

Федеральное агентство по образованию

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет “ЛЭТИ”

С. А. КОЛБИНА С. Ю. ПИЛЮГИН

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
(ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ)

Санкт-Петербург
2009

Федеральное агентство по образованию

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет “ЛЭТИ”

С. А. КОЛБИНА С. Ю. ПИЛЮГИН

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
(ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ)

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ “ЛЭТИ”
2009

УДК 512.64 (075)
ББК В143я7
К60

Колбина С. А., Пилюгин С. Ю. Линейная алгебра (дополнительные К60 главы): Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ “ЛЭТИ”, 2009. 60 с.

ISBN 5-7629-0958-1

Рассмотрены следующие темы: собственные числа и собственные векторы квадратных матриц, вещественные квадратичные формы, кривые второго порядка на плоскости и поверхности второго порядка в трехмерном пространстве. Изложение иллюстрируется большим количеством примеров и рисунков. Соответствует унифицированной рабочей программе дисциплины “Алгебра и геометрия” для студентов факультетов электроники и автоматизации, электроники, экономики и менеджмента и открытого факультета.

Предназначено для студентов всех направлений и специальностей перечисленных выше факультетов.

УДК 512.64 (075)
ББК В143я7

Рецензенты: кафедра высшей математики СПбГПУ; д-р физ.-мат. наук, проф. Л. В. Розовский (СПХФА).

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

ISBN 5-7629-0958-1

© СПбГЭТУ “ЛЭТИ”, 2009

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное издание предназначено для студентов 1-го курса технических факультетов и факультета экономики и менеджмента. В нем излагается материал, входящий обычно в курс “Алгебра и геометрия”.

Пособие состоит из пяти разделов. В первом, вводном разделе дается краткое изложение основных определений и утверждений, относящихся к матрицам, векторам и определителям. Во втором разделе изучаются собственные числа и собственные векторы квадратных матриц. Изложена теория собственных чисел и собственных векторов самосопряженных матриц.

Третий раздел посвящен вещественным квадратичным формам. Приведена классификация квадратичных форм в зависимости от собственных чисел матрицы, определяющей форму.

В четвертом разделе описываются основные типы кривых второго порядка на плоскости (эллипс, гипербола, парабола). Теория квадратичных форм применена для получения полной классификации кривых второго порядка.

Пятый раздел посвящен поверхностям второго порядка в трехмерном пространстве. Описаны основные типы таких поверхностей.

Изложение снабжено примерами и рисунками.

Авторы благодарны доценту А. Л. Белопольскому за помощь в подготовке рисунков.

1. МАТРИЦЫ И ВЕКТОРЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Напомним (см. [1]), что матрицей размера $m \times n$ (матрицей с m строками и n столбцами) называется прямоугольная таблица, в которой $m \cdot n$ чисел a_{ik} (вещественных или комплексных) расположены следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Таблица

$$[a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}]$$

называется i -й строкой матрицы A , а таблица

$$\begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}$$

– ее k -м столбцом.

Таким образом, a_{ik} – это элемент матрицы A , стоящий на пересечении i -й строки и k -го столбца.

Назовем n -мерным вектором таблицу

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

элементы которой – вещественные или комплексные числа $x_1, x_2, \dots, x_n$. Таким образом, матрица размера $n \times 1$ естественно отождествляется с n -мерным вектором.

Для матрицы размера $m \times n$ определено умножение на число: если $\lambda \in \mathbf{R}$ (или $\lambda \in \mathbf{C}$), то

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

т. е. если b_{ik} – элемент матрицы λA , то $b_{ik} = \lambda a_{ik}$.

Для двух матриц одинакового размера $m \times n$ определено сложение: если

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

и

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

то

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix},$$

т. е. если c_{ik} – элемент матрицы $C = A + B$, то $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$.

Две матрицы A и B размеров $m \times n$ и $p \times q$ можно перемножать в том и только том случае, когда $n = p$ (это равенство означает, что число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B). Матрица $C = AB$

размера $m \times q$ определяется в этом случае так:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}, i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, q.$$

Отметим, что если произведение AB определено, то произведение BA может быть не определено!

Умножение матриц ассоциативно:

$$(AB)C = A(BC)$$

и дистрибутивно относительно сложения:

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Далее в основном будут рассматриваться квадратные матрицы (т.е. матрицы размера $n \times n$). Для двух квадратных матриц A и B размера $n \times n$ определены оба произведения AB и BA (но они не всегда совпадают!).

Важную роль будет играть единичная матрица размера $n \times n$

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix};$$

у матрицы E_n равны 1 все элементы $a_{ii}, i = 1, \dots, n$ (эти элементы называются диагональными) и равны 0 все элементы a_{ij} с $i \neq j$.

Из определения произведения матриц немедленно следует, что если A – квадратная матрица размера $n \times n$, то

$$AE_n = E_nA = A.$$

Из этого же определения следует, что можно умножать квадратную матрицу размера $n \times n$ на n -мерный вектор, получая в результате вновь n -мерный вектор:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}.$$

Важной характеристикой квадратной матрицы A является число $\det(A)$ (определитель матрицы A).

Если матрица A имеет размер 1×1 (т.е. является просто числом: $A = [a]$), то

$$\det(A) = a.$$

Определители матриц размеров $2 \times 2, 3 \times 3, \dots$ определяем индуктивно. Предположим, что уже известен способ вычисления определителя любой матрицы размера $(n-1) \times (n-1)$.

Рассмотрим квадратную матрицу A вида (1.1) и сопоставим ей n матриц:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(матрица A_1 получается вычеркиванием первого столбца и первой строки в матрице A),

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(матрица A_2 получается вычеркиванием второго столбца и первой строки в матрице A),

$$\dots$$

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} \end{bmatrix}$$

(матрица A_n получается вычеркиванием n -го столбца и первой строки в матрице A).

