dot{I}'_2$, получаем недостающее соотношение $\dot{U}'_1 = (AZ'_н + B)\dot{I}'_2$.

13.4. Соединение четырехполюсников

УПРАЖНЕНИЯ

4. Рассматривая каждый из четырехполюсников вариантов *а*, *б* и *в* как образованный каскадным соединением более простых четырехполюсников, A-параметры которых известны, можем получить искомую матрицу перемножением матриц $\mathbf{A}$ простых четырехполюсников. Для варианта *а* имеем:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 = \begin{Vmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & Z_2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 + Z_1 Y & Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y \\ Y & 1 + Z_2 Y \end{Vmatrix}.$$

Схему четырехполюсника варианта *б* рассматриваем как полученную каскадным соединением двух Т-образных четырехполюсников с элементами $Z_1, Y, 0{,}5Z_2$ и $0{,}5Z_2, Y, Z_1$:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 + Z_1 Y & Z_1 + \dfrac{Z_2}{2} + \dfrac{Z_1 Z_2 Y}{2} \\ Y & 1 + \dfrac{Z_2}{2} Y \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 + \dfrac{Z_2}{2} Y & \dfrac{Z_2}{2} + Z_1 + \dfrac{Z_1 Z_2 Y}{2} \\ Y & 1 + \dfrac{Z_1}{2} Y \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 + 2Z_1 Y + Z_2 Y + Z_1 Z_2 Y^2 & 2Z_1 + Z_2 + 2Z_1 Z_2 Y + 2Z_1^2 Y + Z_1^2 Z_2 Y^2 \\ 2Y + Z_2 Y^2 & 1 + 2Z_1 Y + YZ_2 + Z_1 Z_2 Y^2 \end{Vmatrix}.$$

Четырехполюсники вариантов *г*, *д* и *е* рассматриваем как образованные при параллельном соединении двух четырехполюсников с матрицами параметров $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_2$. Для варианта *г* получаем:

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{1}{Z_2} \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{Vmatrix} \dfrac{1 + Z_1 Y}{2Z_1 + Z_1^2 Y} & -\dfrac{1}{2Z_1 + Z_1^2 Y} \\ \dfrac{1}{2Z_1 + Z_1^2 Y} & -\dfrac{1 + Z_1 Y}{2Z_1 + Z_1^2 Y} \end{Vmatrix},$$

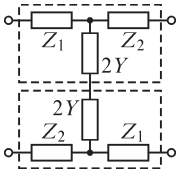


Рис. Р13.7

$$\mathbf{Y} = \begin{Vmatrix} \dfrac{1}{Z_2} + \dfrac{1+Z_1Y}{2Z_1+Z_1^2Y} & -\left(\dfrac{1}{Z_2} + \dfrac{1}{2Z_1+Z_1^2Y}\right) \\ \dfrac{1}{Z_2} + \dfrac{1}{2Z_1+Z_1^2Y} & -\left(\dfrac{1}{Z_2} + \dfrac{1+Z_1Y}{2Z_1+Z_1^2Y}\right) \end{Vmatrix}.$$

Аналогично можно получить решения и для вариантов *д* и *е*.

Четырехполюсник варианта *ж* представляем в виде двух последовательно соединенных Т-образных четырехполюсников (рис. Р13.7), матрицы *Z*-параметров которых складываем:

$$\mathbf{Z} = \begin{Vmatrix} Z_1 + \dfrac{1}{2Y} & -\dfrac{1}{2Y} \\ \dfrac{1}{2Y} & -Z_2 + \dfrac{1}{2Y} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} Z_2 + \dfrac{1}{2Y} & -\dfrac{1}{2Y} \\ \dfrac{1}{2Y} & -Z_1 + \dfrac{1}{2Y} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Z_1 + Z_2 + \dfrac{1}{Y} & -\dfrac{1}{Y} \\ \dfrac{1}{Y} & -Z_1 - Z_2 + \dfrac{1}{Y} \end{Vmatrix}.$$

13.5. Передаточные функции четырехполюсников

ВОПРОСЫ

2. Переходя к операторным изображениям входящих в дифференциальное уравнение входной и выходной величин и принимая начальные условия нулевыми, получаем в общем случае уравнение

$$(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_0)X_2(p) = (b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_0)X_1(p),$$

из которого находим передаточную функцию

$$K(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_0}.$$

4. Передаточная функция $K(p)$ цепи совпадает с операторным изображением $X_{\text{вых}}(p)$ сигнала $x_{\text{вых}}(t)$, если $X_{\text{вх}}(p) = 1$. Так как операторное изображение $X(p) = 1$ имеет δ-функция, то, следовательно, сигнал $x_{\text{вых}}(t)$ является импульсной характеристикой цепи, а ее операторное изображение — передаточной функцией цепи.

6. Выражение $K_1(p) = \dfrac{U_1(p)}{U_2(p)}$, обратное передаточной функции $K(p) = \dfrac{U_2(p)}{U_1(p)}$ четырехполюсника, не является передаточной функцией цепи, входное воздействие в которой приложено к выходным зажимам *2–2* цепи, а выходной сигнал определяется на входных зажимах *1–1*. Для нахождения передаточной функции цепи при замене местами ее входных и выходных зажимов следует, прикладывая импульсное воздействие к выходным зажимам, найти операторное изображение реакции цепи на ее входе.

7. Вещественному корню полинома знаменателя передаточной функции $K(p)$ пассивного четырехполюсника соответствует изменение аргумента $\Delta \arg K(j\omega)$ амплитудно-фазовой частотной характеристики $K(j\omega)$ цепи на угол $-0{,}5\pi$ при изменении частоты ω от 0 до ∞, а паре сопряженных комплексных корней — на угол $-\pi$. Если порядок полинома знаменателя равен *n*, то $\Delta \arg K(j\omega)$ составит $-0{,}5\pi n$.

Аналогично, вещественному корню полинома числителя функции $K(p)$, лежащему в левой полуплоскости, соответствует изменение $\Delta \arg K(j\omega)$ на угол $0{,}5\pi$, а паре сопряженных комплексных корней — на угол π. Если m_1 корней полинома числителя лежат в левой полуплоскости, а m_2 корней — в правой, то при изменении частоты от 0 до ∞ изменение функции $\arg K(j\omega)$ составит $0{,}5(m_1 - m_2)\pi$. Таким образом, при изменении частоты от 0 до ∞ получаем $\Delta \arg K(j\omega) = 0{,}5(m_1 - m_2 - n)\pi$. Поскольку $n = 5$, $m_1 + m_2 = 4$, $0{,}5(m_1 - m_2 - n)\pi = -2{,}5\pi$, то число m_2 нулей полинома числителя, лежащих в правой полуплоскости: $m_2 = 2$.

8. Если нули полинома знаменателя передаточной функции лежат в левой полуплоскости, то при изменении частоты ω от 0 до ∞ имеем $\Delta \arg K(j\omega) = -4{,}5\pi + 0{,}5\pi m = -3\pi$, если четырехполюсник минимально-фазовый. Поскольку задано значение $\Delta \arg K(j\omega) = -4\pi$, то один нуль полинома знаменателя лежит в правой полуплоскости и, следовательно, четырехполюсник не является минимально-фазовым.

9. С точки зрения технологии изготовление конденсаторов для низковольтных устройств малой мощности, в которых находят применение дифференцирующие и интегрирующие *rL*- и *rC*-цепи, существенно проще, чем катушек индуктивности. По этой же причине катушки индуктивности в ряде случаев заменяют такими электрическими цепями, содержащими резисторы, усилители и конденсаторы, в которых напряжение и ток на их входе связаны таким же соотношением, что и в катушках индуктивности.

УПРАЖНЕНИЯ

1. *Z*-параметры четырехполюсника, который можно представить как Г-образное звено (рис. Р13.8), находим, пользуясь соотношениями $Z_{11} = Z_{10}$, $Z_{22} = -Z_{20}$, $Z_{12} = -\sqrt{(Z_{1к} - Z_{11})Z_{22}}$: $Z_{11} = Z_1 + Z_2$, $Z_{22} = -Z_{21}$, $Z_{12} = -Z_2$, $Z_{21} = Z_2$.

Рассматривая *Z*-параметры как функции оператора *p*, используем для нахождения передаточной функции выражение

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_{21}(p)Z_{пр}(p)}{Z_{11}(p)Z_{пр}(p) - Z_{11}(p)Z_{22}(p) + Z_{12}(p)Z_{21}(p)} =$$

$$= \frac{Z_{пр}(p)}{\left[1 + \dfrac{Z_1(p)}{Z_2(p)}\right]Z_{пр}(p) + Z_1(p)}.$$

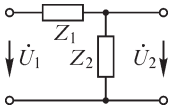


Рис. Р13.8

Варианты: *а*) $K(p) = \dfrac{1}{p^2LC + prC + 1}$; *б*) $K(p) = \dfrac{r}{2pL + r}$; *в*) $K(p) = \dfrac{1}{prC + r}$; *г*) $K(p) = \dfrac{pL}{2pL + r}$; *д*) $K(p) = \dfrac{rCp}{rCp + 2}$.

2. Вариант *а*: $X_1(p) = \dfrac{U_0}{p}$, $X_2(p) = \dfrac{I_0}{p - \alpha}$, $K(p) = \dfrac{I_0}{U_0}\dfrac{p}{p - \alpha}$.

Вариант *б*: $X_1(p) = \dfrac{U_0}{p}$, $X_2(p) = \dfrac{U_0\alpha}{p(p+\alpha)}$, $K(p) = \dfrac{\alpha}{p+\alpha}$.

Вариант *в*: $X_1(p) = I_{m_1}\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $X_2(p) = I_{m_2}\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$, $K(p) = \dfrac{I_{m_2}}{I_{m_1}}\dfrac{p}{\omega}$.

3. Для нахождения амплитудной и фазовой частотных характеристик выполняем замену $p \to j\omega$ в выражении для $K(p)$ и выделяем модуль $|K(j\omega)|$ и аргумент $\arg K(j\omega)$:

вариант *а*

$$K(j\omega) = \frac{I_0}{U_0}\frac{j\omega}{j\omega-\alpha} = \frac{I_0}{U_0}\frac{\omega^2 - j\alpha\omega}{\omega^2+\alpha^2},\ K(\omega) = |K(j\omega)| = \frac{I_0}{U_0}\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\alpha^2}},\ \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\omega},$$

вариант *б* $K(\omega) = \left|\dfrac{\alpha}{\alpha+j\omega}\right| = \left|\dfrac{\alpha(\alpha-j\omega)}{\alpha^2+\omega^2}\right| = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$, $\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} -\dfrac{\omega}{\alpha}$,

вариант *в* $K(\omega) = \dfrac{I_{m_2}}{I_{m_1}}$, $\varphi(\omega) = \dfrac{\pi}{2}$.

5. Используя схему замещения усилителя (рис. Р13.9, *а*), получаем для варианта *а* электрическую цепь, изображенную на рис. Р13.9, *б*.

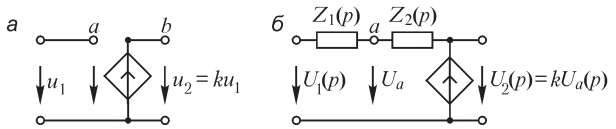


Рис. Р13.9

Записывая уравнение метода узловых напряжений для узла *а* и учитывая соотношение $U_{\text{вых}}(p) = kU_a(p)$, получаем после простых преобразований искомую передаточную функцию:

$$U_a(p)\left[\frac{1}{Z_1(p)} + \frac{1}{Z_2(p)}\right] - U_1(p)\frac{1}{Z_1(p)} - U_2(p)\frac{1}{Z_2(p)} = 0,$$

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{kZ_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p) - kZ_1(p)}.$$

При больших значениях коэффициента усиления k усилителя имеем

$$K(p) = -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)}.$$

При $Z_1(p) = r$, $Z_2(p) = \dfrac{1}{Cp}$ получаем передаточную функцию $K(p) = -\dfrac{1}{rCp}$, которая показывает, что изображенная на рис. Р13.10, *а* электрическая цепь обладает свойством интегрирования подаваемого на ее вход сигнала.

Если $Z_1(p) = \dfrac{1}{Cp}$, $Z_2(p) = r$ (соответствующая этим элементам электрическая цепь изображена на рис. Р13.10, *б*), то передаточная функция цепи принимает вид $K(p) = -rCp$. Как видно, напряжение на выходе цепи пропорционально производной входного напряжения, что свидетельствует о возможности ее использования в качестве дифференцирующей цепи.

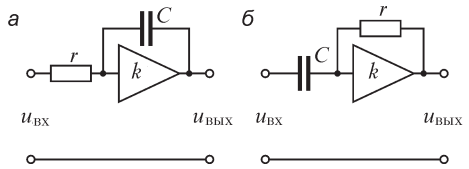


Рис. Р13.10

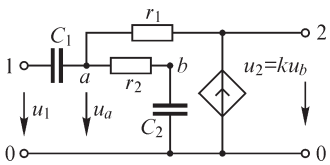


Рис. Р13.11

Заменяя усилитель электрической цепи варианта *г* его схемой замещения (рис. Р13.11) и записывая уравнения метода узловых напряжений для узлов *a*, *b*

$$U_a(p)\left(C_1p+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)-U_1(p)C_1p-U_2(p)\frac{1}{r_1}-U_b(p)\frac{1}{r_2}=0,$$

$$U_b(p)\left(C_2p+\frac{1}{r_2}\right)-U_a(p)\frac{1}{r_2}=0,$$

получаем после преобразований передаточную функцию

$$K(p)=\frac{kT_1p}{T_1T_2p^2+(T_1+T_2+C_2r_1)p+1-k},\ T_1=r_1C_1,\ T_2=r_2C_2.$$

Применяя аналогичный подход для решения задачи варианта *д* (рис. Р13.12) и записывая уравнение метода узловых напряжений

$$U_a(p)\left(\frac{1}{r_1+\dfrac{1}{C_1p}}+\frac{1}{r_2}+C_2p\right)-U_1(p)\frac{1}{r_1+\dfrac{1}{C_1p}}-U_2(p)\left(\frac{1}{r_2}+C_2p\right)=0,$$

получаем, учитывая соотношение $U_2(p) = kU_a(p)$, искомую передаточную функцию

$$K(p)=\frac{C_1r_2kp}{(1-k)T_1T_2p^2+p[(1-k)(T_1+T_2)+C_1r_2]+1-k},\ T_1=r_1C_1,\ T_2=r_2C_2.$$

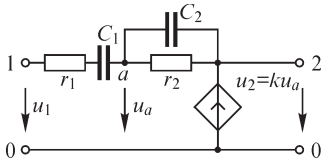


Рис. Р13.12

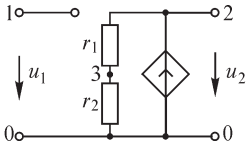


Рис. Р13.13

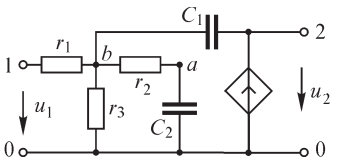


Рис. Р13.14

6. Электрическая цепь варианта *б* со схемой замещения усилителя изображена на рис. Р13.13.

Записывая уравнение метода узловых напряжений для узла *3*

$$U_3(p)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)-U_2(p)\frac{1}{r_1}=0,$$

и учитывая соотношение $U_2(p) = k[U_3(p) - U_1(p)]$, после преобразований находим выражение $K(p)=\dfrac{U_2(p)}{U_1(p)}=\dfrac{(r_1+r_2)k}{kr_2-r_1-r_2}$, которое при $k\to\infty$ переходит в искомое: $K(p)=\dfrac{r_1+r_2}{r_2}$.

На рис. Р13.14 изображена схема электрической цепи варианта *в*, в которой усилитель представлен его схемой замещения.

Уравнения метода узловых напряжений, записанные для узлов *а* и *в*

$$U_a(p)\left(\frac{1}{r_2}+C_2p\right)-U_b(p)\frac{1}{r_2}=0,$$

$$U_b(p)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+C_1p\right)-U_1(p)\frac{1}{r_1}-U_a(p)\frac{1}{r_2}-U_2(p)C_1p=0$$

и дополненные уравнением $k[U_2(p)-U_a(p)]=U_2(p)$, которое при $k\to\infty$ переходит в соотношение $U_2(p) = U_a(p)$, позволяют найти передаточную функцию

$$K(p)=\frac{U_2(p)}{U_1(p)}=\frac{1}{r_1r_2C_1C_2p^2+C_2p\left(r_1+r_2+\dfrac{r_1r_2}{r_3}\right)+\dfrac{r_1}{r_3}+1}.$$

ЗАДАЧИ

1. Для варианта *г* имеем:

$$Z_{11}=Z_{10}=Z_{20}=\frac{\dfrac{1}{Cp}\left(r+\dfrac{1}{Cp}\right)}{r+\dfrac{2}{Cp}}=\frac{p+1}{p(p+2)},\ Z_{21}=\sqrt{Z_{20}(Z_{10}-Z_{1k})}=\frac{1}{p(p+2)},$$

$$Z_{1\text{к}}=\frac{r\dfrac{1}{Cp}}{r+\dfrac{1}{Cp}}=\frac{1}{p+1},\ K_U(p)=\frac{Z_{21}r}{Z_{11}r-Z_{11}Z_{22}+Z_{12}Z_{21}}=\frac{1}{p+2}.$$

Заменяя оператор p на $j\omega$, находим частотные характеристики цепи:

$$K_U(j\omega)=\frac{1}{2+j\omega}=\frac{2-j\omega}{4+\omega^2},\ K_U(\omega)=\frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}},\ \alpha(\omega)=\operatorname{arctg}(-0{,}5\omega).$$

Соответствующие качественные кривые изображены на рис. Р13.15.

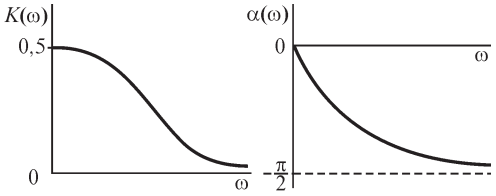


Рис. Р13.15

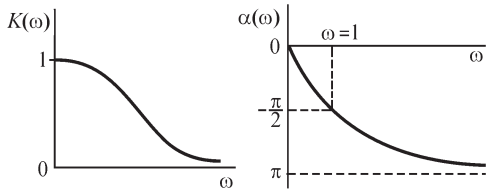


Рис. Р13.16

Из выражения для передаточной функции по току

$$K_I(p) = \frac{Z_{21}}{Z_{\text{пр}} - Z_{22}} = \frac{1}{p^2 + 3p + 1}$$

получаем аналогично

$$K_I(j\omega) = \frac{1}{1-\omega^2 + j3\omega},\ \ K_I(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 9\omega^2}},\ \ \alpha(\omega) = -\text{arctg}\,\frac{3\omega}{1-\omega^2}.$$

Полученные зависимости изображены на рис. Р13.16.