Каждая из матриц $A_1, \dots, A_n$ имеет размер $(n-1) \times (n-1)$, и по предположению способ вычисления определителей таких матриц известен.

Определитель матрицы A вычисляется по формуле

$$\det(A) = a_{11} \det(A_1) - a_{12} \det(A_2) + \dots + (-1)^{k+1} a_{1k} \det(A_k) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det(A_n). \quad (1.3)$$

Формула (1.3) называется разложением определителя матрицы A по первой строке.

Применим ее при $n = 2$ и $n = 3$:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \det[a_{22}] - a_{12} \det[a_{21}] = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

В данном пособии используются 2 важных утверждения, связанные с определителями матриц.

Утверждение 1.1. *Если A и B – квадратные матрицы размера $n \times n$, то*

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Второе утверждение относится к линейным алгебраическим системам. Рассмотрим систему с n неизвестными $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1.4)$$

Ее можно записать в виде

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

где A – матрица коэффициентов вида (1.1),

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Утверждение 1.2. *Система (1.4) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\det(A) \neq 0$.*

Если в системе (1.4) $b_1 = \dots = b_n = 0$ (такая система называется однородной), то у нее всегда есть нулевое решение $x_1 = \dots = x_n = 0$.

Из утверждения 1.2 вытекает, что это нулевое решение единственное тогда и только тогда, когда $\det(A) \neq 0$. Таким образом, верно следующее важное утверждение.

Следствие (из утверждения 1.2). *Линейная однородная система*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\det(A) = 0$.

2. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

2.1. Основные определения

Пусть A – квадратная матрица размера $n \times n$.

Определение 2.1. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется собственным числом матрицы A , если существует такой ненулевой вектор $\vec{x}$, что

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}. \quad (2.1)$$

Если выполнено равенство (2.1), то вектор $\vec{x}$ называется собственным вектором матрицы A , соответствующим собственному числу λ .

Пример 2.1. Пусть $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ и $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Тогда

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2\vec{x}.$$

Таким образом, $\lambda = 2$ – собственное число матрицы A , а $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ – соответствующий ему собственный вектор.

Лемма 2.1. Если $\vec{x}$ – собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному числу λ , а $c \neq 0$, то $c\vec{x}$ – собственный вектор матрицы A , соответствующий тому же собственному числу.

Доказательство. Положим $\vec{y} = c\vec{x}$, тогда

$$A\vec{y} = Ac\vec{x} = cA\vec{x} = c\lambda\vec{x} = \lambda\vec{y}$$

(отметим, что использовано равенство $Ac = cA$, вытекающее из формулы (1.2), и равенство $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$). ■

Отметим, что собственные числа и собственные векторы могут быть комплексными, даже если A – вещественная матрица.

Пример 2.2. Пусть $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$. Тогда

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $\lambda = i$ – собственное число вещественной матрицы A , а $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ – соответствующий ему собственный вектор.

Понятие собственного вектора допускает естественную геометрическую интерпретацию. Если $\vec{x}$ – n -мерный вектор, а A – квадратная матрица размера $n \times n$, то отображение

$$\vec{x} \mapsto A\vec{x} \quad (2.2)$$

сопоставляет вектору $\vec{x}$ новый n -мерный вектор $A\vec{x}$. Таким образом, любой матрице A соответствует отображение пространства n -мерных векторов в это же пространство.

Будем говорить, что 2 n -мерных вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ коллинеарны, если существует такой скаляр c , что

$$\vec{y} = c\vec{x}. \quad (2.3)$$

Если $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ и $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, то равенство (2.3) означает, что выполнены n равенств

$$y_i = cx_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

т. е. компоненты вектора $\vec{y}$ пропорциональны соответствующим компонентам вектора $\vec{x}$ с одним и тем же коэффициентом пропорциональности c . В геометрически наглядных случаях плоских и пространственных векторов ($n = 2$ и $n = 3$) введенное понятие совпадает с известным из элементарной геометрии понятием коллинеарности. Отметим, кроме того, что нулевой вектор $\vec{y} = \vec{0}$ коллинеарен любому другому вектору (при этом $c = 0$). Легко понять, что ненулевой n -мерный вектор $\vec{x}$ является собственным вектором матрицы A тогда и только тогда, когда преобразование (2.2) переводит $\vec{x}$ в коллинеарный ему вектор.

2.2. Нахождение собственных чисел и собственных векторов

Перейдем теперь к основному вопросу – как находить собственные числа и собственные векторы заданной матрицы? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2.1. *Число λ является собственным числом матрицы A размера $n \times n$ тогда и только тогда, когда выполнено равенство*

$$\det[A - \lambda E_n] = 0. \quad (2.4)$$

Если равенство (2.4) выполнено, то любой ненулевой вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий однородной линейной алгебраической системе

$$[A - \lambda E_n]\vec{x} = \vec{0}, \quad (2.5)$$

является собственным вектором, соответствующим собственному числу λ .

Доказательство. По определению, число λ является собственным числом матрицы A , если существует такой ненулевой вектор $\vec{x}$, что выполнено равенство (2.1). Так как $\vec{x} = E_n \vec{x}$ и $\lambda \vec{x} = \lambda E_n \vec{x}$ для любого числа λ и вектора $\vec{x}$, равенство (2.1) равносильно равенствам $A\vec{x} = \lambda E_n \vec{x}$ и $[A - \lambda E_n]\vec{x} = \vec{0}$. Таким образом, λ – собственное число матрицы A тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор $\vec{x}$, являющийся решением

системы (2.5). Однородная линейная алгебраическая система $P\vec{x} = \vec{0}$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы P равен 0 (см. 1). Следовательно, λ – собственное число матрицы A тогда и только тогда, когда выполнено равенство (2.4). Первое утверждение теоремы доказано. Ясно, что в этом случае равенство (2.1), определяющее собственный вектор, равносильно системе (2.5). ■

Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Так как

$$\lambda E_n = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix},$$

равенство (2.4) имеет следующий вид:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (2.6)$$

Отметим, что матрица в левой части равенства (2.6) получается из матрицы A вычитанием числа λ из диагональных элементов матрицы A . Условие (2.4) является уравнением с неизвестным λ ; проанализируем это уравнение, начиная с простейшего случая $n = 1$.

При $n = 1$ матрица A размера 1×1 – это просто число; запишем $A = [a]$. Уравнение (2.4) в этом случае имеет вид $\det[a - \lambda] = 0$. Определитель матрицы $[a - \lambda]$ размера 1×1 равен числу $a - \lambda$; таким образом, уравнение (2.4) сводится к уравнению

$$a - \lambda = 0, \quad (2.7)$$

имеющему единственный корень $\lambda = a$. Этот корень и является единственным собственным числом матрицы $A = [a]$. Так как для любого одномерного вектора $\vec{x}$ выполнены равенства

$$A\vec{x} = [a]\vec{x} = a\vec{x} = \lambda\vec{x},$$

любой ненулевой одномерный вектор $\vec{x}$ является собственным вектором матрицы $A = [a]$.

Пусть $n = 2$ и $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Уравнение (2.4) имеет вид

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель, раскладывая его по первой строке:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \\ &= \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) - a_{12}a_{21} = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

По теореме 2.1, собственные числа матрицы A – это корни квадратного уравнения (2.8) (заметим, что именно это объясняет отмеченный ранее факт: у вещественной матрицы могут быть комплексные собственные числа). Пусть теперь $n = 3$ и

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Уравнение (2.4) имеет вид

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Разложим опять определитель по первой строке:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} &= (a_{11} - \lambda) \det \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} - \\ &- a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} - \lambda \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \\ &= (a_{11} - \lambda)[(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) - a_{23}a_{32}] - a_{12}[a_{21}(a_{33} - \lambda) - a_{23}a_{31}] + \\ &+ a_{13}[a_{21}a_{32} - (a_{22} - \lambda)a_{31}] = -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + \\ &+ (-a_{11}a_{22} - a_{11}a_{33} - a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31})\lambda + \\ &+ (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}) = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Собственные числа матрицы A – это корни кубического уравнения (2.9).

При $n > 3$ явный вид уравнения (2.4) слишком сложен и здесь не приводится.

Теорема 2.2. Если A – матрица размера $n \times n$, то $\det[A - \lambda E_n]$ – многочлен от λ степени n , имеющий вид

$$(-1)^n \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n. \quad (2.10)$$

При $n = 1, 2, 3$ это утверждение уже доказано (см. формулы (2.7)–(2.9)). Доказательство будет иметь индукционный характер: предполагая, что утверждение верно для матриц размера $(n - 1) \times (n - 1)$, докажем его для матриц размера $n \times n$ (а тогда из справедливости утверждения для $n = 1$ будет вытекать его справедливость для всех n).

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Разложим определитель

$$\det[A - \lambda E_n] = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

по первой строке:

$$\det[A - \lambda E_n] = (a_{11} - \lambda)\Delta_1 - a_{12}\Delta_2 + \dots + (-1)^{1+n}a_{1n}\Delta_n,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \det \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}, \\ \Delta_2 &= \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}, \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta_n &= \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Поскольку предполагается, что данное утверждение верно для матриц размера $(n-1) \times (n-1)$, то

$$\Delta_1 = \det \left(\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda E_{n-1} \right) = (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} + r_1 \lambda^{n-2} + \dots + r_{n-1}.$$

Анализируя индуктивный процесс вычисления определителя квадратной матрицы A , легко понять, что верно следующее утверждение: каждое слагаемое в выражении для $\det(A)$ содержит в качестве сомножителя ровно один элемент любой из строк матрицы A (проверьте!). Элементы первой строки матрицы

$$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} - \lambda & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

не содержат λ ; остальные строки содержат ровно по одному выражению $a_{33} - \lambda, \dots, a_{nn} - \lambda$, зависящему от λ . Поэтому из сформулированного ранее утверждения следует, что выражение $a_{12}\Delta_2$ – многочлен от λ , степень которого не больше $n-2$. То же самое верно для выражений $a_{13}\Delta_3, \dots, a_{1n}\Delta_n$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \det[A - \lambda E_n] &= (a_{11} - \lambda)((-1)^{n-1} \lambda^{n-1} + r_1 \lambda^{n-2} - \dots + r_{n-1}) - a_{12}\Delta_2 + \dots \\ &\quad + (-1)^{1+n} a_{1n}\Delta_n = (-1)^n \lambda^n + Q_{n-1}, \end{aligned}$$

где Q_{n-1} – многочлен от λ степени, не превосходящей $n-1$. ■

Многочлен (2.10) называется характеристическим многочленом матрицы A . При $n = 1, 2, 3$ используют формулы (2.7)–(2.9), дающие явный вид характеристического многочлена; при $n > 3$ используют другие, гораздо более экономичные с вычислительной точки зрения, алгоритмы (см., например, [2]). Из алгебры известно, что любой многочлен степени n имеет ровно n корней (если каждый корень считается столько раз, какова его кратность). Поэтому из первого утверждения теоремы 2.1 вытекает следующее важное утверждение.