2. Функцию $K(j\omega)$ можем найти используя выражение $K(p) = \dfrac{Z_{\text{пр}}}{(1 + Z_1 Z_2^{-1})Z_{\text{пр}} + Z_1}$, полученное в решении упр. 1. С учетом того, что $Z_{\text{пр}} = \infty$, имеем

$$K(j\omega) = \frac{Z_2(j\omega)}{Z_1(j\omega) + Z_2(j\omega)}.$$

Такое же выражение получаем, рассчитывая вначале напряжение

$$U_2(j\omega) = \frac{U_1(j\omega)}{Z_1(j\omega) + Z_2(j\omega)} Z_2(j\omega),$$

где $Z_1(j\omega) = r_1 Z_2(j\omega) = \dfrac{r}{1 + jr\omega C}$ (вариант *а*), $Z_2(j\omega) = \dfrac{jr\omega L}{r + j\omega L}$ (вариант *б*),

и затем амплитудно-фазовую частотную характеристику $K(j\omega) = U_2(j\omega)/U_1(j\omega)$. Для варианта *а* получаем (сравните с решением задачи 1)

$$K(j\omega) = \frac{1}{2 + j\omega rC} = \frac{1}{\sqrt{4 + \omega^2 r^2 C^2}} \exp\,(-\,j0{,}5\omega rC).$$

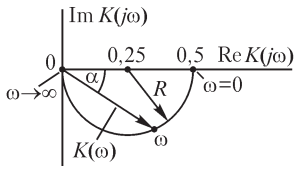


Рис. Р13.17

При $\omega = 0$ имеем $K(0) = 0{,}5$, $\alpha = 0$, а при $\omega \to \infty$ — $K(\omega) \to 0$, $\alpha \to -0{,}5\pi$. Годограф характеристики $K(j\omega)$ изображен на рис. Р13.17.

Для условия варианта *б* имеем

$$K(j\omega) = \frac{j\omega L}{r + j2\omega L} = \frac{2\omega^2 L^2 + jr\omega L}{r^2 + 4\omega^2 L^2},\ \ K(\omega) = \frac{\omega L}{\sqrt{4\omega^2 L^2 + r^2}},\ \ \alpha(\omega) = \text{arctg}\left(\frac{r}{2\omega L}\right).$$

3. Операторное изображение напряжения на катушке индуктивности

$$U_L(p) = I(p)pL = \frac{aL}{p(r+pL)}, \text{ так что } u_L(t) = \frac{La}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right).$$

Из условия $1 - e^{-\frac{r}{L}t_1} = 0{,}9$ находим момент времени $t_1 = -\frac{L}{r}\ln 0{,}1 \cong 2{,}3\frac{L}{r}$. При $t > t_1$ искомая погрешность будет менее 10 %.

4. Момент времени t_1 находим из соотношения

$$\frac{U_0 t_1}{rC} - U_0\left(1 - e^{-\frac{t_1}{rC}}\right) = 0{,}1\frac{U_0 t_1}{rC},$$

для чего решаем уравнение $t_1 + 1{,}1Te^{-\frac{t_1}{T}} = 1{,}1T$: $t_1 \cong 0{,}2\ T$.

При $t > t_1$ погрешность интегрирования превысит 10 %.

13.6. Обратные связи

УПРАЖНЕНИЯ

1. Передаточную функцию системы находим с помощью соотношения

$$K'(p) = \frac{K(p)}{1 - W(p)K(p)}$$

а) $K'(p) = \dfrac{k}{p\left(1 - \dfrac{k}{p}\beta\right)} = \dfrac{k}{p - \beta k}$; *б)* $K'(p) = \dfrac{k}{(Tp+1)\left(1 - \dfrac{k}{Tp+1}\beta\right)} = \dfrac{k}{Tp + 1 - \beta k}$;

д) $K'(p) = \dfrac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)\left(1 - \dfrac{\beta k}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}\right)} = \dfrac{kp}{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p - \beta k}$.

2. Обозначив через k' коэффициент усиления усилителя, охваченного обратной связью, а также вводя обозначения $k_1 = k + \Delta k$, $k_1' = k' + \Delta k'$, из выражения $\Delta k' = \dfrac{k_1}{1 - \beta k_1} - \dfrac{k}{1 - \beta k} = \dfrac{\Delta k k_1}{k(1 - \beta k_1)}$ находим величину $\dfrac{\Delta k'}{k'} = \dfrac{\Delta k}{k}\dfrac{1}{1 - \beta k_1}$.

Как видно из полученного соотношения, при охвате усилителя отрицательной обратной связью ($\beta < 0$) величина $\Delta k'/k'$ уменьшается в $1/(1 - \beta k_1)$ раз, его чувствительность к изменению коэффициента усиления снижается, а стабильность повышается. В случае положительной обратной связи величина $1 - \beta k_1$ становится меньше 1 и отношение $\Delta k'/k'$ возрастает, что свидетельствует о повышении чувствительности усилителя и снижении его стабильности.

3. Из выражения $K'(p) = \dfrac{k}{(Tp+1)\left[1 - \beta\dfrac{k}{(Tp+1)}\right]} = \dfrac{k}{(1 - \beta k)\left(\dfrac{Tp}{1 - \beta k} + 1\right)}$ следует, что характеризующая инерционность усилителя величина T уменьшается в $1 - \beta k$

раз ($\beta < 0$), однако при этом во столько же раз уменьшается его коэффициент усиления.

4. Записывая передаточную функцию устройства, охваченного обратной связью

$$K'(p) = \frac{k}{(Tp+1)\left(1 - \frac{k}{Tp+1}T_1 p\right)} = \frac{k}{p\left(-kT_1 + T\right) + 1},$$

из условия $\frac{T}{T - kT_1} = n$ находим величину $T_1 = \frac{1}{kn}T(n-1)$.

14.1. Характеристические параметры четырехполюсника

ВОПРОСЫ

2. Действующий на входе первого четырехполюсника источник тока с проводимостью Y можем заменить на эквивалентный ему источник ЭДС, внутреннее сопротивление которого $1/Y$. Таким образом, при согласованном соединении четырехполюсников входное сопротивление $Z_{1\text{вх}}$ первого звена должно быть связано с проводимостью источника тока соотношением $Z_{1\text{вх}} = 1/Y$.

5. Коэффициент фазы (угол сдвига по фазе между напряжениями на входе и выходе четырехполюсника) может быть как положительным, так и отрицательным, но его модуль всегда меньше значения $\pi/2$, так как в электрической цепи с одним реактивным элементом угол сдвига между током и напряжением лежит в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$.

Аналогичное рассуждение приводит к выводу, что при наличии двух реактивных элементов модуль коэффициента фазы не превышает угла π, а при наличии n реактивных элементов — угла $n\pi$.

7. В общем случае входные и выходные сопротивления звеньев цепной схемы, как и сопротивление приемника и внутреннее сопротивление источника, являются функциями частоты. Поэтому согласование соединения четырехполюсников при некоторой частоте еще не гарантирует его сохранения при других частотах.

Для согласования четырехполюсников при любой частоте величины $Z_{k\ \text{вх}}$, $Z_{k\ \text{вых}}$, $Z_{\text{г}}$, $Z_{\text{пр}}$ должны иметь одинаковые частотные характеристики. Это достигается, в частности, если схема содержит только резисторы.

8. В общем случае при произвольной частоте напряжения согласование соединения звеньев цепной схемы отсутствует, так как входные и выходные сопротивления звеньев цепной схемы есть функции частоты. Поэтому входящие в выражения для передаточных функций K_U и K_I величины Z_{1c}, $Z_{n+1,c}$ уже не будут являться характеристическими, и их использовать для вычисления этих функций нельзя.

9. Определяя меру передачи соотношением $\Gamma_k = \frac{\dot{U}_k \dot{I}_k}{\dot{U}_{k+1}\dot{I}_{k+1}}$, получаем выражение для меры передачи n каскадно соединенных четырехполюсников:

$$\Gamma = \frac{\dot{U}_1\dot{I}_1}{\dot{U}_n\dot{I}_n} = \frac{\dot{U}_1\dot{I}_1}{\dot{U}_2\dot{I}_2}\cdot\frac{\dot{U}_2\dot{I}_2}{\dot{U}_3\dot{I}_3}\cdot\ldots\cdot\frac{\dot{U}_{n-1}\dot{I}_{n-1}}{\dot{U}_n\dot{I}_n} = \Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_n.$$

10. Величины K_U, K_I не могут удовлетворять неравенствам варианта *в*, так как мощность в нагрузке четырехполюсника не может превосходить мощности во всей цепи, включающей в себя четырехполюсник и нагрузку.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Для электрической цепи варианта 9 имеем:

$A = 1 + Y_2Z_0 = 1 + j3{,}14\cdot10^{-4}$, $B = Z_0 = 10$ Ом,

$C = Y_1 + Y_2 + Y_1Y_2Z_0 = 10^{-5} - j3{,}2\cdot10^{-2}$ См, $D = 1 + Z_0Y_1 = 1 - j0{,}318$,

$Z_{\text{вх}\,c} = \sqrt{\dfrac{AB}{CD}} = 10{,}2 + j14{,}0$ Ом, $Z_{\text{вых}\,c} = \sqrt{\dfrac{DB}{CA}} = 14{,}7 + j10{,}7$ Ом,

$\Gamma = \ln(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}) = 0{,}42 - j0{,}37.$

Сопротивления в режимах холостого хода и короткого замыкания

$$Z_{10} = \frac{1}{Y_1 + \left(Z_0 + Y_2^{-1}\right)^{-1}} = 0{,}8\cdot10^{-6} + j31{,}5 \text{ Ом},\quad Z_{1\text{к}} = \frac{1}{Y_1 + Z_0^{-1}} = 9{,}1 + j2{,}9 \text{ Ом},$$

$$Z_{20} = \frac{1}{Y_2 + \left(Z_0 + Y_1^{-1}\right)^{-1}} = 10{,}0 + j31{,}44 \text{ Ом},\quad Z_{2\text{к}} = \frac{1}{Y_2 + Z_0^{-1}} = 10 - j3{,}14\cdot10^{-3} \text{ Ом}.$$

Характеристические параметры имеют значения:

$Z_{\text{вх}\,c} = \sqrt{Z_{10}Z_{1\text{к}}} = 10{,}2 + j14{,}0$ Ом, $Z_{\text{вых}\,c} = \sqrt{Z_{20}Z_{2\text{к}}} = 14{,}7 + j10{,}7$ Ом,

$$\Gamma = \operatorname{arsh}\left(\sqrt{\frac{Z_{1\text{к}}}{Z_{10} - Z_{1\text{к}}}}\right) = 0{,}42 - \text{j}0{,}37.$$

2. Для схемы варианта 9 передаточные функции по напряжению и току, выражаемые через характеристические параметры, равны:

$$K_U = \sqrt{\frac{Z_{\text{вых}\,c}}{Z_{\text{вх}\,c}}}\,e^{-} = 0{,}66 + j0{,}14,\quad K_I = \sqrt{\frac{Z_{\text{вх}\,c}}{Z_{\text{вых}\,c}}}\,e^{-\Gamma} = 0{,}55 + j0{,}32.$$

Вычисления отношений напряжений и токов на входе и выходе цепи приводят к выражениям

$$K_I = \frac{1}{1 + Z_{\text{пр}}Y_2 + (Z_0 + Z_0Z_{\text{пр}}Y_2 + Z_{\text{пр}})Y_1},\quad K_U = \frac{Z_{\text{пр}}}{Z_0(1 + Z_{\text{пр}}Y_2) + Z_{\text{пр}}},\quad Z_{\text{пр}} = Z_{\text{вых}\,c}.$$

При подстановке значений входящих в эти выражения величин получаем передаточные функции, совпадающие с рассчитанными выше.

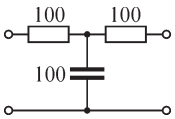


Рис. Р14.1

4. Заданные цепи можем рассматривать как полученные при каскадном соединении Т-образных звеньев (рис. Р14.1), меру пере-

дачи $\Gamma = 1{,}06 + j0{,}9$ каждого из которых рассчитываем аналогично рассмотренному в упр. 1. Получаем:

а) $K_U = K_I = e^{-2\Gamma} = -\ 0{,}028 - j0{,}12$; *б*) $K_U = K_I = e^{-3\Gamma} = -\ 0{,}038 - j0{,}017$.

5. Параметры эквивалентной Т-образной схемы четырехполюсника, получаемые в результате преобразования соединения треугольником в звезду (элементы r_1, r_3, r_1 на рис. Р14.2):

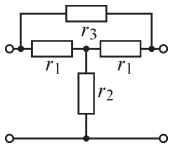


Рис. Р14.2

$$Z_1 = Z_2 = \frac{r_1 r_3}{2r_1 + r_3} = \frac{\operatorname{ch}\Gamma - 1}{\operatorname{sh}\Gamma} Z_c,\ Y_0 = \frac{(2r_1 + r_3)r_3}{2r_1^2(r_1 + r_3)} = \frac{1}{Z_c}\operatorname{sh}\Gamma.$$

Решая эти уравнения относительно величины r_1, получаем

$$r_1 = \sqrt{Z_1^2 + \frac{2Z_1}{Y_0}} = 100 \text{ Ом},\ r_3 = \frac{2Z_c}{\operatorname{cth}\frac{\Gamma}{2} - 1} = 172 \text{ Ом},\ r_2 = \frac{r_1^2}{r_3} = 58 \text{ Ом}.$$

14.2. Электрические фильтры

ВОПРОСЫ

4. Электрические цепи вариантов *а* и *б* не обладают фильтрующими свойствами, так как напряжения на их выходах подобны входным напряжениям и соотношения амплитуд и фазовых сдвигов любой из гармоник на их выходах точно такое же, как и на входах. Электрическая цепь варианта *в* является фильтром низкой частоты, так как высшие гармоники хотя и присутствуют в выходном сигнале, однако выражены слабее, чем во входном сигнале.

6. Сигнал проходит через фильтр без искажений, если фильтр является идеальным, т. е. если коэффициент затухания равен нулю и зависимость $\beta(\omega)$ — линейная.

7. Сигналы на входе и выходе идеального фильтра в полосе его пропускания одинаковы, если частотный спектр входного сигнала располагается внутри полосы пропускания фильтра, поэтому одинаковы как их амплитудные, так и фазовые частотные характеристики. Если при прохождении через идеальный фильтр фаза k-й гармоники входного сигнала изменяется на угол ψ_k, то форма сигнала на выходе фильтра будет такой же, что и на входе, при условии, что фаза гармоники порядка m изменяется в диапазоне полосы пропускания на угол $\psi_m = (m/k)\psi_k$. Поэтому получаем $\psi_m/m = \psi_k/k = \text{const} = C$. Учитывая, что $m = \omega_m/\omega_1$, где ω_1 — частота сигнала первой гармоники, получаем $\psi_m = (\omega_m/\omega_1)C = \omega_m C_1$.

8. Аргумент амплитудно-фазовой частотной характеристики $K(j\omega) = U_2(j\omega)/\ U_1(j\omega)$ изображенной на рисунке мостовой цепи, изменяясь от 2π до нуля при изменении частоты сигнала от нуля до бесконечности, не является линейной функцией частоты, в связи с чем цепь не может рассматриваться как идеальный фильтр. Хотя амплитудные частотные спектры сигналов $U_1(j\omega)$ и $U_2(j\omega)$ совпадают, их фазовые частотные спектры различаются, что и ведет к различию форм входного $u_1(t)$ и выходного $u_2(t)$ сигналов.

9. При отклонении зависимости β(ω) от линейной фильтр становится неидеальным и форма сигнала на его выходе в полосе его пропускания уже не будет повторять форму подаваемого на его вход сигнала, даже если коэффициент затухания фильтра равен нулю во всем диапазоне частот передаваемого через фильтр сигнала.

УПРАЖНЕНИЯ

2. Для расчета характеристических параметров используем выражения

$$Z_{1c} = \sqrt{Z_{10}Z_{1к}},\ Z_{2c} = \sqrt{Z_{20}Z_{2к}},\ \Gamma = \ln(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}).$$

С учетом соотношения $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{Z_{10}}{Z_{1к}}$ последнее выражение можно преобразовать к виду $\Gamma = \ln\dfrac{\sqrt{Z_{10}} + \sqrt{Z_{1к}}}{\sqrt{Z_{10} - Z_{1к}}}$.

Для цепи варианта *а* получаем

$$Z_{10} = 200(1 - 3{,}2j)\ \text{Ом};\ \ Z_{1к} = 200\ \text{Ом};\ \ Z_{20} = -637j\ \text{Ом};\ \ Z_{2к} = 182 - 57{,}2j\ \text{Ом};$$

$$Z_{1c} = 296 - 219j\ \text{Ом};\ \ Z_{2c} = 205 - 277j\ \text{Ом};\ \ \Gamma = 0{,}4 - 0{,}4j.$$

3. Зависимости α(ω) и β(ω) находим, записывая найденную при решении упражнения 2 меру передачи в виде Γ = α(ω) + *j*β(ω). Для расчета зависимости α(ω) при действии на входе фильтра идеального источника ЭДС и сопротивлении приемника $r_{пр} = 200$ Ом находим предварительно отношение $U_1(\omega)/U_2(\omega)$ и далее величину α как $\alpha = \ln(U_1/U_2)$. Например, для фильтра варианта *а* получаем: $\alpha(\omega) = \ln(U_1/U_2) = = 0{,}5\ln(4 + 5\cdot10^{-2}\omega^2)$. На рис. Р14.3 изображены зависимости α(lg ω) и β(lg ω) для фильтра варианта *а*.

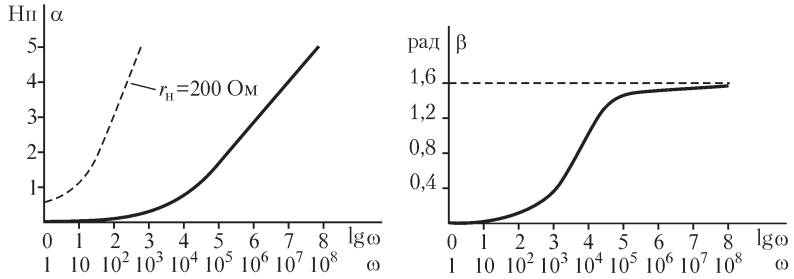


Рис. Р14.3

4. Искомые зависимости $Z_1(Z_и, Z_{пр})$, $Z_2(Z_и, Z_{пр})$ находим, используя выражения для сопротивлений Г-образного звена фильтра со стороны П- и Т-входов:

$$Z_{сп} = Z_{пр} = \frac{\sqrt{Z_1Z_2}}{\sqrt{1 + Z_1/(4Z_2)}},\quad Z_{ст} = Z_и = \sqrt{(Z_1/2)^2 + Z_1Z_2},$$

$$Z_1 = 2\sqrt{Z_и^2 - Z_иZ_{пр}},\quad Z_2 = \frac{Z_иZ_{пр}}{2\sqrt{Z_и^2 - Z_иZ_{пр}}}.$$

5. Вариант *а*. Заменяя в выражении для передаточной функции

$$K(p) = \frac{kg_1g_2}{p^2C_1C_2 + p(C_2g_1 + C_2g_2 + C_1g_2 - kC_1g_2) + g_1g_2}$$

(здесь $g_1 = 1/r_1$, $g_2 = 1/r_2$) p на $j\omega$, получаем после подстановки численных значений параметров элементов

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{7{,}88 \cdot 10^{-12}\omega^4 - 1{,}38 \cdot 10^{-8}\omega^2 + 0{,}01}}.$$

На рис. Р14.4 зависимость $K(\omega)$ построена в логарифмическом масштабе.