Теорема 2.3. *Квадратная матрица размера $n \times n$ имеет ровно n собственных чисел (если каждое считать столько раз, какова его кратность как корня характеристического многочлена).*

Приведем примеры вычисления собственных чисел и собственных векторов (ограничившись случаем матриц 2×2).

Пример 2.3. Рассмотрим ту же матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, что и в примере 2.1. Ее характеристический многочлен имеет вид

$$\det[A - \lambda E_2] = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 2 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)(4 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

Корни характеристического многочлена

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}.$$

Таким образом, $\lambda = 2$ и $\lambda = 3$ – собственные числа матрицы A . Найдем соответствующие им собственные векторы как ненулевые решения системы (2.5).

При $\lambda = 2$ система (2.5) имеет вид

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Достаточно найти одно ненулевое решение; положим $x_1 = c$ в первом уравнении; тогда $x_2 = -c$ и

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ -c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Вектор $c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ является собственным вектором, соответствующим собственному числу $\lambda = 2$, при любом $c \neq 0$; при $c = 1$ он был указан в примере 2.1.

При $\lambda = 3$ система (2.5) имеет вид

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Положим $x_1 = c$, тогда $x_2 = -2c$ и собственный вектор равен

$$\begin{bmatrix} c \\ -2c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, c \neq 0.$$

Ответ: $\lambda = 2$, собственный вектор $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\lambda = 3$, собственный вектор $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Пример 2.4. Рассмотрим ту же матрицу $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, что и в примере 2.2. Ее характеристический многочлен имеет вид

$$\det[A - \lambda E_2] = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1;$$

его корни $\lambda_{1,2} = \pm i$. Система (2.5) при $\lambda = i$:

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{cases} -ix_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - ix_2 = 0. \end{cases}$$

Если $x_1 = c$, то $x_2 = -ic$; собственный вектор $c \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$, $c \neq 0$. Система (2.5) при $\lambda = -i$:

$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{cases} ix_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + ix_2 = 0. \end{cases}$$

Если $x_1 = c$, то $x_2 = ic$; собственный вектор $c \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$, $c \neq 0$.

Ответ: $\lambda = i$, собственный вектор $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$; $\lambda = -i$, собственный вектор $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$.

Заметим, что $\bar{i} = -i$ и $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \overline{\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}}$ (черта сверху – знак комплексного сопряжения). В этом равенстве проявляется общее свойство собственных векторов вещественных матриц.

2.3. Свойства собственных чисел и собственных векторов

Лемма 2.2. Если λ – комплексное собственное число вещественной матрицы A и $\vec{x}$ – соответствующий ему собственный вектор, то вектор

$\vec{x}$ – собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному числу $\bar{\lambda}$.

Доказательство. Перейдем к комплексному сопряжению в равенстве (2.1):

$$\overline{A\vec{x}} = \overline{\lambda\vec{x}},$$

или

$$\overline{A}\vec{x} = \bar{\lambda}\vec{x}.$$

Так как матрица A вещественная, $\overline{A} = A$, поэтому

$$A\vec{x} = \bar{\lambda} \cdot \vec{x}. \quad \blacksquare$$

Опишем некоторые свойства собственных чисел и собственных векторов. Напомним, что квадратная матрица S называется невырожденной (или неособенной), если $\det(S) \neq 0$. У невырожденной матрицы S размера $n \times n$ существует обратная матрица S^{-1} , для которой верны равенства

$$S^{-1}S = SS^{-1} = E_n. \quad (2.11)$$

Две квадратные матрицы A и B одного размера называются подобными, если существует такая невырожденная матрица S того же размера, что

$$A = S^{-1}BS. \quad (2.12)$$

Теорема 2.4. Пусть $\vec{x}$ – собственный вектор матрицы A размера $n \times n$, соответствующий собственному числу λ . Предположим, что матрицы A и B подобны (и выполнено равенство (2.12)). Тогда λ – собственное число матрицы B , а вектор $\vec{y} = S\vec{x}$ – собственный вектор матрицы B , соответствующий собственному числу λ .

Доказательство. Так как λ – собственное число матрицы A ,

$$\det[A - \lambda E_n] = 0.$$

Из ассоциативности умножения матриц и из равенств (2.11) следует, что

$$S^{-1}E_nS = (S^{-1}E_n)S = S^{-1}S = E_n.$$

Из этого равенства и из равенства (2.12) вытекает, что

$$A - \lambda E_n = S^{-1}BS - \lambda S^{-1}E_nS. \quad (2.13)$$

Так как умножение матриц дистрибутивно,

$$S^{-1}BS - \lambda S^{-1}E_nS = S^{-1}(B - \lambda E_n)S. \quad (2.14)$$

Для двух квадратных матриц A_1 и A_2

$$\det(A_1A_2) = \det(A_1)\det(A_2),$$

поэтому из (2.13) и (2.14) следует, что

$$\det[A - \lambda E_n] = \det[S^{-1}(B - \lambda E_n)S] = \det(S) \det[B - \lambda E_n] \det(S^{-1}).$$

Так как $SS^{-1} = E_n$,

$$\det(S) \det(S^{-1}) = 1,$$

поэтому

$$\det[B - \lambda E_n] = \det[A - \lambda E_n] = 0,$$

и из теоремы 2.1 следует, что λ – собственное число матрицы B . А из равенства (2.12) вытекает, что $B = SAS^{-1}$. Преобразуем произведение

$$B\vec{y} = SAS^{-1}\vec{y} = (SAS^{-1})S\vec{x} = SA(S^{-1}S)\vec{x} = SA\vec{x}.$$

Так как $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$,

$$B\vec{y} = S\lambda\vec{x} = \lambda S\vec{x} = \lambda\vec{y}.$$

Таким образом, показано, что $\vec{y} = S\vec{x}$ – собственный вектор матрицы B , соответствующий собственному числу λ . ■

Следствие (из теоремы 2.4). *Наборы собственных чисел подобных матриц одинаковы.*

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что из первой части доказательства теоремы 2.4 следует равенство характеристических многочленов матриц A и B :

$$\det[A - \lambda E_n] = \det[B - \lambda E_n],$$

а значит, и множеств их корней.