Вариант *б*. Передаточная функция цепи

$$K(p) = \frac{kp^2C_1C_2}{p^2C_1C_2 + p[C_2g_2 + C_1g_2 + (1-k)C_2g_1] + g_1g_2}$$

(здесь $g_1 = 1/r_1$, $g_2 = 1/r_2$). На рис. Р14.5 построена зависимость амплитудно-частотной характеристики

$$K(\omega) = \frac{\omega^2}{\sqrt{10^{-4}\omega^4 + 29\omega^2 + 1{,}26 \cdot 10^9}}$$

от частоты в логарифмическом масштабе.

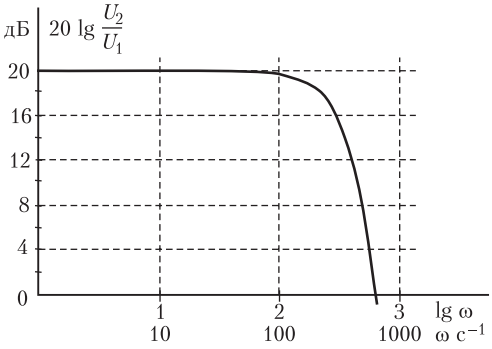


Рис. Р14.4

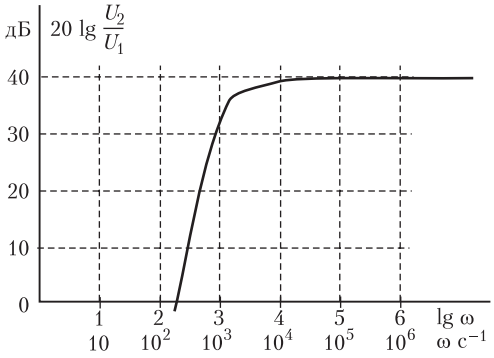


Рис. Р14.5

14.3. Электрические фильтры нижних частот типов *k* и *m*

ВОПРОСЫ

2. Так как частоты ω_c среза согласованных Г-звеньев совпадают, то при увеличении числа каскадно соединенных Г-звеньев участок характеристики $\alpha(\omega)$ при $0 \le \omega \le \omega_c$ будет иметь тот же вид, а крутизна другой ее части (при $\omega > \omega_c$) возрастет.

4. Для последовательно-производного фильтра с параметрами элементов $L = mL_0$, $C = mC_0$ имеем

$$Z_1 = j\omega mL_0,\ 2Z_2 = j\omega L_x + \frac{1}{j\omega mC_0},$$

$$\operatorname{th}\Gamma = \sqrt{\frac{Z_1}{4(Z_1 Z_2 + Z_1^2/4)}} = \frac{-4m^2 L_0 \omega^2}{4(L_0/C_0 - \omega^2 m L_0 L_x - \omega^2 m^2 L_0^2)}.$$

Частота среза, определяемая из условия Re (th) = 0, равна $\omega_c = \sqrt{\dfrac{L_0/C_0}{m^2 L_0^2 + m L_0 L_x}}$.

При $L_x = \dfrac{1-m^2}{m} L_0$ получаем: $\omega_c = \sqrt{\dfrac{L_0/C_0}{L_0^2}} = \dfrac{2R_0}{L}$, что совпадает с выражением для частоты среза прототипа.

5. Введение одновременно последовательного и параллельного *LC*-контуров в электрический фильтр улучшает его свойства за счет увеличения скорости роста затухания в полосе задерживания. Кроме того, подбором параметров контуров можно добиться большей равномерности характеристических сопротивлений фильтров, что позволяет обеспечить лучшее согласование фильтра с постоянным сопротивлением, которое во многих случаях является нагрузкой фильтра. Недостаток фильтра с двумя *LC*-контурами заключается в уменьшении его затухания при частотах, больших чем частоты резонанса контуров. Для увеличения затухания фильтра при больших частотах сигналов такие фильтры соединяют каскадно с фильтрами типа *k*, у которых коэффициент затухания неограниченно растет при $\omega \to \infty$.

8. Преобразование $p = bs$ изменяет параметры элементов фильтров: $L' = bL$, $C' = bC$, что ведет к изменению частоты среза фильтров $\omega'_c = \omega_c / b^2$ и уменьшению в b^2 раз полосы пропускания (полосы задерживания) фильтра нижних (верхних) частот.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Частота среза равна $\omega_c = 2(LC)^{-0,5} = 2,5 \cdot 10^5$ с$^{-1}$. Характеристические сопротивления цепи со стороны Т- и П-входов

$$Z_{ст} = 12,5\sqrt{1 - 1,6 \cdot 10^{-11}\omega^2}\ \text{Ом},\ Z_{сп} = \frac{12,5}{\sqrt{1 - 1,6 \cdot 10^{-11}\omega^2}}\ \text{Ом},\ \operatorname{th}\Gamma = \frac{\omega}{\sqrt{-6,25 \cdot 10^{10} + \omega^2}}.$$

Зависимости $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ изображены на рис. Р14.6 (принят логарифмический масштаб по оси ω). Затухание равно 3 дБ при частоте $\omega = 2,65 \cdot 10^5$ с$^{-1}$, коэффициент фазы равен $\pi/4$ при частоте $\omega = 1,77 \cdot 10^5$ с$^{-1}$.

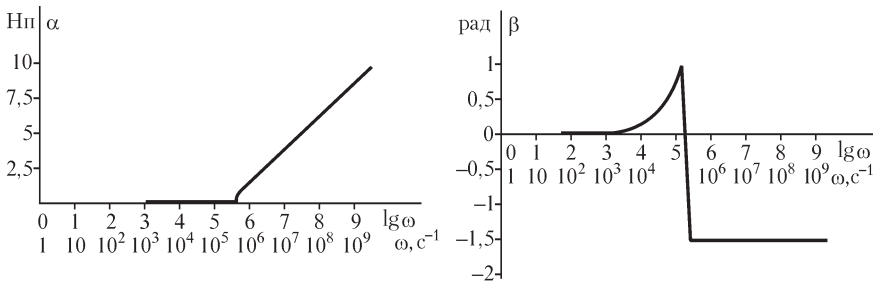


Рис. Р14.6

2. Используя соотношения $\sqrt{L/C} = 10$, $\dfrac{2}{\sqrt{LC}} = 10^3$, находим:

$$L = 0{,}02 \text{ Гн}, \; C = 2\cdot 10^{-4} \text{ Ф}.$$

4. Так как частота среза фильтра оказывается равной 10^4 с$^{-1}$, то мера передачи при $\omega = 0{,}4\cdot 10^4$ с$^{-1}$ (в полосе пропускания) равна $= 0{,}925j$, а при $\omega = 1{,}5\cdot 10^4$ с$^{-1}$ (в полосе задерживания) — $\Gamma = 1{,}04 + j\pi/2$.

Напряжение на выходе фильтра

$$u_{\text{вых}}(t) = 2\sin(0{,}5\cdot 10^4 t + 0{,}925) + 0{,}7\sin\left(1{,}5\cdot 10^4 t + \frac{\pi}{2}\right) \text{В}.$$

14.4. Электрические фильтры нижних частот

УПРАЖНЕНИЯ

1. Функции $f(\omega)$ изображены на рис. Р14.7 ($f(\omega)$ при $\varepsilon = 0{,}5$ изображена на левом графике, а при $\varepsilon = 1$ — на правом).

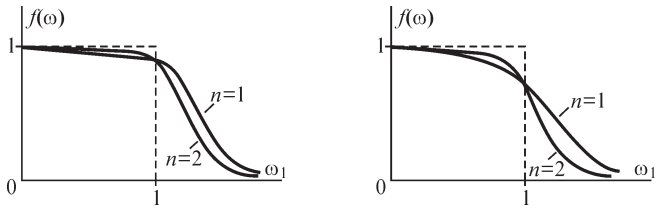


Рис. Р14.7

2. Так как коэффициент затухания равен нулю при частоте $\omega = 0$, то в силу монотонности функции $f(\omega)$ в полосе пропускания наибольшее значение коэффициент затухания принимает на ее границе при $\omega_1 = 1$. Из условия $10\lg(1 + \varepsilon^2) = 3$ дБ находим $\varepsilon = 1$. В общем случае при заданной величине $\Delta\alpha$ имеем $\varepsilon = \sqrt{10^{0{,}1\Delta\alpha} - 1}$.

3. Значение $\varepsilon^2 = 0{,}58$ находим из условия $20\lg\sqrt{1+\varepsilon^2} = 2$ дБ. Искомое значение порядка фильтра получаем, решая неравенство $20\lg\sqrt{1+0{,}58\omega_1^{2n}} \geq 10$ дБ, где $\omega_1 = 2$, $n \geq 2$.

4. Учитывая, что амплитудная частотная характеристика rC цепи

$$K(\omega) = \frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{(rC\omega)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{(rC\omega_c)^2\omega_1^2 + 1}},$$

где $\omega_1 = \dfrac{\omega}{\omega_c}$ — относительная частота, и что $\varepsilon = 1$, находим, сопоставляя выражения $K(\omega)$ и $f(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\omega_1^{2n}}}$, соотношение между параметрами фильтра: $rC = \omega_c^{-1}$.

Таким образом, значение одного из параметров (r или C) можно выбрать произвольно.

5. Учитывая, что заданная неравномерность коэффициента затухания в полосе пропускания составляет 3 дБ, получаем, подобно рассмотренному в предыдущих упражнениях, ε = 1. Записывая передаточную функцию цепи

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2}, \ \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \ \alpha = \frac{1}{2rC},$$

находим ее амплитудную частотную характеристику

$$K(\omega_1) = \frac{1}{\sqrt{[1-(\omega_c/\omega_0)^2\omega_1^2]^2 + (2\alpha\omega_c/\omega_0^2)^2\omega_1^2}},$$

и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях частоты полиномов знаменателя функций $K(\omega)$ и $f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega_1^4}}$, получаем искомые соотношения, связывающие параметры r, L, C цепи: $\frac{1}{LC} = \omega_c^2$, $r = \sqrt{\frac{L}{2C}}$. Так как число параметров (3) меньше числа связывающих их соотношений (2), то на их выбор можно наложить одно произвольное ограничение.

6. Амплитудная и фазовая частотные характеристики фильтра, схема которого приведена на рис. Р14.8, имеют вид

$$K(\omega) = \frac{k\omega^2}{\sqrt{(b_0 - \omega^2)^2 + b_1^2\omega^2}}, \ \beta(\omega) = \text{arctg}\,[\omega b_1/(b_0 - \omega^2)],$$

где $b_0 = \frac{1}{r_1C_1r_2C_2}$, $b_1 = \frac{1}{r_1C_1}(1-k) + \frac{1}{r_2}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$.

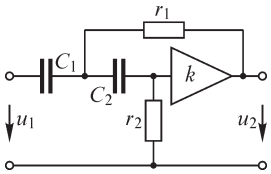


Рис. Р14.8

14.5. Устойчивость в электрических цепях

ВОПРОСЫ

1. Корни характеристического уравнения пассивных электрических цепей лежат в левой полуплоскости (либо на оси мнимых при отсутствии в цепи резисторов). Поэтому в решения однородных дифференциальных уравнений, описывающих процессы в таких цепях, не могут входить экспоненты с положительными показателями. Цепи с зависимыми источниками могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми, что определяется видом цепи и соотношением между ее параметрами.

УПРАЖНЕНИЯ

3. Знаменатель передаточной функции $K'(p) = \frac{(Tp+1)k}{Tp+1-k}$ имеет корень $p = \frac{k-1}{T}$ при положительной и $p = -\frac{1+k}{T}$ при отрицательной обратной связи. В последнем случае при любом значении коэффициента усиления k имеем $p < 0$ и система всегда устойчива. Она однако теряет устойчивость при положительной об-

ратной связи, если $k > 1$. Если $k < 1$, то система сохраняет устойчивость и при положительной обратной связи.

4. Знаменатель передаточной функции $K'(p) = \dfrac{(a_0 p^2 + a_1 p + 1)k}{a_0 p^2 + a_1 p + 1 + k}$ системы имеет корни $p_{1,2} = \dfrac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0(1+k)}}{2a_0}$, которые при любых параметрах системы отрицательны либо имеют отрицательные вещественные части. Поэтому система не может быть неустойчивой.

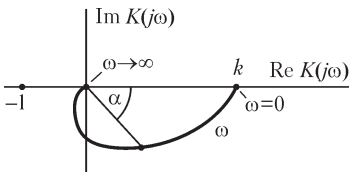


Рис. Р14.9

Годограф $K_1(j\omega) = \dfrac{k}{a_0(j\omega)^2 + a_1 j\omega + 1}$ амплитудно-фазовой частотной характеристики передаточной функции $K_1(p) = kW(p)$ системы с разомкнутой цепью обратной связи (рис. Р14.9), проходя при увеличении частоты последовательно через два квадранта плоскости, не пересекает ось $\mathrm{Re}\, K(j\omega) < 0$, что означает невозможность выполнения условия $\alpha = -180°$, при котором отрицательная обратная связь становится положительной и система может стать неустойчивой. Такой же ответ получаем при использовании критерия Гурвица. Усилитель, охваченный устройством отрицательной обратной связи с передаточной функцией $W(p) = \dfrac{1}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + 1}$, может быть неустойчивым, так как годограф $K_1(j\omega)$ в этом случае, проходя при увеличении частоты последовательно через три квадранта плоскости, пересекает ось $\mathrm{Re}\, K(j\omega) < 0$.

5. Записывая передаточную функцию системы $K_1 = \dfrac{k}{Tp + 1 + (\alpha - \beta)k}$, находим, что усилитель становится устойчивым при $\alpha > \beta - \dfrac{1}{k}$.

6. Искомое соотношение можем найти, анализируя зависимость корней полинома знаменателя передаточной функции от параметров элементов цепи и коэффициента усиления k усилителя. Если при некоторых соотношениях параметров хотя бы один из корней полинома знаменателя передаточной функции становится положительным (либо вещественная часть корня становится положительной), то система будет неустойчивой.

Подставляя в выражение $K(p) = \dfrac{kZ_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p) - kZ_1(p)}$ (см. решение упр. 5, §13.5) величины $Z_1(p) = r$, $Z_2(p) = \dfrac{1}{Cp}$, получаем $K(p) = \dfrac{k}{(1-k)rCp + 1}$. При $k > 0$, когда усилитель не изменяет знака подаваемого на его вход напряжения, цепь устойчива, если $1 - k > 0$, т. е. при $k < 1$.

7. Анализируя корни полинома знаменателя $T_1T_2p^2 + (T_1 + T_2 + C_2r_1)p + (1 - k)$ передаточной функции цепи варианта *г*, приходим к выводу, что цепь будет устойчивой при условии $1 - k > 0$, т. е. при $k < 1$. Для цепи варианта *д* условие устойчивости также имеет вид $k < 1$.

8. Заменим в уравнении $b_0 p^6 + b_1 p^5 + \ldots + b_6 = 0$ переменную p на $\frac{1}{p^*}$:

$$b_0 \frac{1}{(p^*)^6} + b_1 \frac{1}{(p^*)^5} + \ldots + b_6 = 0.$$

Умножив обе части этого уравнения на $(p^*)^6$, получим уравнение

$$b_6 (p^*)^6 + b_5 (p^*)^5 + \ldots + b_0 = 0,$$

совпадающее с исходным уравнением устойчивой системы. Так как корни λ_i и β_i этих уравнений связаны соотношением $\beta_i = \frac{1}{\lambda_i}$, то система с характеристическим уравнением $b_0 p^6 + b_1 p^5 + \ldots + b_6 = 0$ устойчива.

9. Миноры матрицы Гурвица

$$\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

для условий варианта *г* равны:

$$\Delta_1 = 3 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -31 < 0.$$

Следовательно, система неустойчива.

Матрица Гурвица для варианта *е* такова

$$\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Имеем $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} < 0$, и следовательно, система неустойчива.

10. Для электрической цепи варианта *г* упр. 5, § 13.5 (знаменатель передаточной функции $T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2 + C_2 r_1)p + 1 - k$) условие положительности миноров матрицы Гурвица

$$\begin{Vmatrix} T_1 + T_2 + C_2 r_1 & T_1 T_2 \\ 0 & 1 - k \end{Vmatrix}$$

приводит к неравенствам $\Delta_1 = T_1 + T_2 + C_2 r_1 > 0$, $\Delta_2 = (T_1 + T_2 + C_2 r_1)(1 - k) > 0$, из которых следует условие устойчивости: $k < 1$.

По выражению знаменателя $(1 - k)T_1T_2p^2 + [(1 - k)(T_1 + T_2) + C_1r_2]p + 1 - k$ передаточной функции электрической цепи варианта *д* упр. 5, §13.5, строим матрицу Гурвица

$$\begin{Vmatrix} (1-k)(T_1+T_2)+C_1r_2 & T_1T_2(1-k) \\ 0 & 1-k \end{Vmatrix}$$

и записываем неравенства, при выполнении которых цепь устойчива: $T_1T_2(1 - k) > 0$, $\Delta_1 = (1 - k)(T_1 + T_2) + C_1r_2 > 0$, $\Delta_2 = \Delta_1(1 - k) > 0$. Из них следует условие устойчивости: $k < 1$.

11. Устойчивыми будут системы с годографами 1 и 2. Система с годографом 3 при замыкании обратной связи будет неустойчивой, так как при $\alpha = -\pi$ $(\omega = \omega_0)$ коэффициент передачи превышает значение 1, в результате чего выполняются условия, при которых система теряет устойчивость.

12. При замыкании цепи обратной связи система с характеристикой 1 будет неустойчивой, а система с характеристикой 2 — устойчивой. Действительно, при частоте ω_1 сигнала угол α сдвига по фазе между сигналом на входе основной цепи и сигналом на выходе цепи обратной связи в разомкнутой системе составляет $-\pi$ и величина $K(\omega_1)$ превышает 1. Поэтому при замыкании цепи обратной связи при $\omega = \omega_1$ цепь неустойчива.

Система с характеристикой 2 будет устойчивой при замыкании цепи обратной связи, так как при $\omega = \omega_2$, когда $\alpha = -p$, имеем $K(\omega_2) < 1$, $(20 \lg K(\omega_2) < 0)$.

15.1. Синтез двухполюсников

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вариант *а* — коэфициент $2+j$ при операторе p является комплексным; варианты *б* и *в* — один из коэффициентов полинома числителя отрицательный; вариант *г* — степень полинома знаменателя превышает степень полинома числителя на два.

2. Схемы электрических цепей изображены на рис. Р15.1.

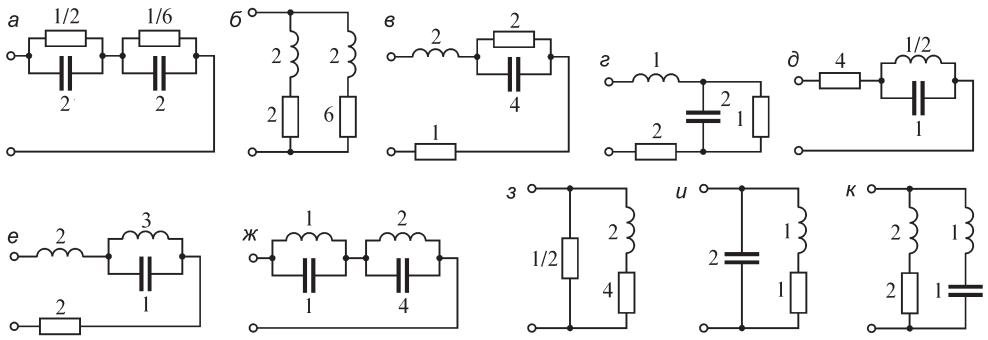


Рис. Р15.1

3. Схемы электрических цепей изображены на рис. Р15.2.

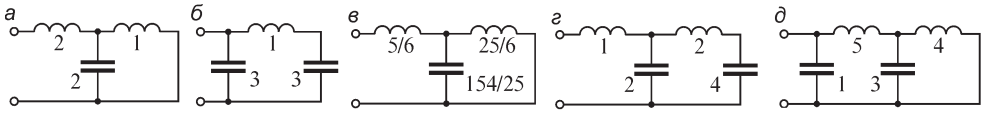


Рис. Р15.2

15.2. Синтез четырехполюсников

УПРАЖНЕНИЯ

1. *а*) $K(p) = \dfrac{Z_{22}(p)}{Z_{12}(p)}$; *б*) $K(p) = \dfrac{Z_{21}(p)}{Z_{11}(p)}$.

2. Так как $U_1(p) = Z_{12}(p)\dfrac{U_2(p)}{r_н}$, то $K(p) = \dfrac{r_н}{Z_{12}(p)}$.

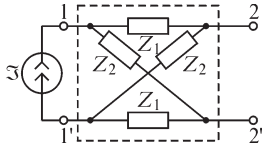


Рис. Р15.3

3. Имеем: *а*) $Z_{21(+)}(p) = \dfrac{1}{6p}$, $Z_{21(-)}(p) = \dfrac{p}{2p^2+1}$;

б) $Z_{21(+)}(p) = \dfrac{3p}{2}$, $Z_{21(-)}(p) = \dfrac{2p}{8p^2+1}$; *в*) $Z_{21(+)}(p) = \dfrac{0{,}5p}{p^2+0{,}2}$, $Z_{21(-)}(p) = \dfrac{0{,}5p}{p^2+0{,}5}$,

и с помощью соотношений $Z_1(p) = 2Z_{21(-)}(p)$, $Z_2(p) = 2Z_{21(+)}(p)$ находим параметры элементов мостовой схемы (рис. Р15.3).

17.1. Расчет установившихся режимов длинной линии

ВОПРОСЫ

1. Время прохождения электромагнитной волны от входных до оконечных зажимов воздушной линии составляет $T = l/v = 10^{-5}$ с. В течение этого промежутка времени при условии варианта *а* приложенное к линии напряжение практически не меняется, так как период его изменения в $1/fT$ 2000 раз превышает время T. Поэтому в этом случае воздушную линию можно рассматривать как электрическую цепь с сосредоточенными параметрами.

Однако при условии варианта *б* период изменения приложенного к линии напряжения, составляющий 10^{-5} с, оказывается равным промежутку времени T, и воздушную линию следует рассматривать как электрическую цепь с распределенными параметрами.

Длительность действия импульса напряжения (вариант *в*), равная $3{\cdot}10^{-6}$ с, меньше времени T его прохождения от входных к оконечным зажимам линии, так что в этом случае воздушную линию нельзя рассматривать как электрическую цепь с сосредоточенными параметрами.

УПРАЖНЕНИЯ

2. Учитывая, что A-параметры четырехполюсника, эквивалентного длинной однородной линии, суть $A = D = \operatorname{ch}\gamma l$, из соотношения $\operatorname{ch}\Gamma_1 = \sqrt{AD}$ (см. § 14.1) находим искомую связь между мерой передачи четырехполюсника и коэффициентом распространения линии: $\operatorname{ch}\Gamma_1 = \operatorname{ch}\gamma l$, или $\Gamma_1 = \gamma l$, $\alpha_1 = \alpha l$, $\beta_1 = \beta l$.

3. Напряжение $\dot{U}_2$ и ток $\dot{I}_2$ в точке линии с координатой x_2 можно рассчитать для условий соответствующего варианта с помощью выражений

а) $\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma l - \dot{I}_1 Z \operatorname{sh} \gamma l$; $\dot{I}_2 = -\dfrac{\dot{U}_1}{Z} \operatorname{sh} \gamma l + \dot{I}_1 \operatorname{ch} \gamma l$;

б) $\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma l + \dot{I}_1 Z \operatorname{sh} \gamma l$; $\dot{I}_2 = \dfrac{\dot{U}_2}{Z} \operatorname{sh} \gamma l + \dot{I}_1 \operatorname{ch} \gamma l$;

в) $\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \dfrac{\gamma l}{2} + \dot{I}_1 Z \operatorname{sh} \dfrac{\gamma l}{2}$; $\dot{I}_2 = \dfrac{\dot{U}_2}{Z} \operatorname{sh} \dfrac{\gamma l}{2} + \dot{I}_1 \operatorname{ch} \dfrac{\gamma l}{2}$;

г) $\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \dfrac{\gamma l}{2} - \dot{I}_1 Z \operatorname{sh} \dfrac{\gamma l}{2}$; $\dot{I}_2 = -\dfrac{\dot{U}_1}{Z} \operatorname{sh} \dfrac{\gamma l}{2} + \dot{I}_1 \operatorname{ch} \dfrac{\gamma l}{2}$;

д) $\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \dfrac{\gamma l}{2} + \dot{I}_1 Z \operatorname{sh} \dfrac{\gamma l}{2}$; $\dot{I}_2 = \dfrac{\dot{U}_2}{Z} \operatorname{sh} \dfrac{\gamma l}{2} + \dot{I}_1 \operatorname{ch} \dfrac{\gamma l}{2}$;

е) $\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \dfrac{\gamma l}{2} - \dot{I}_1 Z \operatorname{sh} \dfrac{\gamma l}{2}$; $\dot{I}_2 = -\dfrac{\dot{U}_2}{Z} \operatorname{sh} \dfrac{\gamma l}{2} + \dot{I}_1 \operatorname{ch} \dfrac{\gamma l}{2}$.

6. При условии $rC = gL$ волновое сопротивление линии будет активным, при условии $gL > rC$ — индуктивным, а при условии $gL < rC$ — емкостным.

8. Искомая индуктивность равна $L = (rCl/g) = 0{,}04$ Гн.

9. Напряжение и ток распределены вдоль координаты x линии, отсчитываемой от ее входа, по закону $U(x) = U_1 \exp(-\alpha x)$, $I(x) = I_1 \exp(-\alpha x)$, где коэффициент затухания α равен $\sqrt{rg} = 10^{-3}$ км$^{-1}$. На рис. Р17.1 показана зависимость $U(x)$.

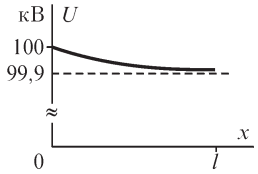


Рис. Р17.1

10. Звено цепной схемы, эквивалентное двухпроводной линии, изображено на рис. Р17.2.

12. Так как $r = g = 0$, то, используя выражение для скорости распространения волн вдоль линии $v = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, получаем $l = v\sqrt{L_э C_э}$.

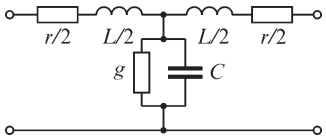


Рис. Р17.2

14. 1) $Z_{пр} = 0$; 2) $Z_{пр} = 0$; 3) $Z_{пр} = \infty$; 4) $Z_{пр} = 0$; 5) $Z_{пр} = \infty$; 6) $Z_{пр} = \infty$; 7) $Z_{пр} = 3 - j$; 8) $Z_{пр} = \infty$; 9) $Z_{пр} = 2 - j$; 10) $Z_{пр} = 2 + j$; 11) $Z_{пр} = -1 + 2j$; 12) $Z_{пр} = 2 + j$.

15. $Z_{5-6} = r$, $Z_{3-4} = r/2$, $Z_{1-2} = r/3$.

17.2. Неискажающая длинная линия

ЗАДАЧИ

1. Требуемый коэффициент усиления k напряжения находим из условия равенства напряжений $u_1 = u_2$ на входе и выходе линии, связанных соотношением $u_2 = ku_1 \exp(-\alpha l)$, $k = \exp(\alpha l) = 1{,}105$.

2. Индуктивность неискажающей линии должна быть равной $L = rC/g =$ $= 0{,}02$ Гн/км, так что дополнительно подключаемые катушки должны иметь индуктивность $L = 0{,}02$ Гн $- 0{,}002$ Гн $= 0{,}018$ Гн.

17.3. Режимы холостого хода и короткого замыкания длинной линии

ВОПРОСЫ

1. Так как волновое сопротивление и коэффициент распространения длинной линии зависят в общем случае от частоты напряжения, то и величины Z_0 и $Z_к$, связанные с ними соотношениями $Z = \sqrt{Z_0 Z_к}$, $\operatorname{th}\gamma l = \sqrt{Z_к/Z_0}$, также зависят от частоты. Определяя величины Z_0, $Z_к$, можем моделировать однородную линию одним звеном, содержащим резисторы, катушки индуктивности и конденсаторы. Входное сопротивление такой электрической цепи зависит от частоты как в режиме холостого хода, так и в режиме короткого замыкания.

3. Входное сопротивление $Z_к$ короткозамкнутой линии без потерь, равное $jZ\operatorname{tg}\beta l$ ($Z = \sqrt{L/C}$ — волновое сопротивление линии), обращается в бесконечность (в этом случае ток в начале линии равен нулю) при длине линии, равной $\lambda/4$, $3\lambda/4$, $5\lambda/4$ и т. д. Хотя в этих случаях ток в начале линии равен нулю, он отличен от нуля во всей линии, т. е. при любом расстоянии от начала линии.

5. При заданных параметрах линии и частоте напряжения длина волны $l = 1/(f\sqrt{LC}) = 250$ м. В приведенной ниже таблице указана длина линии без потерь, при которой ее входное сопротивление в режиме холостого хода (Z_0) или короткого замыкания ($Z_к$) имеет заданное значение либо имеет требуемый характер. Подставляя в таблицу значение $\lambda = 250$ м, получаем искомую длину линии.

Режим	0	∞	Индуктивный характер	Емкостный характер
Z_0	$0{,}25\lambda$	$0{,}5\lambda$	$0{,}25\lambda < l < 0{,}5\lambda$	$0 < l < 0{,}25\lambda$
$Z_к$	$0{,}5\lambda$	$0{,}25\lambda$	$0 < l < 0{,}25\lambda$	$0{,}25\lambda < l < 0{,}5\lambda$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Ток на входе линии равен $i_1(t) = (U_m/z)\sin(\omega t - \varphi)$. Так как сопротивление приемника равно волновому сопротивлению линии, то

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \exp(-\gamma l),\ \dot{I}_2 = (\dot{U}_1/Z)\exp(-\gamma l),$$

$$u_2(t) = U_m \exp(-\alpha l)\sin(\omega t - \beta l),$$

$$i_2(t) = (U_m/z)\exp(-\alpha l)\sin(\omega t - \beta l - \varphi).$$

На рис. Р17.3 показано распределение напряжения вдоль линии в различные моменты времени, построенное в соответствии с выражениями

а) $u(0, x) = U_m \exp(-\alpha x)\sin(-\beta x)$; *б)* $u\left(\frac{\pi}{4\omega}, x\right) = U_m \exp(-\alpha x)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta x\right)$;

в) $u\left(\frac{\pi}{2\omega}, x\right) = U_m \exp(-\alpha x)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta x\right)$; *г)* $u\left(\frac{\pi}{\omega}, x\right) = U_m \exp(-\alpha x)\sin(\pi - \beta x)$.

При уменьшении длины линии до $0{,}5l$ комплексные напряжение и ток в конце линии изменятся в $0{,}5\gamma l$ раз:

$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \exp(-0{,}5\gamma l)$, $\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \exp(-0{,}5\gamma l)$,

$u_2 = U_m \exp(-0{,}5\gamma l) \sin(\omega t - 0{,}5\beta l)$,

$i_2 = (U_m/z) \exp(-0{,}5\alpha l) \sin(\omega t - 0{,}5\beta l - \varphi)$.

Отдаваемая источником активная мощность при изменении длины линии не изменяется, так как напряжение и ток на ее входе остаются теми же. Активная мощность в нагрузке увеличивается в $\exp(\alpha l)$ раз, так как в конце линии амплитуды напряжения и тока возрастают в $\exp(0{,}5\alpha l)$ раз каждая.

2. Так как Z — вещественное, то линия является неискажающей. Вследствие заданного условия $Z_{пр} = 0$ имеем $I_2 = 2I_{\varphi_2} = 2U_{\varphi_2}/Z$,

$i_2(t) = (2U_m/Z) \sin(\omega t - \beta l)$, $\beta = \omega\sqrt{L/C} = 2\pi f/v$.

После подстановки численных значений получаем $i_2(t) = 1 \sin(\omega t - \pi/3)$.

4. Искомые величины равны

$Z = \sqrt{L/C} = 500$ Ом, $v = 1/\sqrt{LC} = 2{,}5 \cdot 10^8$ м/с,

$\lambda = v/f = 6{,}25 \cdot 10^4$ м, $\beta = 2\pi f\sqrt{LC} = 0{,}1$ км$^{-1}$.

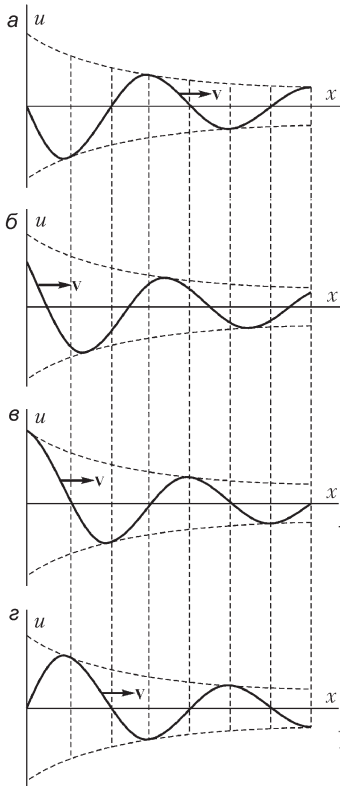


Рис. Р17.3

Для условий варианта *а* имеем $u_2(t) = 500 \sin \omega t$ В, $i_2(t) = 1 \sin \omega t$ А, варианта *б*: $u_2(t) = 1000 \sin \omega t$ В, $i_2(t) = 0$, варианта *в*: $u_2(t) = 0$, $i_2(t) = 2 \sin \omega t$ А.

Амплитуда U_{2m} напряжения в конце линии не зависит от частоты и при изменении последней меняться не будет.

18.1. Переходные процессы в одной длинной линии

УПРАЖНЕНИЯ

2. Зависимости $i_\varphi(x, t_1)$, $u_\psi(x, t_2)$ приведены на рис. Р18.1.

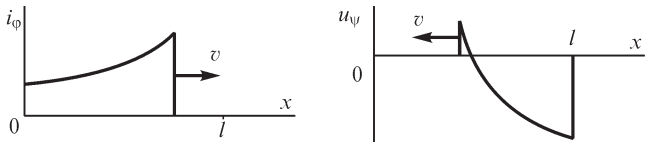


Рис. Р18.1

4. Энергия электрического поля равна энергии магнитного поля, и при условии варианта *а* $W_э = W_м = \frac{1}{2}\int_0^{0{,}75l} Cu^2 dx = 3375$ Дж. Учитывая, что при условии вариан-

та *б* в момент времени $t_0 = \dfrac{0{,}75l}{v} = 3{,}9\cdot 10^{-4}$ с напряжение $U(t_0, x)$ распределено вдоль линии по закону $U(t_0, x) = 10^5 \exp[-10^3(t_0 - x/v)]$, получаем

$$W_э = W_м = \frac{1}{2}\int_0^{0{,}75l} 10^{10}\cdot Ce^{-2\cdot 10^3 t_0} e^{2\cdot 10^3 \frac{x}{v}} dx = 2348 \text{ Дж}.$$

18.2. Переходные процессы при соединении нескольких длинных линий

ВОПРОСЫ

1. *а*) Из соотношения $|u_{\psi 1}| = u_{\varphi 2}$ следует, что $2z_2 = |z_2 - z_1|$, откуда получаем $z_1 = 3z_2$ или $z_1 = -z_2$.

б) Из соотношения $|i_{\psi 1}| = i_{\varphi 2}$ следует, что $2z_1 = |z_1 - z_2|$, откуда находим $z_2 = -z_1$ или $z_2 = 3z_1$.

в) Так как $p_{\psi 1} = u_{\psi 1}^2/z_1 = 0$, то имеем $u_{\psi 1} = 0$, что справедливо при $z_2 = z_1$.

г) Выражая величины $u_{\psi 1} = \dfrac{1}{2}u_{\varphi 1}$ и $u_{\varphi 2} = \dfrac{3}{2}u_{\varphi 1}$ через сопротивления z_1, z_2

$\dfrac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} = 0{,}5$; $\dfrac{2z_2}{z_2 + z_1} = 1{,}5$, получаем соотношение $z_2 = 3z_1$.

д) Выражая величины $i_{\psi 1} = 0{,}5i_{\varphi 1}$, $i_{\varphi 2} = 1{,}5i_{\varphi 1}$ через сопротивления z_1, z_2

$\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} = 0{,}5$; $\dfrac{2z_1}{z_1 + z_2} = 1{,}5$, находим: $z_1 = 3z_2$.

3. Выражая мощности $p_{\varphi 1}$, $p_{\varphi 2}$ через напряжение $u_{\varphi 1}$ и волновые сопротивления z_1, z_2 и проверяя возможность выполнения неравенства $p_{\varphi 2} > p_{\varphi 1}$, приводящего к неравенству $\dfrac{4z_2}{(z_1 + z_2)^2} > \dfrac{1}{z_1}$, получаем соотношение $(z_1 - z_2)^2 < 0$, которое не может быть выполнено ни при каких сопротивлениях z_1, z_2. Таким образом $p_{\varphi 2}$ не может превышать $p_{\varphi 1}$.

УПРАЖНЕНИЯ

2. Из выражения $u_{\varphi 2} = \dfrac{2z_2 u_{\varphi 1}}{z_1 + z_2 + r_0}$, связывающего падающую и преломленную волны напряжений, находим, что соотношение $u_{\varphi 1} = u_{\varphi 2}$ оказывается выполненным при условии, что $2z_2 = z_1 + z_2 + r_0$ или $r_0 = z_2 - z_1$. При этом $p/p_{\varphi 1} = (z_2 - z_1)\dfrac{z_1}{z_2^2}$.