2.4. Собственные числа и собственные векторы самосопряженных матриц

Пусть A – комплексная матрица размера $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Напомним, что сопряженная к ней матрица A^* определяется так:

$$A^* = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \dots & \overline{a_{n1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \dots & \overline{a_{nn}} \end{bmatrix};$$

если

$$A^* = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

то

$$b_{ij} = \overline{a_{ji}}, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

(для получения матрицы A^* заменяем каждый элемент на комплексно-сопряженный и транспонируем матрицу). Матрица A называется самосопряженной, если

$$A^* = A.$$

Из соотношений (2.15) следует, что A^* – самосопряженная матрица тогда и только тогда, когда

$$a_{ij} = \overline{a_{ji}}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

В частности, $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$; таким образом, диагональные элементы самосопряженной матрицы вещественны. Напомним, кроме того, что скалярное произведение двух n -мерных комплексных векторов $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ и $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ определяется формулой

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}. \quad (2.16)$$

В [3] доказано, что если A – самосопряженная матрица, то

$$\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A\vec{y} \rangle. \quad (2.17)$$

Теорема 2.5. *Собственные числа самосопряженной матрицы вещественны.*

Доказательство. Пусть λ – собственное число самосопряженной матрицы A ; фиксируем соответствующий λ собственный вектор $\vec{x}$. Умножим равенство

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

скалярно на $\vec{x}$:

$$\langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \lambda\vec{x}, \vec{x} \rangle. \quad (2.18)$$

Преобразуем левую часть равенства (2.18), используя равенство (2.17):

$$\langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, A\vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \lambda\vec{x} \rangle.$$

Из формулы (2.16) следует, что

$$\langle \vec{x}, \lambda\vec{x} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{(\lambda x_i)} = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i \overline{x_i} = \bar{\lambda} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle. \quad (2.19)$$

Правая часть (2.18) равна

$$\langle \lambda \vec{x}, \vec{x} \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda x_i \overline{x_i} = \lambda \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle. \quad (2.20)$$

Приравнивая (2.19) к (2.20), видим, что

$$\overline{\lambda} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle,$$

или

$$(\overline{\lambda} - \lambda) \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0. \quad (2.21)$$

Так как $\vec{x}$ – ненулевой вектор, $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \neq 0$, поэтому из (2.21) следует, что $\overline{\lambda} = \lambda$, т. е. λ – вещественное число. ■

Напомним, что векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называются ортогональными, если

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0. \quad (2.22)$$

Теорема 2.6. Пусть λ и μ – различные собственные числа самосопряженной матрицы A . Тогда любые собственные векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$, соответствующие собственным числам λ и μ , ортогональны.

Доказательство. Умножая скалярно равенства $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ и $A\vec{y} = \mu\vec{y}$ на $\vec{y}$ справа и на $\vec{x}$ слева, получаем соотношения

$$\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \lambda\vec{x}, \vec{y} \rangle$$

и

$$\langle \vec{x}, A\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \mu\vec{y} \rangle.$$

Так как матрица A самосопряженная, левые части этих соотношений равны и

$$\langle \lambda\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \mu\vec{y} \rangle.$$

По теореме 2.5, λ и μ – вещественные числа. Следовательно,

$$\lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \mu \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle,$$

или

$$(\lambda - \mu) \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0.$$

По предположению теоремы, $\lambda \neq \mu$, поэтому выполнено равенство (2.22) и векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ ортогональны. ■

Напомним, что базисом пространства $\mathbf{C}^n$ n -мерных комплексных векторов называется набор из n линейно независимых векторов. Если $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ – n ненулевых попарно ортогональных векторов в $\mathbf{C}^n$, то эти векторы образуют базис, который называется ортогональным.

Теорема 2.7. Если A – самосопряженная матрица размера $n \times n$, то в пространстве $\mathbf{C}^n$ есть ортогональный базис, состоящий из собственных векторов матрицы A .

Доказательство. Докажем теорему 2.7 для случая, когда характеристический многочлен матрицы A имеет n различных корней (при наличии кратных корней доказательство более сложное). Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – все собственные числа матрицы A и пусть $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ – соответствующие им собственные векторы. Рассматриваем случай, когда числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ различны. По теореме 2.6, в этом случае векторы $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ попарно ортогональны (и эти векторы ненулевые как собственные векторы). Следовательно, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ – ортогональный базис пространства $\mathbf{C}^n$. ■

Ортогональный базис из собственных векторов самосопряженной матрицы A , существование которого доказано в теореме 2.7, иногда называют собственным базисом матрицы A .

Пример 2.5. Матрица $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ является самосопряженной (проверьте!). Ее характеристический многочлен

$$\det[A - \lambda E_2] = \det \begin{bmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 8 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36.$$

Собственные числа: $\lambda = 4, \lambda = 9$. При $\lambda = 4$ система (2.5) имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Если $x_2 = c$, то $x_1 = -2c$; собственный вектор

$$c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, c \neq 0.$$

При $\lambda = 9$ система (2.5) имеет вид

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Если $x_1 = c$, то $x_2 = 2c$; собственный вектор

$$c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, c \neq 0.$$

По теореме 2.6, векторы $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ортогональны. Проверим это:

$$\left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0.$$

Эти векторы образуют собственный базис матрицы A . Из этого базиса можно получить ортонормированный базис (т.е. базис, состоящий из попарно ортогональных векторов единичной длины), разделив его векторы на их нормы:

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

3. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

3.1. Определение квадратичной формы

Пусть A – вещественная симметричная матрица размера $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Сопоставим матрице A скалярную вещественную функцию V от n вещественных переменных $x_1, \dots, x_n$ следующим образом: составим n -мерный

вектор $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ и положим $V(x_1, \dots, x_n) = V(\vec{x}) = \langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle$. В дальней-

шем будем использовать обе эквивалентные записи: $V(x_1, \dots, x_n)$ и $V(\vec{x})$.