3. Используя выражение $u_{\varphi 2} = \dfrac{2z_2 u_{\varphi 1}}{z_1 + z_2 + z_1 z_2/r_0}$, можем связать токи $i_{\varphi 1}$, $i_{\varphi 2}$ соотношением $i_{\varphi 2} = \dfrac{2z_1 i_{\varphi 1}}{z_1 + z_2 + z_1 z_2/r_0}$, из которого следует, что условие $i_{\varphi 1} = i_{\varphi 2}$

выполнено при $r_0 = \dfrac{z_1 z_2}{z_1 - z_2}$. Искомое отношение $p/p_{\varphi 1}$ получается равным $(z_1 - z_2)\dfrac{z_2}{z_1^2}$.

4. Учитывая, что в месте сопряжения линий справедливы равенства $u_1 = u_{\varphi 1} + u_{\psi 1} = u_{\varphi 2} = u_{\varphi 3}$, $i_1 = \dfrac{u_{\varphi 1}}{z_1} - \dfrac{u_{\psi 1}}{z_1} = \dfrac{u_{\varphi 2}}{z_2} + \dfrac{u_{\varphi 3}}{z_3}$, найдем, используя их, искомые величины

$$u_{\psi 1} = \frac{z_2 z_3 - z_1 z_2 - z_1 z_3}{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3} u_{\varphi 1},\ u_{\varphi 2} = u_{\varphi 3} = \frac{2 z_2 z_3}{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3} u_{\varphi 1},$$

$$i_{\psi 1} = -\frac{u_{\psi 1}}{z_1},\ i_{\varphi 2} = \frac{u_{\varphi 2}}{z_2},\ i_{\varphi 3} = \frac{u_{\varphi 3}}{z_3}.$$

5. В момент времени достижения волнами напряжения и тока оконечных зажимов *1′–1′* первой линии можем записать соотношения, связывающие падающие и отраженные волны в точках *1′–1′*: $u_1 = u_{\varphi 1} + u_{\psi 1}$, $z_1 i = u_{\varphi 1} - u_{\psi 1}$, из которых получаем уравнение $2u_{\varphi 1} = z_1 i + u_1$. Ему можно поставить в соответствие электрическую цепь с сосредоточенными параметрами, изображенную на рис. Р18.2.

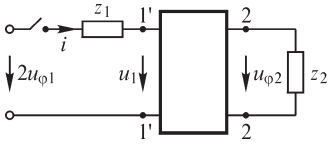


Рис. Р18.2

Времени $t = 0$ соответствует момент достижения падающей волной напряжения $u_{\varphi 1}$ зажимов линии *1′–1′*, или момент замыкания ключа.

В результате расчета переходного процесса в этой цепи находим зависимости

$$i(t),\ u_1(t),\ u_{\varphi 2}(t),\ u_{\psi 1}(t) = u_1(t) - u_{\varphi 1},\ i_{\varphi 2}(t) = \frac{u_{\varphi 2}(t)}{z_2},\ i_{\psi 1}(t) = -\frac{u_1(t) - u_{\varphi 1}}{z_1}.$$

Так как по условию следует получить выражения для волн напряжения и тока для момента времени $t_0 = t_0 = 0{,}5 l_2 / v_2$, когда преломленные волны достигнут середины второй линии, то при построении зависимостей $u_{\varphi 2}(t_0, x)$, $i_{\varphi 2}(t_0, x)$ в выражениях $u_{\varphi 2}(t)$, $i_{\varphi 2}(t)$ следует выполнить замену аргумента $t \to t_0 - x/v_2$ (здесь v_2 — скорость распространения волн во второй линии). При этом координату x отсчитываем вдоль линии *2* от ее зажимов *2–2*.

Зависимости $u_{\psi 1}(t_0, x)$, $i_{\psi 1}(t_0, x)$ для отраженных волн напряжения и тока в первой линии получаем, заменив в выражениях $u_{\psi 1}(t)$, $i_{\psi 1}(t)$ аргумент t на $t_0 - x/v_1$, причем координату x отсчитываем, как и для преломленных волн, в направлении движения волн, т. е. вдоль линии *1* от ее оконечных зажимов *1′–1′* к входным зажимам *1–1*.

Для варианта 1, *а* электрическая цепь для расчета волн напряжения и тока изображена на рис. Р18.3.

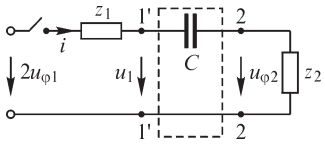


Рис. Р18.3

Рассчитывая переходный процесс, получаем $i(t) = \dfrac{2u_{\varphi 1}}{z_1 + z_2} e^{-t/\tau} \cong 444e^{-t/\tau}$ А,

где $\tau = C(z_1 + z_2) = 4{,}5 \cdot 10^{-5}$ с, $u_{\varphi 2}(t) = i(t)z_2 \cong 2{,}2 \cdot 10^4 e^{-t/\tau}$ В,

$$u_{\psi 1}(t) = u_1(t) - u_{\varphi 1} = u_{\varphi 1}\left(1 - \frac{2z_1}{z_1 + z_2} e^{-t/\tau}\right) = 10^5(1 - 1{,}78\, e^{-t/\tau})\ \text{В}.$$

Кривые искомых зависимостей

$$u_{\varphi 2}(t_0, x) = 2{,}24 \cdot 10^4 \exp\left[-\left(t_0 - \frac{x}{v_2}\right)\Big/\tau\right],\ \ i_{\varphi 2}(t_0, x) = \frac{u_{\varphi 2}(t_0, x)}{z_2},$$

$$u_{\psi 1}(t_0, x) = 10^5\left\{1 - 1{,}78 \exp\left[-\left(t_0 - \frac{x}{v_1}\right)\Big/\tau\right]\right\},\ \ i_{\psi 1}(t_0, x) = -\frac{u_{\psi 1}(t_0, x)}{z_1}$$

изображены на рис. Р18.4.

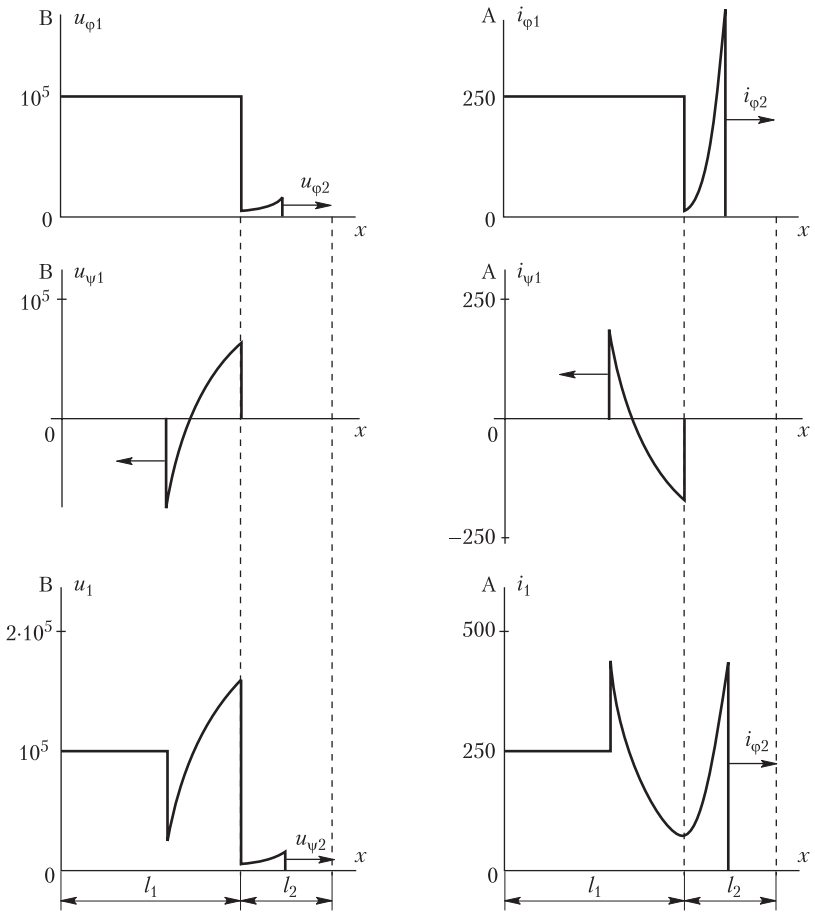


Рис. Р18.4

Эквивалентная электрическая цепь для расчета волн напряжения и тока при условиях варианта 6, *а* показана на рис. Р18.5.

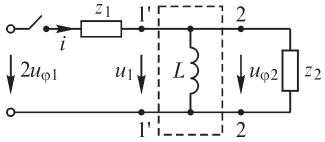


Рис. Р18.5

Искомые выражения имеют вид

$$u_{\varphi 2}(t_0, x) = \frac{2z_2}{z_1 + z_2} u_{\varphi 1} \exp\left[-\left(t_0 - \frac{x}{v_2}\right)\Big/\tau\right], \quad i_{\varphi 2} = \frac{u_{\varphi 2}}{z_2},$$

$$u_{\psi 1}(t_0, x) = u_{\varphi 1}\left\{-1 + \frac{2z_2}{z_1 + z_2} \exp\left[-\left(t_0 - \frac{x}{v_1}\right)\Big/\tau\right]\right\}, \quad i_{\psi 1} = -\frac{u_{\psi 1}}{z_1}, \quad \tau = \frac{L(z_1 + z_2)}{z_1 z_2}.$$

18.3. Отражение волн от конца длинной линии

ВОПРОСЫ

1. При сопротивлении нагрузки линии, равном волновому, коэффициенты отражения напряжения и тока равны нулю и в линии не будет отраженных волн в любой момент времени.

В момент достижения падающими волнами оконечных зажимов линии отраженные волны будут отсутствовать, если линия нагружена, например, на электрическую цепь: *а*) из последовательно соединенных конденсатора и волнового сопротивления линии или *б*) параллельно соединенных катушки индуктивности и волнового сопротивления линии.

2. Вариант *а*. При $r = z$ имеем $q_u = 0$, $u_\psi = 0$. Вариант *б*. Это равенство, как и равенство варианта *г*, не может быть выполнено ни при каких значениях сопротивления *r*. Вариант *в*. При $r = 3z$ имеем $q_u = 0{,}5$и $u_\psi = 0{,}5u_\varphi$. При этом получаем $q_i = -0{,}5$ и $i_\psi = -0{,}5i_\varphi$, так что условие варианта *д* также выполняется при $r = 3z$. Вариант *е*. При $r = \infty$ получаем $q_i = -1$ и $i_\psi = -i_\varphi$.

3. Вариант *а*. При $r = z$ имеем $i_\psi = 0$. Условия вариантов *б* и *в* не могут быть выполнены ни при каких значениях *r*. Вариант *г*. При $r = 3z$ имеем $q_u = 0{,}5$, $q_i = -0{,}5$ и $i_\psi = -0{,}5i_\varphi$. При этом же соотношении выполняется условие варианта *е*. Вариант *д*. При $r = 0$ имеем $q_u = -1$ и $u_\psi = -u_\varphi$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вариант *а*. Зависимость напряжения $u(t)$ и тока $i(t)$ в точке $x = 0{,}5$ показана на рис. Р18.6. На рис. Р18.7 изображены зависимости напряжения $u(x)$ и тока $i(x)$ вдоль линии в указанные моменты времени.

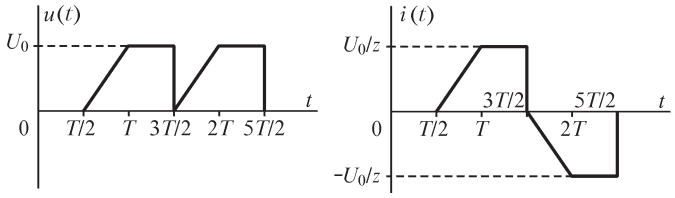


Рис. Р18.6

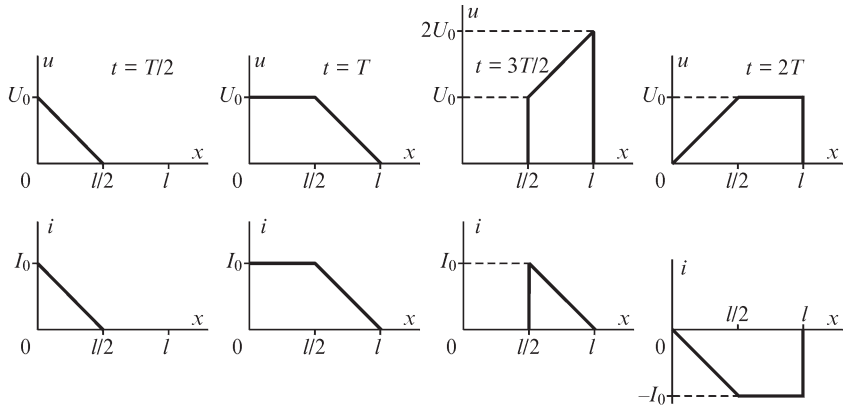


Рис. Р18.7

4. Для варианта *а*, когда нагрузкой линии является катушка индуктивности, выражения

$$u_\psi(t) = \left(-1 + 2e^{-\frac{z}{L}t}\right)u_\varphi$$

(здесь $u_\varphi = U_0$), $i_\psi = -\dfrac{u_\psi}{z}$ записываем в виде

$$u_\psi\left(\frac{l_1}{v}, x\right) = \left[-1 + 2e^{-\frac{z}{L}\left(\frac{l_1}{v} - \frac{x}{v}\right)}\right]u_\varphi,$$

$$i_\psi\left(\frac{l_1}{v}, x\right) = \left[1 - 2e^{-\frac{z}{L}\left(\frac{l_1}{v} - \frac{x}{v}\right)}\right]\frac{u_\varphi}{z}.$$

Для варианта *б* выражения $u_\psi = \left(1 - 2e^{-\frac{t}{zC}}\right)\cdot u_\varphi$, $i_\psi = -\dfrac{u_\psi}{z}$ принимают вид

$$u_\psi\left(\frac{l_1}{v}, x\right) = \left[1 - 2e^{-\frac{\frac{l_1}{v} - \frac{x}{v}}{zC}}\right]u_\varphi, \quad i_\psi\left(\frac{l_1}{v}, x\right) = \left[-1 + 2e^{-\frac{\frac{l_1}{v} - \frac{x}{v}}{zC}}\right]\frac{u_\varphi}{z}.$$

5. Качественная зависимость $u(x)$ показана на рис. Р18.8.

6. На рис. Р18.9 через T обозначено время пробега всей линии волнами напряжения и тока.

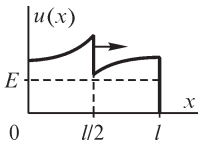


Рис. Р18.8

8. Приведем решение для случая, когда между линиями включена цепь варианта 6 (см. рис. В18.8), нагрузкой второй линии является цепь варианта 4, напряжение на входе первой линии u = 100 кВ = = const (рис. 18.10).

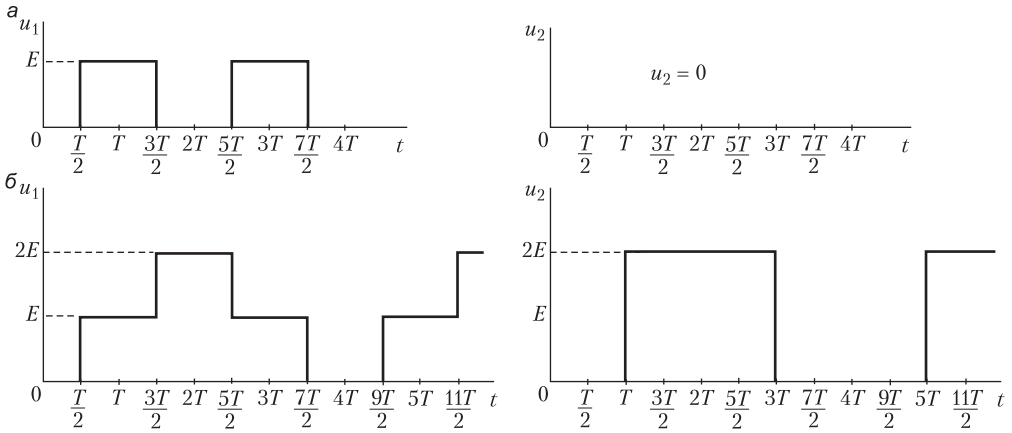


Рис. Р18.9

Рассчитаем зависимости $u(t_0, x)$, $i(t_0, x)$ для первой линии. Отсчитывая время от момента достижения волнами напряжения и тока зажимов *1′–1* первой линии ($t_0 = 2l_1/3v_1$) и составляя эквивалентную схему для этого момента времени (рис. Р18.11), получаем выражение $u_L(t) = 2u_{\varphi 1}\dfrac{z_2 e^{-t/\tau_1}}{z_1 + z_2} = 2{,}2 \cdot 10^4\, e^{-t/\tau_1}$, где

$$\tau_1 = \frac{L(z_1 + z_2)}{z_1 z_2} = 2{,}25 \cdot 10^{-4}\ \text{с},$$

$$u_{\psi 1}(t) = u_L(t) - u_{\varphi 1} = u_{\varphi 1}\left(-1 + \frac{2z_2}{z_1 + z_2}\, e^{-t/\tau_1}\right) \cong 10^5(-1 + 0{,}22e^{-t/\tau_1})\ \text{В},$$

$$i_{\varphi 1} = \frac{u_{\varphi 1}}{z_1} = 250\ \text{А},\ i_{\psi 1}(t) = -\frac{u_{\psi 1}(t)}{z_1} = 250(1 - 0{,}22e^{-t/\tau_1})\ \text{А}.$$

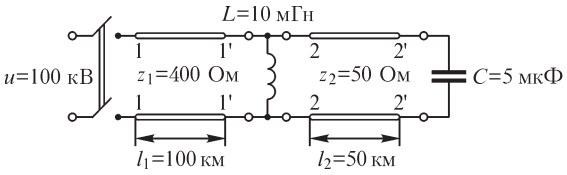


Рис. Р18.10

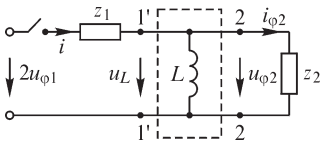


Рис. Р18.11

При построении зависимостей $u_{\psi 1}(t_0, x)$, $i_{\psi 1}(t_0, x)$ координату x следует отсчитывать от конца первой линии к ее началу:

$$u_{\psi 1}(t_0, x) = u_{\varphi 1}\left(-1 + 0{,}22e^{-\frac{t_0 - x/v_1}{\tau_1}}\right) = 10^5\left(-1 + 0{,}08e^{\frac{x}{67{,}5}}\right)\ \text{В},$$

$$i_{\psi 1}(t_0, x) = -\frac{u_{\psi 1}(t_0, x)}{z_1}\ \text{А}.$$

Для расчета переходного процесса во второй линии находим преломленные волны напряжения и тока:

$$u_{\varphi 2}(t) = u_{2-2}(t) = 2u_{\varphi 1}\frac{z_2}{z_1 + z_2}e^{-t/\tau_1} = 2{,}2 \cdot 10^4 e^{-\frac{t}{2{,}25 \cdot 10^{-4}}} \text{ В},$$

$$i_{\varphi 2}(t) = \frac{u_{\varphi 2}(t)}{z_2} = 444e^{-\frac{t}{2{,}25 \cdot 10^{-4}}} \text{ А}.$$

При расчете напряжений и токов во второй линии время отсчитываем от момента достижения преломленными волнами оконечных зажимов второй линии. Для этого момента времени эквивалентная схема принимает показанный на рис. Р18.12 вид.

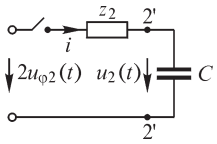


Рис. Р18.12

Для расчета напряжения $u_2(t)$ воспользуемся операторным методом:

$$Z(p) = Z_2 + \frac{1}{Cp},\ I(p) = \frac{2U_{\varphi_2(p)}}{Z(p)},$$

$$U_2(p) = I(p)\frac{1}{Cp} = \frac{4u_{\varphi_1}}{(z_1 + z_2)C}\frac{1}{\left(p + \frac{1}{\tau_1}\right)\left(p + \frac{1}{z_2 C}\right)} = \frac{1{,}78 \cdot 10^8}{(p + 4444)(p + 4000)}.$$

Используя теорему разложения, получаем

$$u_2(t) = 2{,}4 \cdot 10^5(e^{-4000t} - e^{-4444t}) \text{ В},$$

$$u_{\psi 2}(t) = u_2(t) - u_{\varphi 2}(t) = 4 \cdot 10^5 e^{-4000t} - 4{,}22 \cdot 10^5 e^{-4444t} \text{ В},$$

$$i_{\psi 2}(t) = -\frac{u_{\psi 2}(t)}{z_2} = 8{,}44 \cdot 10^3 e^{-4444t} - 8 \cdot 10^3 e^{-4000t} \text{ А}.$$

Преломленные волны напряжения $u_{\varphi 2}\left(\frac{l_2}{v_2} + \frac{l_2}{3v_2}, x\right)$ и тока $i_{\varphi 2}\left(\frac{l_2}{v_2} + \frac{l_2}{3v_2}, x\right)$ во второй линии определяются выражениями

$$u_{\varphi 2}(3{,}3 \cdot 10^{-4}, x) = 5{,}05 \cdot 10^3 e^{\frac{x}{45}} \text{ В},\ i_{\varphi 2}(3{,}3 \cdot 10^{-4}, x) = 101e^{\frac{x}{45}} \text{ А},$$

причем координату x следует отсчитывать от начала *2–2* второй линии к ее концу.

Отраженные волны во второй линии равны

$$u_{\psi 2}\left(\frac{l_2}{3v_2}, x\right) = 2{,}87 \cdot 10^5 e^{0{,}02x} - 2{,}9 \cdot 10^5 e^{0{,}022x} \text{ В},$$

$$i_{\psi 2}\left(\frac{l_2}{3v_2}, x\right) = 5{,}8 \cdot 10^3 e^{0{,}022x} - 5{,}74 \cdot 10^3 e^{0{,}02x} \text{ А}.$$

Координату x отсчитываем от зажимов $2'–2'$ второй линии в сторону распространения отраженных волн, т. е. к началу второй линии.

10. Для вариантов *а*, *в* и *д*, когда $r_{пр} = z$, имеем $I_{пр} = \dfrac{E}{z}$.

Для варианта *б* получаем $q_u = \dfrac{r_{пр} - z}{r_{пр} + z} = -\dfrac{1}{3}$, $I_{пр} = \dfrac{4E}{3z}$.

Для условия варианта *г* имеем $q_u = \dfrac{1}{3}$ и $I_{пр} = I_{пр} = \dfrac{2E}{3z}$.

Для вариантов *б* и *г* в силу условия $r_0 = z$ отраженные от источника волны отсутствуют.

19.1. Параметры элементов нелинейных электрических цепей

ВОПРОСЫ

1. При действии на входе электрической цепи синусоидального напряжения ток в ней может иметь отличную от нуля постоянную составляющую, если вольт- амперная характеристика нелинейного элемента несимметрична, когда $u_{нэ}(+i) \neq -u_{нэ}(-i)$. Такую характеристику имеют выпрямительные элементы, в частности, полупроводниковые диоды, которые используют для преобразования переменных токов и напряжений в постоянные.

3. В точке 0 имеем $r_д > 0$, в точке A — $r_{ст} > 0$, $r_д > 0$, в точке B $r_{ст} > 0$, $r_д > 0$, в точке C $r_{ст} > 0$, $r_д = 0$, в точке D $r_{ст} > 0$, $r_д < 0$.

4. В точке A выполнено соотношение $r_д > r_{ст}$, в точке B $r_д = r_{ст}$, в точках C, D $r_д < r_{ст}$.

УПРАЖНЕНИЯ

7. Так как напряжение на резисторе должно составлять $u_r = u_1 - u_2 = 10$ В при токе $i_r = i_2 + i_0 = 0{,}1$ А + 0,2 А = 0,3 А (здесь $i_2 = u_2/r_2$, i_0 — ток нелинейного элемента в средней точке горизонтального участка его характеристики), то искомое значение сопротивления резистора составляет $r = u_r/i_r \cong 33$ Ом (рис. Р19.1).

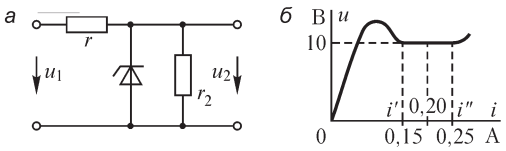


Рис. Р19.1

8. При токе нелинейного элемента $i' = 0{,}15$ А имеем $i'_r = 0{,}15$ А + 0,1 А = 0,25 А, $u'_r = 8{,}25$ В, $u'_1 = u'_r + u_2 = 18{,}25$ В (см. рис. Р19.1), а при токе $i'' = 0{,}25$ А — соответственно $i'_r = 0{,}35$ А, $u''_r = 11{,}55$ В, $u''_1 = 21{,}55$ В. Таким образом, при изменении напряжения на входе цепи на $\Delta u = 21{,}55$ В – 18,25 В = 3,3 В ток в нагрузке сохраняет постоянное значение. При напряжении на входе цепи, равном $u_1 = 20$ В, наименьший ток в нагрузке $i''_2 = 0{,}05$ А ($r''_2 = u_2/0{,}05 = 200$ Ом) имеем при токе

$i'' = 0{,}25$ А, а наибольший ток в нагрузке $i_2' = 0{,}15$ А ($r_2' = 10$ В/0,15 А $\cong 67$ Ом) при токе $i' = 0{,}15$ А. Напряжение на нагрузке сохраняется постоянным при изменении ее сопротивления на значение $\Delta r = 200$ Ом – 67 Ом = 133 Ом.

19.2. Транзистор как элемент электрической цепи

ВОПРОСЫ

1. Ток базы биполярных триодов значительно больше тока затвора полевых триодов, управление которыми осуществляют, меняя напряжение между затвором и истоком. Вследствие этого и коэффициент усиления тока биполярых триодов существенно меньше.

2. Параметры элементов эквивалентной схемы триода в режиме «малого» сигнала постоянны в отношении малых изменений токов и напряжений базы, эмиттера и коллектора, так как соответствующие эквивалентные схемы получены при удержании в разложении в ряд лишь линейно зависящих от аргумента слагаемых. При работе триода при низких частотах принимают также допущение о пренебрежении токами конденсаторов, входящих в схему Эберса–Молла.

4. В цепи с общей базой ток эмиттера, являющийся входным током триода, приблизительно равен току коллектора, который является выходным током. Поэтому коэффициент усиления тока получается несколько меньшим единицы. В цепи с общим эмиттером (как и в цепи с общим коллектором) входной ток триода суть ток базы, существенно меньший токов эмиттера и коллектора, в связи с чем коэффициент усиления тока может значительно превышать единицу.

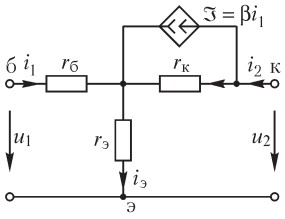


Рис. Р19.2

УПРАЖНЕНИЯ

5. Преобразуем уравнения законов Кирхгофа $i_э = i_1 + i_2$, $u_1 = i_1 r_б + i_э r_э$, $u_2 = i_э r_э + (i_2 - \beta i_1) r_к$ для эквивалентной схемы триода (см. рис. Р19.2) относительно напряжения u_2 и тока $i_1 = i_б$:

$$u_1 = \left[r_б + r_э + \frac{(-r_э + \beta r_к) r_э}{r_э + r_к} \right] i_1 + \frac{r_э}{r_э + r_к} u_2, \quad i_2 = \frac{(-r_э + \beta r_к)}{r_э + r_к} i_1 + \frac{1}{r_э + r_к} u_2.$$

Сопоставление этих уравнений с уравнениями $u_1 = h_{11} i_1 + h_{12} u_2$, $i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} u_2$ позволяет найти искомые величины:

$$h_{11} = r_б + r_э + \frac{r_э(-r_э + \beta r_к)}{r_э + r_к}, \quad h_{12} = \frac{r_э}{r_э + r_к}, \quad h_{21} = \frac{-r_э + \beta r_к}{r_э + r_к}, \quad h_{22} = \frac{1}{r_э + r_к}.$$

Эквивалентная схема триода изображена на рис. Р19.3.

Параметр h_{12} обычно мал, и им часто пренебрегают. В ряде случаев, учитывая, что $h_{22}^{-1} >> h_{11}$, принимают $h_{22} \cong 0$, что упрощает приведенную выше эквивалентную схему триода. Типичные значения h-параметров триодов: $h_{11} \cong 500$ Ом, $h_{12} \cong 10^{-4}$, $h_{21} \cong 100$, $h_{22} \cong 10^{-5}$ См.

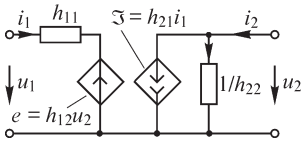


Рис. Р19.3

Иногда целесообразно определять h-параметры триода по полученным опытным путем характеристикам $i_б = f(u_{бэ}, u_{кэ})$ и $i_к = f(u_{кэ}, i_б)$ (рис. Р19.4)

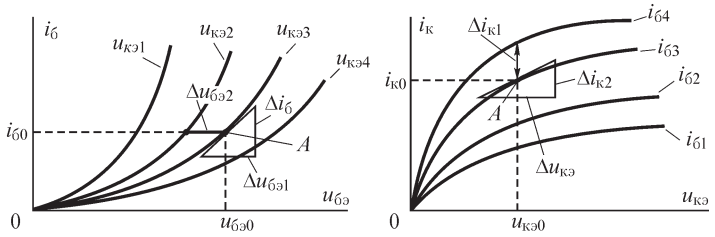


Рис. Р19.4

При разложении нелинейных функций в ряд по малым параметрам $\Delta i_б$, $\Delta u_{кэ}$ в точке A и удержании слагаемых первого порядка малости, т. е. пренебрежении слагаемыми высшего порядка малости, получаем соотношения

$$\Delta u_{бэ} = \frac{\Delta u_{бэ}}{\Delta i_б}\Delta i_б + \frac{\Delta u_{бэ}}{\Delta u_{кэ}}\Delta u_{кэ} = \Delta u_{бэ1} + \Delta u_{бэ2}, \quad \Delta i_к = \frac{\Delta i_к}{\Delta i_б}\Delta i_б + \frac{\Delta i_к}{\Delta u_{кэ}}\Delta u_{кэ} = \Delta i_{к1} + \Delta i_{к2}.$$

Параметры $h_{11} = \dfrac{\Delta u_{бэ}}{\Delta i_б}$, $h_{12} = \dfrac{\Delta u_{бэ}}{\Delta u_{кэ}}$, $h_{21} = \dfrac{\Delta i_к}{\Delta i_б}$, $h_{22} = \dfrac{\Delta i_к}{\Delta u_{кэ}}$ сохраняют постоянные значения в режиме малого сигнала, однако изменяются при изменении положения точки A, определяющей величины $i_{к0}$, $u_{к0}$ при отсутствии входного сигнала.

6. Из уравнений законов Кирхгофа $-u_1 + i_1h_{11} + h_{12}u_2 = 0$, $h_{21}i_1 + u_2h_{22} - i_2 = 0$, $u_2 = -i_2r_н$ для эквивалентной схемы триода (см. решение упр. 5) находим после простых преобразований искомые величины:

$$k_u = \frac{r_н h_{21}}{r_н h_{12} h_{21} - (1 + r_н h_{22})h_{11}}, \quad k_i = \frac{h_{21}}{1 + r_н h_{22}}.$$

Параметры применяемых триодов таковы, что в практических расчетах часто можно принять $h_{12} = 0$ либо одновременно $h_{12} = 0$, $h_{22} = 0$, что упрощает вычисления: $k_u \cong -r_н h_{21} h_{11}^{-1}$, $\quad k_i \cong h_{21}$.

8. Используя эквивалентную схему триода (см. решение упр. 5), изобразим на рис. Р19.5 схему электрической цепи при расчете режима «малого» сигнала.

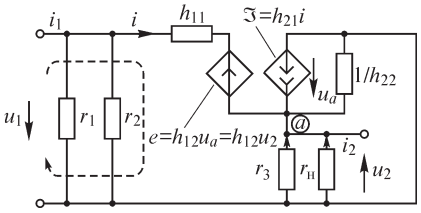


Рис. Р19.5

Записывая уравнения первого закона Кирхгофа для узла a

$$-i - h_{21}i - u_2\left(h_{22} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_н}\right) = 0$$

и второго закона Кирхгофа для отмеченного пунктирной линией контура $-u_1 + ih_{11} - u_2 = -h_{12}u_2$, находим после простых преобразований величины

$$k_u = \frac{u_2}{u_1} = -\frac{1 + h_{21}}{(1 - h_{12})(1 + h_{21}) + gh_{11}}, \quad k_i = \frac{-g_н(1 + h_{21})}{g + g_{12}[(1 - h_{12})(1 + h_{21}) + gh_{11}]},$$

где $g = h_{22} + \dfrac{1}{r_3} + \dfrac{1}{r_н}$, $g_{12} = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$, $g_н = \dfrac{1}{r_н}$.

Подставляя численные значения, находим: $k_u \cong -0{,}99$, $k_i \cong -1{,}56$.

9. Используя эквивалентную схему триода (см. решение упр. 5), можем изобразить схему электрической цепи (рис. Р19.6) для расчета токов и напряжений в режиме «малого» сигнала. Подставляя в уравнение второго закона Кирхгофа $u_1 - ih_{11} = h_{12}u_2$ соотношение $i = -u_2 g \cdot 1/h_{21}$, где $g = h_{22} + 1/r_н + 1/r_4$, получаем после простых преобразований величины

$$k_u = \frac{h_{21}}{-gh_{11} + h_{12}h_{21}}, \qquad k_i = \frac{g_н h_{21}}{g + g_{12}(gh_{11} - h_{12}h_{21})}$$

(в последнем выражении обозначено $g_н = 1/r_н$, $g_{12} = 1/r_1 + 1/r_2$).

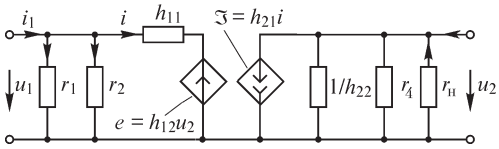


Рис. Р19.6

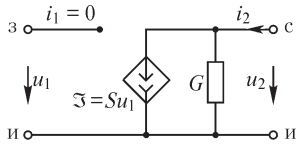


Рис. Р19.7

10. Сопоставление уравнений законов Кирхгофа $i_1 = 0$, $i_2 = Su_1 + Gu_2$ (рис. Р19.7) и уравнений $i_1 = y_{11}u_1 + y_{12}u_2$, $i_2 = y_{21}u_1 + y_{22}u_2$ позволяет получить искомые величины: $y_{11} = 0$, $y_{12} = 0$, $y_{21} = S$, $y_{22} = G$.

11. Из соотношения $u_2 = -i_2 r_н = -Su_1 r_н - Gu_2 r_н$ получаем $k_u = \dfrac{u_2}{u_1} = -\dfrac{Sr_н}{1 + Gr_н}$ (см. рис. Р19.7).

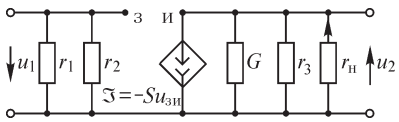


Рис. Р19.8

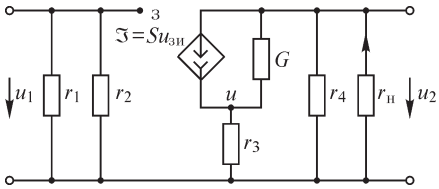


Рис. Р19.9

12. На рис. Р19.8 изображена схема усилителя (вариант *а*) в режиме «малого» сигнала. Так как $u_2 = -\dfrac{Su_{зи}}{G + 1/r_3 + 1/r_н}$, то $k_u = -\dfrac{u_2}{u_1} = -\dfrac{Sg}{1 + Sg}$, где $g = G + g_3 + g_4$.

Для цепи варианта *б* соответствующая схема приведена на рис. Р19.9.

19.3. Нелинейные свойства ферромагнитных материалов

ВОПРОСЫ

3. При различных частотах тока катушки распределение магнитной индукции в ферромагнитном сердечнике также различно: при низких частотах равномерность распределения магнитного потока в сердечнике больше, чем при высоких. Чем выше удельная электрическая проводимость ферромагнитного вещества,

тем больше проявляется этот эффект, так как влияние вихревых токов в этом случае возрастает.

Поэтому индуктивность катушки с ферромагнитным сердечником зависит от частоты протекающего по ней тока: с увеличением частоты тока ее индуктивность уменьшается, причем эта зависимость имеет нелинейный характер.

19.4. Аппроксимация нелинейных характеристик

ВОПРОСЫ

1. К недостаткам метода кусочно-линейной аппроксимации можно отнести: *а*) необходимость задания большого числа участков для получения приемлемой точности расчета; *б*) скачкообразное изменение параметра (например, индуктивности либо сопротивления) при переходе от любого участка к соседнему вследствие различного наклона отрезков прямых на участках. Этот недостаток не удается преодолеть путем увеличения числа участков.

2. Стремление увеличить точность расчета приводит к усложнению применяемых для аппроксимации нелинейных характеристик зависимостей. Так, например, при использовании степенного полинома для аппроксимации нелинейной характеристики на всем рабочем диапазоне изменения аргумента его порядок должен быть достаточно высоким. Однако при увеличении порядка полинома он становится колебательным вблизи нелинейной характеристики, что приводит к росту погрешности аппроксимации производных нелинейной функции, которые зачастую используют в расчетах.