Функция V называется квадратичной формой от переменных $x_1, \dots, x_n$ с матрицей A .

Пример 3.1. Любая вещественная симметричная матрица размера 2×2 может быть представлена в виде

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

(почему?). Вычислим квадратичную форму V от переменных x_1, x_2 с матрицей A :

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2) &= \left\langle A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ bx_1 + cx_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \\ &= (ax_1 + bx_2)x_1 + (bx_1 + cx_2)x_2 = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2. \end{aligned}$$

3.2. Классификация квадратичных форм

Будем классифицировать квадратичные формы в зависимости от знаков значений, которые они могут принимать.

Назовем квадратичную форму V :

- положительно определенной, если $V(\vec{x}) > 0$ при $\vec{x} \neq \vec{0}$;
- неотрицательной, если $V(\vec{x}) \geq 0$ при всех $\vec{x}$;
- знакопеременной, если V принимает как положительные, так и отрицательные значения;
- неположительной, если $V(\vec{x}) \leq 0$ при всех $\vec{x}$;
- отрицательно определенной, если $V(\vec{x}) < 0$ при $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Будем говорить, что квадратичная форма V от n переменных $x_1, \dots, x_n$ имеет канонический вид, если

$$V(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 \quad (3.1)$$

(т. е. V не содержит произведений переменных $x_i x_j$ с $i \neq j$).

Легко понять, что справедливы следующие утверждения (докажите их самостоятельно):

– квадратичная форма вида (3.1) положительно определенная тогда и только тогда, когда

$$a_i > 0, i = 1, \dots, n;$$

– квадратичная форма вида (3.1) неотрицательная тогда и только тогда, когда

$$a_i \geq 0, i = 1, \dots, n;$$

– квадратичная форма вида (3.1) знакопеременная тогда и только тогда, когда среди чисел $a_1, \dots, a_n$ есть 2 числа $a_i > 0$ и $a_j < 0$;

– квадратичная форма вида (3.1) неположительная тогда и только тогда, когда

$$a_i \leq 0, i = 1, \dots, n;$$

– квадратичная форма вида (3.1) отрицательно определенная тогда и только тогда, когда

$$a_i < 0, i = 1, \dots, n.$$

Пример 3.2. Рассмотрим следующие квадратичные формы от трех переменных x_1, x_2, x_3 :

$$V_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 0,5x_3^2;$$

$$V_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_3^2;$$

$$V_3(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 4x_2^2 + x_3^2;$$

$$V_4(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2;$$

$$V_5(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 - x_2^2 - 5x_3^2.$$

Форма V_1 положительно определенная; форма V_2 неотрицательная; форма V_3 знакопеременная; форма V_4 неположительная; форма V_5 отрицательно определенная.

Фиксируем вещественную симметричную матрицу A размера $n \times n$ и некоторый базис $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ пространства $\mathbf{R}^n$ вещественных n -мерных векторов.

Как известно, любой n -мерный вектор $\vec{x}$ единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов базиса:

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_n \vec{v}_n. \quad (3.2)$$

Подставив комбинацию (3.2) в квадратичную форму V с матрицей A , получим следующее выражение:

$$V(\vec{x}) = V(c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_n \vec{v}_n) = \langle A(c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_n \vec{v}_n), c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_n \vec{v}_n \rangle.$$

Используя линейность скалярного произведения по его аргументам, можно написать

$$V(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^n \langle A c_i \vec{v}_i, c_j \vec{v}_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle A \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle c_i c_j. \quad (3.3)$$

В правой части соотношений (3.3) стоит квадратичная форма от n вещественных переменных $c_1, \dots, c_n$ с вещественной матрицей B , элементы которой вычисляются по формулам

$$b_{ij} = \langle A \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle. \quad (3.4)$$

Отметим, что матрица B симметрична, так как верны равенства

$$b_{ij} = \langle A \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \langle \vec{v}_i, A \vec{v}_j \rangle,$$

вытекающие из вещественности и симметричности матрицы A . Конечно, матрица B зависит от выбора базиса $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.

Покажем, что можно выбрать базис $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ так, чтобы квадратичная форма (3.3) от переменных $c_1, \dots, c_n$ имела канонический вид.

Теорема 3.1. *Если $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ – ортонормированный собственный базис матрицы A , то квадратичная форма (3.3) имеет канонический вид.*

Доказательство. Так как матрица A вещественная и симметричная, она является самосопряженной. По теореме 2.7, у нее есть собственный базис, состоящий из собственных векторов $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$.

В теореме 2.7 доказано существование собственного базиса матрицы A в пространстве $\mathbf{C}^n$. Так как матрица A самосопряженная, из теоремы

2.5 следует, что ее собственные числа вещественные. Но тогда и системы (2.5), которые определяют собственные векторы, тоже вещественные; следовательно, $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ – вещественный базис в пространстве $\mathbf{R}^n$.