Разбивая нелинейную характеристику на ряд участков и аппроксимируя ее на каждом из участков полиномом невысокого порядка, можно увеличить точность, сохраняя непрерывность функции и ее производных на границах участков.

3. Принимая при разбиении нелинейной характеристики $u = f(i)$ на n участков заданными значения u_1 при $i = i_1$, u_2 при $i = i_2$, ..., u_{n+1} при $i = i_{n+1}$, находим $2n$ искомых коэффициентов из уравнений $u_k = a_k i_k + b_k$, $k = 1, ..., n$. Например, для получения коэффициентов a_k, b_k решаем уравнения: $u_k = a_k i_k + b_k$, $u_{k+1} = a_k i_{k+1} + b_k$.

4. При разбиении диапазона изменения аргумента нелинейной характеристики на n участков имеем $n + 1$ точек (из них $n - 1$ — точки внутренние и 2 точки — граничные), в которых заданы значения u_k ($k = 1, ..., n + 1$) нелинейной функции. Как и в предыдущем упражнении, можем составить по два уравнения

$$u_k = a_k i_k^3 + b_k i_k^2 + c_k i_k + d_k, \quad u_{k+1} = a_k i_{k+1}^3 + b_k i_{k+1}^2 + c_k i_{k+1} + d_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

на каждом из n участков (всего $2n$ уравнений)

Применение полиномов третьего порядка позволяет обеспечить во всех внутренних $n - 1$ точках непрерывность первой и второй производных нелинейной функции, что дает возможность составить дополнительно $2(n - 1)$ уравнений:

$$3a_k i_{k+1}^2 + 2b_k i_{k+1} + c_k = 3a_{k+1} i_{k+1}^2 + 2b_{k+1} i_{k+1} + c_{k+1},$$
$$6a_k i_{k+1} + 2b_k = 6a_{k+1} i_{k+1} + 2b_{k+1}, \quad k = 2, \ldots, n.$$

Для получения недостающих $4n - 2n - 2(n - 1) = 2$ уравнений задают две производные функции в двух граничных точках. Например, при задании первых производных имеем уравнения

$$3a_1 i_1^2 + 2b_1 i_1 + c_1 = u_1', \;\; 3a_n i_{n+1}^2 + 2b_n i_{n+1} + c_n = u_{n+1}'.$$

Заметим, что такой способ нахождения двух недостающих величин не является единственно возможным.

20.1. Последовательное, параллельное и смешанное соединение нелинейных элементов электрических цепей

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Характеристика нелинейного элемента должна быть неуправляемой по напряжению, подобно изображенной на рис. Р20.1 характеристике $u = F(i)$. При увеличении напряжения на входе цепи от нуля до u_1 ток примет значение i_1, тогда как при его уменьшении от значения $u >> u_1$ до u_1 — значение $i_3 \neq i_1$.

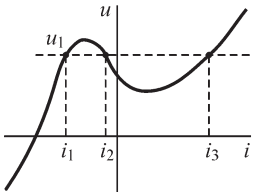


Рис. Р20.1

2. Точки пересечения прямой $u = u_0 - r_1 i$ (рис. Р20.2) с характеристикой $u_{нэ} = F(i)$ являются точками равновесия, так как для этих точек справедливо уравнение второго закона Кирхгофа: $u_{нэ} + ir_1 = u_0$. Для показанного напряжения u_0 на входе цепи количество точек равновесия зависит от значения сопротивления r_1 резистора: при малых r_1 оно равно трем (A, B, C), а при больших — одной (D). При $u < u_{min}$ возможно существование лишь одной точки равновесия.

3. Решая уравнение $u = u_1 = u_2 = C(i_1 + i_2)$, где C — постоянная, $i_2 = \sqrt{u/k}$, получаем искомую зависимость $i_1 = u/C - \sqrt{u/k}$.

5. Построив зависимость $u_3 = f(i_3) = u_{нэ3}(i_{нэ3}) - E_3$, получаем далее соотношение $i_1 = f(u_2) = i_2(u_{нэ2}) + i_3(u_3)$. Искомая зависимость принимает вид $u_{вх} = u_1(i_1) + u_2(i_1)$, где $u_1 = u_{нэ1}(i_1) + E_1 = u_1(i_1)$.

8. Функция $i = f(u)$ изображена на рис. Р20.3 сплошной линией.

9. Схема электрической цепи изображена на рис. Р20.4.

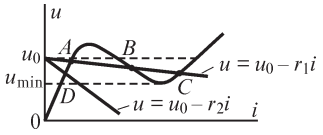


Рис. Р20.2

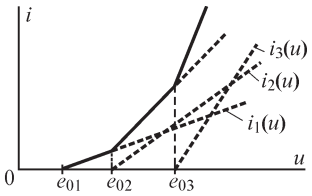


Рис. Р20.3

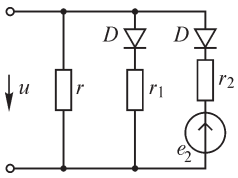


Рис. Р20.4

20.2. Методы расчета нелинейных электрических цепей

УПРАЖНЕНИЯ

2. Входящие в выражение $u_{нэ} = \Im \dfrac{1}{g_г + g_{нэ}(u)}$ величины $\Im$, $g_г$ определяют параметры эквивалентного генератора (рис. Р20.5). Ток $\Im$ эквивалентного генератора суть ток ветви замкнутого накоротко нелинейного элемента, $g_г$ — проводимость цепи между зажимами нелинейного элемента при замкнутых накоротко источниках ЭДС и разомкнутых ветвях, содержащих источники тока.

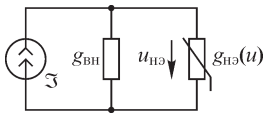


Рис. Р20.5

6. Для схемы *а* (вариант 2) имеем: $e = r_1 i + u_2 = r_1 f(u_2) + u_2$, откуда получаем уравнения $u_2 = e - r_1 f(u_2)$, $r_1 f(u_2) + u_2 - e = 0$.

Для схемы *б* (вариант 2) можем записать: $\Im = i_1 + i_2 = g_1 u + i_2 = g_1 f(i_2) + i_2$, $i_2 = \Im - g_1 f(i_2)$, $g_1 f(i_2) + i_2 - \Im = 0$.

Для схемы *в* (вариант 1) из уравнений $e = u_1 + u_2 = f_1(i_1) + f_2(i_3)$, $i_3 = i_1 - i_2 = i_1 - \dfrac{1}{r} f_2(i_3)$ находим ток $i_1 = i_3 + \dfrac{1}{r} f_2(i_3)$ и, подставляя его в первое уравнение, получаем искомое уравнение $e = f_1[i_3 + \dfrac{1}{r} f_2(i_3)] + f_2(i_3)$, или $f_1[i_3 + \dfrac{1}{r} f_2(i_3)] + f_2(i_3) - e = 0$.

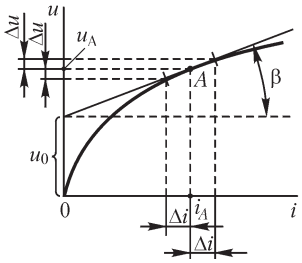


Рис. Р20.6

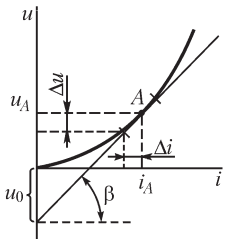


Рис. Р20.7

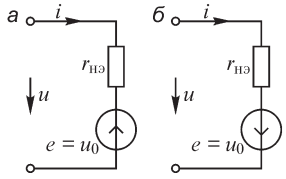


Рис. Р20.8

8. Для характеристики, изображенной на рис. Р20.6, имеем $r_{нэ} = \dfrac{\Delta u}{\Delta i}$, $e = u_0$, а для характеристики, приведенной на рис. Р20.7, $r_{нэ} = \dfrac{\Delta u}{\Delta i}$, $e = -u_0$. Схемы замещения элементов изображены на рис. Р20.8.

20.3. Нелинейные магнитные цепи

УПРАЖНЕНИЯ

3. Таблица аналогичных величин электрических и магнитных цепей приведена ниже.

Электрическая цепь	e	i	J	r	g	γ
Магнитная цепь	F	Φ	B	$R_м$	Λ	μ

4. Учитывая, что магнитное сопротивление участка магнитной цепи можем найти с помощью выражения $R_м = \dfrac{l}{\mu s}$, получаем искомое отношение: $\dfrac{R_{мс}}{R_{мв}} = \dfrac{20-0{,}1}{100 \cdot 0{,}1} \cong 2.$

Таким образом, магнитные сопротивления сердечника и зазора имеют один и тот же порядок, и, несмотря на относительную малость зазора, при расчете магнитной цепи им пренебречь нельзя.

10. Вариант *а*. При одновременном установлении токов намагничивание на всех участках магнитной цепи происходит по первоначальной кривой намагничивания, тогда как во втором случае такое намагничивание имеет место только при установлении тока i_1. При последующем увеличении тока i_2 только поток Φ_3 продолжает возрастать, тогда как потоки Φ_1, Φ_2 уменьшаются и происходит перемагничивание участков магнитной цепи уже не по первоначальной кривой намагничивания. Поэтому в общем случае в нелинейной магнитной цепи значения потоков на ее участках зависят от порядка установления токов катушек.

Вариант *б*. В рассмотренном выше случае неодновременного установления токов катушек поток Φ_2 может изменить направление при выборе соответствующего соотношения между МДС i_1w_1 и i_2w_2.

Вариант *в*. Это возможно, так как если вначале устанавливать ток i_1, то потоки Φ_1, Φ_2 принимают наибольшие значения, которые в дальнейшем при установлении тока i_2 уменьшаются.

21.1. Формы кривых тока и напряжения в нелинейных цепях. Метод эквивалентных синусоид

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

5. Зависимость $i(t)$ изображена на рис. Р21.1.

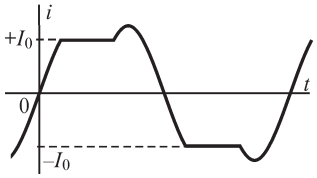


Рис. Р21.1

8. При уменьшении площади петли гистерезиса величина $P_{фер}$ уменьшается и угол φ увеличивается. С увеличением толщины листов сердечника (при неизменной удельной электрической проводимости материала листов) растут потери $P_в$, обусловленные вихревыми токами, и угол φ падает. При уменьшении удельной электрической проводимости вещества листов сердечника величина $P_в$ уменьшается и угол φ растет.

21.2. Катушка и трансформатор с ферромагнитным сердечником. Явление феррорезонанса

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

2. Рассматривая участок цепи (рис. Р21.2) как двухполюсник, содержащий элементы g_0, b_0, можем записать его эквивалентные параметры $r_0 = \dfrac{g_0}{g_0^2 + b_0^2}$, $x_0 = \dfrac{b_0}{g_0^2 + b_0^2}$, получаемые из соотношения $Z_0 = \dfrac{1}{g_0 - jb_0}$.

На векторной диаграмме (см. рис. Р21.2, *б*), соответствующей эквивалентной схеме катушки и содержащей элементы r_0, x_0, напряжение U_0 разложено на активную U_{r0} составляющую, находящуюся в фазе с током, и реактивную U_{x0} составляющую.

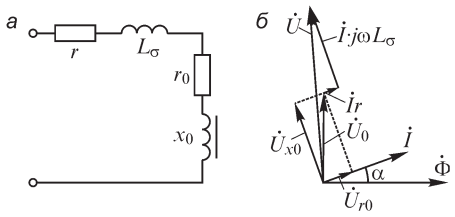


Рис. Р21.2

3. Использование листов большей толщины ведет вследствие увеличения вихревых токов к росту потерь $P_в$ на вихревые токи и, следовательно, полных потерь в сердечнике. При этом угол α магнитного запаздывания между эквивалентными синусоидами тока катушки и магнитного потока в сердечнике возрастает, а угол φ между эквивалентными синусоидами приложенного к катушке напряжения и тока в ней уменьшается.

Введение воздушного зазора в ферромагнитный сердечник катушки приводит к изменению характеристики $\Psi = f(I)$, которую можно получить, учитывая, что участки магнитной цепи (сердечник и воздушный зазор) соединены последовательно. При этом угол магнитного запаздывания уменьшается.

4. Так как комплексное магнитное сопротивление сердечника связано с комплексным электрическим сопротивлением его обмотки, а последнее, в свою очередь, зависит от способа выбора эквивалентных синусоид тока и напряжения, то и величина $Z_м$ зависит от того, как выбраны эквивалентные синусоиды.

11. Если в точке $U = 0$, $I = 0$ провести касательную к кривой $U_L = f(I)$, то тангенс угла α ее наклона к оси тока определит величину $1/\omega C_{\min}$, откуда находим искомое наименьшее значение емкости $C_{\min}$.

21.3. Методы гармонического баланса и кусочно-линейной аппроксимации нелинейных характеристик

ВОПРОСЫ

5. Процесс будет описываться одним и тем же дифференциальным уравнением на всем участке *ab* изменения одной из величин, если при этом ни одна из переменных, связанная нелинейными зависимостями с другими, не выходит за пределы своего прямолинейного отрезка. Однако уже при наличии двух нелинейных элементов, характеристики которых аппроксимируют несколькими прямолинейными отрезкам, это условие трудновыполнимо. В то время как соответствующая одному нелинейному элементу переменная находится на отрезке *ab*, переменная другого нелинейного элемента может перейти от одного отрезка аппроксимации характеристики к другому. При этом переходе изменяется и дифференциальное уравнение, описывающее переходный процесс в цепи.

В общем случае дифференциальное уравнение изменяется при переходе через любую точку, общую для двух соседних прямолинейных отрезков, аппроксимирующих любую из нелинейных характеристик.

22.1. Устойчивость состояния равновесия

ВОПРОСЫ

2. Это возможно, так как в устойчивой электрической цепи отклонение любой из величин (тока или напряжения) должно стремиться к нулю при $t \to \infty$. Если же цепь неустойчива, то при отклонении любой из величин от равновесного значения токи и напряжения не возвращаются к начальным равновесным значениям.

4. При увеличении индуктивности катушки время перехода из точки A в точку B возрастает, переходный процесс протекает медленнее.

При увеличении сопротивления резистора изменяется положение точек A, B и токи равновесных состояний сближаются. При критическом значении сопротивления резистора, когда прямая $u = u_0 - ri$ касательна к линии $u = f(i)$, состояние равновесия становится единственным.

УПРАЖНЕНИЯ

8. Для получения искомого соотношения записываем, линеаризуя характеристику нелинейного элемента в точке равновесия, линейное дифференциальное уравнение относительно малого отклонения η тока либо напряжения на нелинейном элементе от состояния равновесия. Требуемое соотношение следует из условия $\alpha < 0$, где α — корень соответствующего дифференциальному характеристического уравнения. Например, для цепи *а* из уравнения

$$L\frac{d\eta}{dt} + \left(r_1 + \frac{r_2 r_д}{r_2 + r_д}\right)\eta = 0$$

для малого отклонения тока нелинейного элемента получаем соотношение $r_1 + \dfrac{r_2 r_д}{r_2 + r_д} > 0$, где $r_д$ — динамическое сопротивление нелинейного элемента в точке равновесия.

Для цепи *в* из уравнения

$$r_1(1 + g_д r_2)C\frac{d\eta}{dt} + [1 + g_д(r_1 + r_2)]\eta = 0$$

для малого отклонения напряжения получаем соотношение $\dfrac{1 + g_д(r_1 + r_2)}{r_1(1 + g_д r_2)} > 0$, при выполнении которого состояние равновесия устойчиво (здесь $g_д = \dfrac{1}{r_д}$ — динамическая проводимость нелинейного элемента в точке равновесия).

22.2. Автоколебания в нелинейных электрических цепях

ВОПРОСЫ

1. В нелинейных электрических цепях с обратными связями, как и в линейных цепях, могут существовать автоколебания как при положительной, так и при отрицательной обратной связи. Условиями их возникновенияпри линеаризации характеристик являются балансы амплитуд и фаз. Они могут быть выполнены

при любом виде обратной связи. Так, если в цепи устроена отрицательная обратная связь, то вследствие появления фазовых сдвигов при прохождении сигнала она может стать положительной (если полный фазовый сдвиг составляет 180°). Если же в цепи выполнена положительная обратная связь, то это еще не гарантирует появления автоколебаний. Действительно, если сдвиг по фазе между сигналами на входе и выходе цепи с разомкнутой обратной связью составляет 180°, то при замыкании цепи обратной связи она становится отрицательной и автоколебания не возбуждаются. При сдвиге по фазе 0 или 360° происходит возбуждение колебаний.

2. Если в цепи не действуют источники энергии и входящие в нее элементы неидеальны, то автоколебания невозможны, так как начальная запасенная в цепи энергия рассеивается в виде тепла в неидеальных элементах. Однако при действии в цепи источников автоколебания возможны, даже если в нее входят неидеальные элементы, так как выделение энергии в элементах компенсируется ее поступлением от источников.

6. Наибольшая возможная амплитуда колебаний тока определяется его наибольшим значением i_{max} в соответствии с нелинейной характеристикой элемента. В связи с тем, что динамическая проводимость есть функция напряжения нелинейного элемента, возможно существование колебаний с любой амплитудой, не превышающей величины i_{max}.

8. Амплитуду и частоту колебаний в цепи можем найти, решая уравнение $1 - K(j\omega)K_{oc}(j\omega) = 0$, равносильное двум уравнениям: $\mathrm{Re}\,[K(j\omega)K_{oc}(j\omega)\,)] = 1$, $\mathrm{Im}\,[K(j\omega)K_{oc}(j\omega)] = 0$, которые в зависимости от характеристик $K(j\omega)$, $K_{oc}(j\omega)$ принимают тот или иной вид. Если, в частности, имеем $K(j\omega) = K_y$, то они переходят в уравнения $\mathrm{Re}\,[K_{oc}(j\omega)] = K_y^{-1}$, $\mathrm{Im}\,[K_{oc}(j\omega)] = 0$.

9. Динамические сопротивления нелинейного элемента в точках восходящих участков характеристики положительны, и поэтому соответствующие точкам на этих участках состояния равновесия устойчивы. Малые отклонения от состояния равновесия в этих точках уменьшаются по апериодическому закон, в связи с чем автоколебания в цепи не возникают.

22.3. Расчет переходных процессов в нелинейных цепях

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

4. При интегрировании дифференциального уравнения первого порядка на каждом участке характеристики единственную постоянную находим из условия непрерывности искомой переменной при переходе от одного участка к соседнему. Если априорно известно, что искомая переменная непрерывна и имеет непрерывные производные до $k - 1$ порядка включительно при значениях переменных на границах участков аппроксимации нелинейной характеристики, то для нахождения в общем случае k постоянных интегрирования следует использовать условия непрерывности функции и ее $k - 1$ производной.

7. Вариант *а*. Найдем границы рабочего участка характеристики нелинейного резистора, т. е. его ток i и напряжение u при $t = 0$ и при $t \to \infty$ (рис. Р22.1).