Превратим этот базис в ортонормированный, полагая

$$\vec{v}_i = \frac{\vec{w}_i}{\|\vec{w}_i\|}, i = 1, \dots, n.$$

Тогда верны равенства

$$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle = \frac{\|\vec{w}_i\|^2}{\|\vec{w}_i\|^2} = 1, i = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Так как базис $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ ортогональный,

$$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \frac{\langle \vec{w}_i, \vec{w}_j \rangle}{\|\vec{w}_i\| \|\vec{w}_j\|} = 0, i \neq j. \quad (3.6)$$

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные числа матрицы A , соответствующие собственным векторам $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$. По лемме 2.1, собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ соответствуют и собственным векторам $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.

Найдем квадратичную форму (3.3), соответствующую базису $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. Из формул (3.4)–(3.6) следует, что

$$b_{ii} = \langle A\vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle = \langle \lambda_i \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle = \lambda_i \|\vec{v}_i\|^2 = \lambda_i, i = 1, \dots, n,$$

и

$$b_{ij} = \langle A\vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \langle \lambda_i \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \lambda_i \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0, i \neq j.$$

Следовательно, матрица B имеет вид

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Если $\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_n \vec{v}_n$, то по формуле (3.3)

$$V(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} c_i c_j = \lambda_1 c_1^2 + \dots + \lambda_n c_n^2. \quad (3.7)$$

■

Итак, показано, что если $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ – ортонормированный собственный базис матрицы A , то квадратичная форма (3.3) от переменных $c_1, \dots, c_n$ имеет канонический вид, причем коэффициентами при квадратах c_i^2 являются собственные числа матрицы A . Таким образом, можно классифицировать квадратичные формы $V(\vec{x}) = \langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle$ исходя из собственных чисел матрицы A .

Верны следующие утверждения:

– квадратичная форма V положительно определенная тогда и только тогда, когда

$$\lambda_i > 0, i = 1, \dots, n; \quad (3.8)$$

– квадратичная форма V неотрицательная тогда и только тогда, когда

$$\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n;$$

– квадратичная форма V знакопеременная тогда и только тогда, когда у матрицы A есть собственные числа $\lambda_i > 0$ и $\lambda_j < 0$;

– квадратичная форма V неположительная тогда и только тогда, когда

$$\lambda_i \leq 0, i = 1, \dots, n;$$

– квадратичная форма V отрицательно определенная тогда и только тогда, когда

$$\lambda_i < 0, i = 1, \dots, n.$$

Все эти утверждения практически очевидны. Докажем, например, первое из них.

Если выполнены неравенства (3.8), то правая часть выражения (3.7) неотрицательна при всех $c_1, \dots, c_n$. Она может обратиться в 0 только если $c_1 = \dots = c_n = 0$; но в этом случае $\vec{x} = \vec{0}$.

Обратно, если бы одно из чисел λ_i не было положительным, то значение квадратичной формы $V(\vec{x})$ было бы неотрицательным при $\vec{x} = \vec{v}_i$.

Пример 3.3. Рассмотрим квадратичную форму от двух переменных x_1, x_2 :

$$V(\vec{x}) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2.$$

Она соответствует матрице

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

(проверьте!).

Собственные числа матрицы A равны 4 и 9, ее ортонормированный базис состоит из векторов

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

(см. пример 2.5).

Из теоремы 3.1 следует, что если $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$, то

$$V(\vec{x}) = 4c_1^2 + 9c_2^2.$$

Квадратичная форма V – положительно определенная.

4. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

4.1. Уравнения кривых второго порядка

Рассмотрим плоскость с декартовыми прямоугольными координатами $x = (x_1, x_2)$.

Кривой второго порядка на плоскости называется множество всех точек x , координаты которых удовлетворяют уравнению

$$Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0. \quad (4.1)$$

Здесь A, B, C, D, E, F – постоянные числа, причем хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля.

Как будет показано далее, уравнение (4.1) может задавать не только кривую (в общепринятом смысле этого слова), но и другие множества (пустое множество, точку, прямую, две параллельные или пересекающиеся прямые).

Зададимся целью определить по уравнению (4.1), какое именно множество на плоскости это уравнение задает.

Опишем вначале основные типы кривых второго порядка.

4.2. Эллипс

Эллипс на плоскости задается уравнением

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad (4.2)$$

где $a, b > 0$. Ясно, что уравнение (4.2) – частный вид общего уравнения (4.1) с $A = 1/a^2$, $C = 1/b^2$, $B = D = E = 0$, $F = -1$.

Далее иногда будем заменять слова “эллипс, задаваемый уравнением (4.2)” на более короткое выражение “эллипс (4.2)”.

Частным случаем эллипса является известная из школьного курса геометрии окружность: если $a = b = R$, то уравнение (4.2) равносильно уравнению

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2,$$

задающему окружность радиуса R с центром в начале координат.

Исследуем геометрические свойства эллипса. Отметим, прежде всего, что из уравнения (4.2) следуют очевидные неравенства $\frac{x_1^2}{a^2} \leq 1$ и $\frac{x_2^2}{b^2} \leq 1$, поэтому эллипс лежит в прямоугольнике

$$\{(x_1, x_2) : |x_1| \leq a, |x_2| \leq b\}.$$

Кроме того, эллипс симметричен. Если точка (x_1, x_2) принадлежит эллипсу, задаваемому уравнением (4.2), то верны соотношения

$$\begin{aligned}\frac{(-x_1)^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} &= 1, \\ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{(-x_2)^2}{b^2} &= 1, \\ \frac{(-x_1)^2}{a^2} + \frac{(-x_2)^2}{b^2} &= 1.\end{aligned}$$

Это означает, что вместе с любой точкой (x_1, x_2) эллипсу принадлежат точки $(-x_1, x_2)$ (эллипс симметричен относительно оси Ox_2), $(x_1, -x_2)$ (эллипс симметричен относительно оси Ox_1), $(-x_1, -x_2)$ (эллипс симметричен относительно начала координат).