Так как при начальном условии $u_C(0) = 0$ имеем $i_1(0) = 0$, то $u_{нэ}(0) = u_0 = 110$ В и $i(0) = i_0 = 1{,}1$ А (рис. Р22.2).

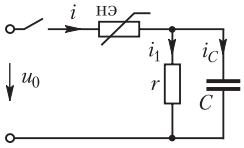


Рис. Р22.1

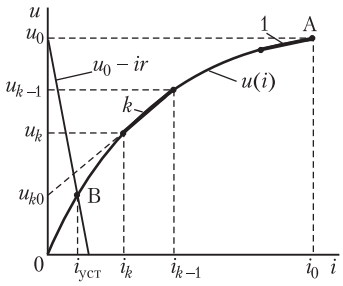


Рис. Р22.2

После окончания переходного процесса имеем $i_c = 0$, и поэтому $i_{уст} = i_1$. Точка пересечения характеристики $u(i)$ и прямой $u = u_0 - ir$ (рис. Р22.2) определяет значения $i_{уст} = 0{,}1$ А и $u_{уст} = 50$ В. Таким образом, рабочим является участок характеристики от точки А (при $t = 0$) до точки В (при $t \to \infty$).

Характеристику нелинейного резистора представляем на рабочем участке совокупностью прямолинейных отрезков (на рис. Р22.2 показаны первый и k-й отрезки). Уравнение прямой на k-м участке имеет вид $u = u_{k0} + r_{дk} i$, где $r_{дk} = \dfrac{u_k - u_{k-1}}{i_k - i_{k-1}}$ — динамическое сопротивление резистора на этом участке.

Исключив из уравнений законов Кирхгофа $i = i_1 + C\dfrac{du_C}{dt}$, $i_1 r = u_C$, $u(i) + u_C = u_0$ ток i_1, получаем уравнения $ir = u_C + rC\dfrac{du_C}{dt}$, $u(i) + u_C = u_0$.

Заменяя нелинейную зависимость $u(i)$ на k-м участке на линейную $u = u_{k0} + r_{дk} i$, из последнего уравнения находим ток $i = \dfrac{1}{r_{дk}}(u_0 - u_{k0} - u_C)$ и приходим к линейному дифференциальному уравнению $r_{дk} C\dfrac{du_C}{dt} + (\dfrac{r_{дk}}{r} + 1)u_C = u_0 - u_{k0}$.

Решение этого уравнения записываем в виде $u_{ck}(t) = u_{Ck,уст} + (u_{C,k-1} - u_{Ck,уст})\, e^{-t/\tau_k}$, где $u_{Ck,уст} = \dfrac{u_0 - u_{k0}}{1 + \dfrac{r_{дk}}{r}}$, $u_{C,k-1} = u_0 - u(i_{k-1})$ — напряжение на конденсаторе при $i = i_{k-1}$, $\tau_k = \dfrac{r r_{дk}}{r + r_{дk}} C$.

Промежуток времени Δt_k, за который ток нелинейного резистора изменяется от i_{k-1} до i_k, находим с помощью соотношения

$$\Delta t_k = \tau_k \ln \frac{u_{C,k-1} - u_{Ck,уст}}{u_{Ck} - u_{Ck,уст}}, \text{ где } u_{Ck} = u_0 - u(i_k).$$

Задавая значения $k = 1, 2, \ldots$, получаем $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots$ и далее рассчитываем моменты времени $t_1 = \Delta t_1$, $t_2 = t_1 + \Delta t_2, \ldots$, в которые ток резистора принимает значения $i_1, i_2, \ldots$, а напряжение на конденсаторе — значения $u_{C_1}, u_{C_2}, \ldots$

На рис. Р22.3 изображена зависимость $u_C(t)$,полученная при замене рабочего участка характеристики $u(i)$ девятью прямолинейными отрезками.

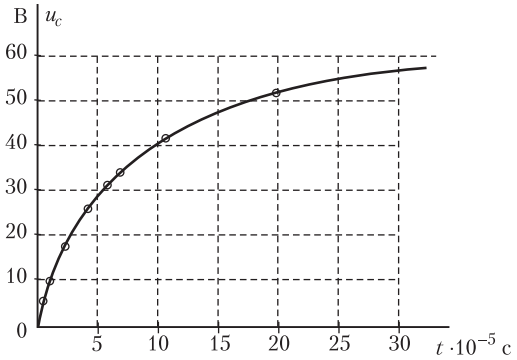


Рис. Р22.3

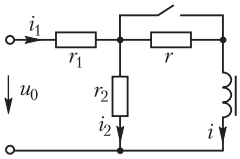


Рис. Р22.4

Вариант *в*. Найдем границы рабочего участка характеристики нелинейной катушки, изображенной на рис. Р22.4 цепи:

$$i(0) = \frac{u_0 - i_1(-0)r_1}{r} = 1 \text{ А}, \quad i_{\text{уст}} = \frac{u_0}{r_1} = 10 \text{ А}.$$

Из уравнений законов Кирхгофа $i + i_2 = i_1, \dfrac{d\psi}{dt} = i_2 r_2, i_1 r_1 + i_2 r_2 = u_0$ получаем уравнение $\dfrac{r_1 + r_2}{r_2}\dfrac{d\psi}{dt} + ir_1 = u_0$, которое с учетом соотношения $\dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{d\psi}{di}\dfrac{di}{dt} = L_{\text{д}}\dfrac{di}{dt}$ ($L_{\text{д}}$ — динамическая индуктивность катушки) можем записать в виде

$$\frac{r_1 + r_2}{r_2} L_{\text{д}} \frac{di}{dt} + ir_1 = u_0.$$

Заменяя нелинейную характеристику $\psi = \psi(i)$ катушки на рабочем участке от $i(0)$ до $i_{\text{уст}}$ совокупностью прямолинейных отрезков (рис. Р22.5), переходим на каждом из отрезков к линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{r_1 + r_2}{r_2} L_{\text{д}k} \frac{di}{dt} + ir_1 = u_0, \text{ или}$$

$$L_{\text{д}k} \frac{di}{dt} + 10i = 100,$$

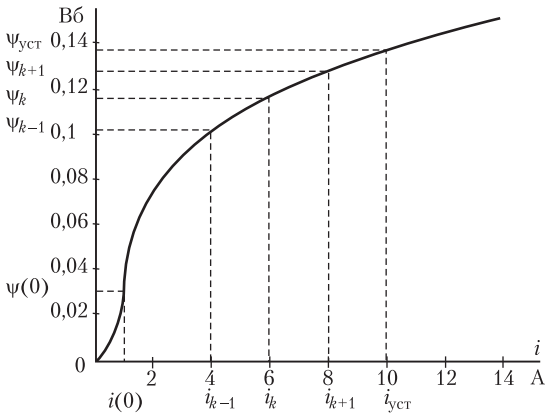


Рис. Р22.5

где $L_{дk} = \dfrac{\psi_k - \psi_{k-1}}{i_k - i_{k-1}}$ — динамическая индуктивность, принимающая постоянные значения $L_{д1}, L_{д2}, \ldots$ на участках характеристики $\psi(i)$ (рис. Р22.5). Решение этого уравнения можем записать в виде $i(t) = i_{уст} + [i_k(0) - i_{уст}]\,e^{-t/\tau_k}$, где $i_k(0)$ — начальное значение тока катушки на участке k, равное току на границе k-го и $(k+1)$-го участков характеристики $\psi(i)$, $\tau_k = \dfrac{L_{дk}(r_1 + r_2)}{r_1 r_2}$. Отсчитывая время от момента начала переходного процесса на k-м участке, получаем выражение для расчета промежутка времени Δt_k, в течение которого ток катушки изменяется от i_{k-1} до i_k:

$$i_k = i_{уст} + (i_{k-1} - i_{уст})\,e^{-\frac{\Delta t_k}{\tau_k}}.$$

Отсюда находим

$$\Delta t_k = \tau_k \ln \frac{i_{k-1} - i_{уст}}{i_k - i_{уст}}.$$

Принимая $k = 1,\ 2,\ \ldots$, получаем величины $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots$ и далее моменты времени $t_1 = \Delta t_1,\ t_2 = t_1 + \Delta t_2,\ t_3 = t_2 + \Delta t_3, \ldots$, в которые ток катушки достигает значений $i_1, i_2, \ldots$.

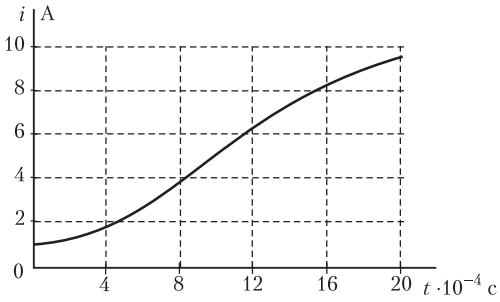


Рис. Р22.6

На рис. Р22.6 изображена зависимость $i(t)$, полученная при замене рабочего участка характеристики $\psi(i)$ десятью прямолинейными отрезками.

22.4. Метод фазовой плоскости

УПРАЖНЕНИЯ

6. Выражая из уравнения $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ величину y, получаем $y^2 = b^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$, откуда имеем: $y = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $dt = \dfrac{a\,dx}{b\sqrt{a^2 - x^2}}$, так что искомое время переходного процесса $T = \dfrac{a}{b}\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi a}{2b}$.

7. Используя решение предыдущего упражнения, получаем:

$$\Delta t = \frac{a}{b}\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a}{b}\left(\arcsin\frac{x_{\nu+1}}{a} - \arcsin\frac{x_\nu}{a}\right).$$

Алфавитный указатель

Z

z-изображение решетчатой функции, 145

А

акцептор, 337
аппроксимация
  нелинейных характеристик
    кусочно-линейная, 429
    сплайновая, 383

Б

бареттер, 333
биения колебаний, 46
блок
  направленного действия, 206

В

ветвь
  обобщенная, 57
волна
  бегущая, 281
  напряжения
    обратная, 297
    прямая, 296
  обратная, 282
  отраженная, 282, 299
  падающая, 282, 299
  преломленная, 299
  прямая, 282
  стоячая, 288
    пучности напряжения, 288
    узлы тока, 288
выпрямитель, 432
вязкость
  диэлектрическая, 365

Г

генератор
  колебаний
    ламповый, 476
    транзисторный, 448
гистерезис
  диэлектрический, 363
    потери, 365
  магнитный, 356
граф нормальный, 58

Д

декремент колебаний, 41
  логарифмический, 41
дерево графа
  нормальное, 58
  фундаментальное, 256
диагностика
  задачи, 254
  электрической цепи, 254
    активной, 264
    при неполных исходных данных, 265
    с жесткими математическими моделями, 267
    тестовая, 254
    функциональная, 254
диаграмма
  векторная
    катушки с ферромагнитным сердечником, 412
    трансформатора, 415
диод
  полупроводниковый, 335
донор, 336
дроби
  простые, 231
  цепные, 236
дробовой эффект, 152
дуга
  электрическая, 329

Е

емкость
  динамическая, 366
  дифференциальная, 366
  статическая, 366

Ж

жесткие дифференциальные
уравнения, 77

З

задача
Коши, 67
некорректная, 265
закон
Кирхгофа
в операторной форме, 98
магнитной цепи, 393
Ома
в операторной форме, 99
зона прозрачности, 196

И

изображение
операторное
интеграла, 95
производной, 94
функций, 97
изображения
операторные, 93
изоклина, 472
импульсные
системы, 121
ЭДС и токи, 121
инвертор, 432
индуктивность
динамическая, 361
дифференциальная, 361
статическая, 361
интеграл
Дюамеля, 127
Лапласа, 93
Фурье, 111
в тригонометрической форме, 113

К

кенотрон, 331
колебания
затухающие, 40
незатухающие, 41
релаксационные, 453
короткое замыкание
режим, 286
коэффициент
затухания, 194, 278
искажения, 438
отражения, 299
напряжения, 282
тока, 282
преломления, 299
рапространения линии, 278
распространения
операторное выражение, 295
усиления
лампы, 344
фазы, 194, 278
кривая намагничивания
начальная, 355
основная, 356
кривая размагничивания, 399
критерий устойчивости
Рауса—Гурвица, 209, 446
частотный, 210
крутизна
характеристики
лампы, 343
триода, 353

Л

линеаризация
условная
уравнения цепи, 466
линеаризация характеристики, 389
линия
неискажающая, 283
однородная, 275
уравнения, 276

М

магнитодиэлектрик, 360
макромодель, 90
высшего уровня, 90
низшего уровня, 90

мера передачи, 194
метод
z-преобразования, 145
аппроксимации
сплайновый, 383
Ван-дер-Поля, 476
гармонического
баланса, 424
итераций
расчет нелинейных цепей, 380
Кауера, 237
линеаризации в малом, 445
медленно меняющихся амплитуд, 475
Ньютона
расчет нелинейных цепей, 382
операторный, 93
переменных состояний, 55
переменных состояния, 21
преобразования
частоты, 203
синтетических схем, 86
сопряжения интервалов, 429
узловых сопротивлений, 256
обобщенный, 262
Фостера, 237
частотных характеристик, 110
численного интегрирования уравнений состояния, 68
А-устойчивый, 75
Линигера—Уиллаби, 69
многошаговый, 68
одношаговый, 68
системный, 82
степени ν, 69
трапеций, 69
усовершенствованный ломаных, 70
четвертой степени, 70
Эйлера неявный, 69
Эйлера явный, 68
Эйлера—Коши, 69
эквивалентных синусоид, 406

Н

начальные условия
ненулевые, 22
нулевые, 22

О

область устойчивости метода численного интегрирования, 72
обратная связь
отрицательная, 186
положительная, 186
опрокидывание
инвертора, 435

П

переменные сосотояния, 19
период
затухающих
колебаний, 40
незатухающих колебаний, 41
период собственных колебаний линии, 305
петля
гистерезиса, 365
частная, 400
гистерезисная
динамическая, 358
симметричная, 356
статическая, 358
плоскость
фазовая, 468
плотность
спектральная, 112
пограничный слой, 77
подграф связей нормальный, 58
полоса задерживания, 196
полоса пропускания, 196
поляризация, 363
порядок сложности задачи диагностики, 268
постоянная времени цепи, 24, 29
потери
на вихревые токи, 409
на гистерезис, 410

правило
Рунге, 70
преобразование
Лапласа, 93, 119
дискретное, 140
обратное, 94, 119
правое, 130
прямое, 119
по Карсону, 94
Фурье, 119
обратное, 111
обратное в обобщенной форме, 119
прямое, 111
прямое в обобщенной форме, 119
прямое одностороннее, 111
прибор
электронный, 332
принцип повторных измерений, 270
проводимость
внутренняя
триода, 353
внутренняя лампы, 343
динамическая, 326
дифференциальная, 326
импульсная, 128
магнитная, 393
операторная, 101
переходная, 122
статическая, 326
проницаемость
лампы, 344
магнитная
комплексная, 413
процесс
автоколебательный, 448
переходный, 17

Р

равенство
Парсеваля, 113
разряд конденсатора
апериодический, 37
колебательный, 40
Ракитский Ю. В., 270
режим
инверторный, 435
короткого замыкания, 286
холостого хода, 285

С

сегнетоэлектрик, 363
сечение графа особое, 267
сила
коэрцитивная, 356
синтез электрических цепей, 228
скорость
фазовая, 281
случайные ЭДС, токи и напряжения, 151
соединение четырехполюсников
характеристически согласованное, 193
сопротивление
внутреннее
лампы, 343
триода, 353
динамическое, 326
диффренциальное, 326
линии
волновое, 278
операторное, 295
характеристическое, 278
магнитное, 393
комплексное, 412
операторное, 99
повторное, 193
статическое, 326
характеристическое, 192
сплайн-функция, 383
стабилизатор
напряжения, 334
ферромагнитный, 421
тока, 334
субгармоника, 481
схема
Г-образная, 198

лестничная, 181
мостовая, 181
синтетическая
катушки, 87
конденсатора, 87
структурная, 206
замкнутая, 207
параллельное соединение, 207
последовательное соединение, 206
разомкнутая, 207
цепная, 192
эквивалентная, 351
биполярного триода, 352
катушки с ферромагнитным сердечником, 412
полевого триода, 353
трансформатора, 415
Эберса—Молла, 351

Т

теорема
разложения, 104
Релея, 113
Штурма, 246
терморезистор, 328
тиристор, 354
ток
вихревой, 358
насыщения, 332
свободный, 18
установившийся, 18
точка
изображающая, 468
траектория
фазовая, 468
триод
полупроводниковый, 346
биполярный, 348
полевой, 348

У

угол
безопасности, 435
коммутации, 434
опережения, 435
регулирования, 435
узел
неустойчивый, 471
устойчивый, 471
умножение частоты, 427
уравнение
волновое, 292
разностное, 140
уравнения
состояния, 21
в нормальной форме, 56
уравнения
состояния
в нормальной форме, 57
усилитель
мощности
ферромагнитный, 423
устойчивость
методов численного интегрирования, 71
режим в цепи с нелинейным резистором и катушкой индуктивности, 439
режим в цепи с нелинейным резистором и конденсатором, 441
устойчивость процесса в цепи, 208
устройство обратной связи, 185

Ф

феррит, 360
феррорезонанс
в параллельной цепи, 421
в последовательной цепи, 418
фильтр
пьезоэлектрический, 197
электрический, 196
безындукционный, 197
верхних частот, 196, 204
заграждающий, 196
нижних частот, типа k, 199
нижних частот, типа m, 201
параллельно-производный, 201
полосовой, 196, 204

последовательно-производный, 201
реактивный, 196
фильтр
электрический
нижних частот, 196
фокус
неустойчивый, 471
устойчивый, 471
формула
Ньютона—Лейбница, 68
Римана—Меллина, 120, 295
функция
единичная, 122
импульсная, 123
единичная, 123
передаточная, 178
решетчатая, 140
скачкообразная, 122
цепи, 228
входная, 229
положительная вещественная, 231
Штурма, 245

Х

характеристика
амплитудно-частотная, 112
вольт-амперная
нелинейного элемента, 325
динамическая, 361
импульсная
цепи, 125
несимметричная, 327
переходная
цепи, 122
симметричная, 327, 362
спектральная, 112
статическая, 361
фазочастотная, 112
частотная
вещественная, 112
мнимая, 112
холостой ход
режим
однородной линии, 285

Ц

цепи
дифференцирующие, 183
интегрирующие, 183
цикл
предельный, 471

Ч

частота
комбинационная, 480
комплексная, 119
четырехполюсник
активный, 170, 187
короткое замыкание, 175
минимально-фазовый, 182
неминимально-фазовый, 182
параметры, 172
пассивный, 170
симметричный, 173
уравнения, 172
характеристические параметры, 192
холостой ход, 175
эквивалентная схема, 174
П-образная, 174
Т-образная, 174
четырехполюсники
соединение
каскадное, 176
параллельное, 177
последовательное, 177
чувствительность характеристики электрической цепи, 189
относительная, 189
результирующая, 189

Э

электрическая цепь
распределенные параметры, 275
элемент
нелинейный

безынерционный, 333
инерционный, 332
управляемый, 342
тиритовый
нелинейный, 328