Таким образом, достаточно построить эллипс в первой координатной четверти

$$\{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\},$$

а затем отразить полученную картинку относительно осей Ox_1 , Ox_2 и относительно начала координат.

Положим $x_2 = 0$ в уравнении (4.2); из получающегося уравнения $x_1^2 = a^2$ следует, что эллипс пересекает ось Ox_1 в точках $(\pm a, 0)$; такое же рассуждение показывает, что эллипс пересекает ось Ox_2 в точках $(0, \pm b)$.

Введем на плоскости новые координаты $y = (y_1, y_2)$, связанные с исходными координатами x следующим образом:

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = \frac{a}{b}x_2. \quad (4.3)$$

Уравнение (4.2) можно записать в эквивалентном виде:

$$x_1^2 + \frac{a^2}{b^2}x_2^2 = a^2;$$

в переменных y оно приобретает вид уравнения окружности:

$$y_1^2 + y_2^2 = a^2. \quad (4.4)$$

Геометрический смысл замены координат (4.3) очень прост: точка (x_1, x_2) переходит в точку с той же координатой $y_1 = x_1$, а вторая координата x_2 умножается на число $k = \frac{a}{b} \neq 0$. Ясно, что обратная замена $x_1 = y_1$, $x_2 = \frac{1}{k}y_2$ имеет такой же смысл (только число k заменяется на $\frac{1}{k}$).

Таким образом, можно построить эллипс (4.2) в первой координатной четверти (рис. 4.1), применяя к окружности (4.4) замену координат,

обратную к замене (4.3). На рисунке изображен случай $k > 1$. Точке

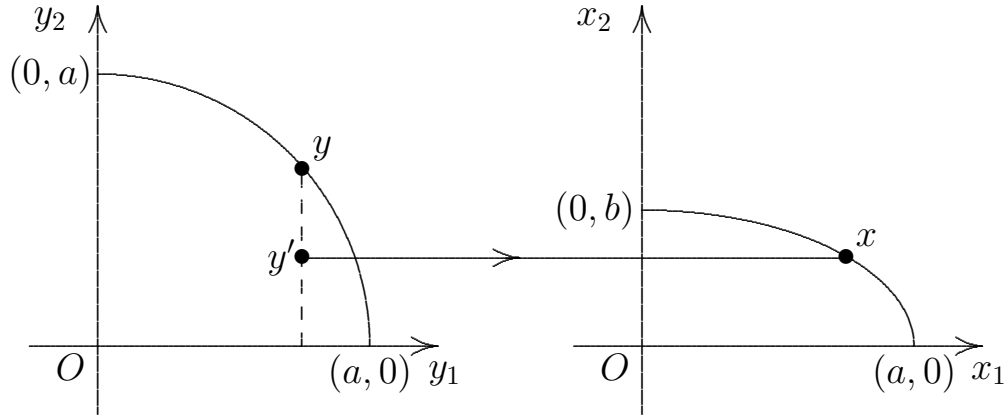


Рис. 4.1

$y = (y_1, y_2)$ на окружности (4.4) сопоставляется точка $y' = (y_1, \frac{y_2}{k})$, которая отображается на точку (x_1, x_2) с теми же координатами $x_1 = y_1$, $x_2 = \frac{y_2}{k}$. Таким образом, эллипс (4.2) получается из окружности (4.4) “сжатием” вдоль оси Ox_2 с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

Используя отмеченную ранее симметрию эллипса, можно нарисовать (рис. 4.2) всю кривую, задаваемую уравнением (4.2).

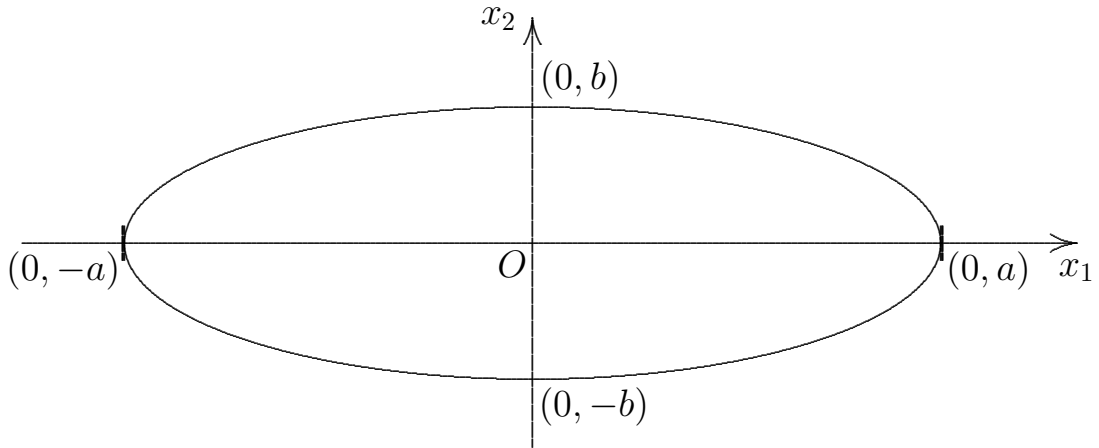


Рис. 4.2

Эллипс можно характеризовать следующим образом: это множество точек, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости постоянна.

Фиксируем две точки f_1 и f_2 на плоскости и число $2a > 0$. Выберем координаты (x_1, x_2) так, чтобы $f_1 = (c, 0)$ и $f_2 = (-c, 0)$. Рассмотрим точку $x(x_1, x_2)$ и обозначим через r_1 и r_2 расстояния от точки x до точек f_1 и f_2 , которые называются фокусами эллипса (рис. 4.3).

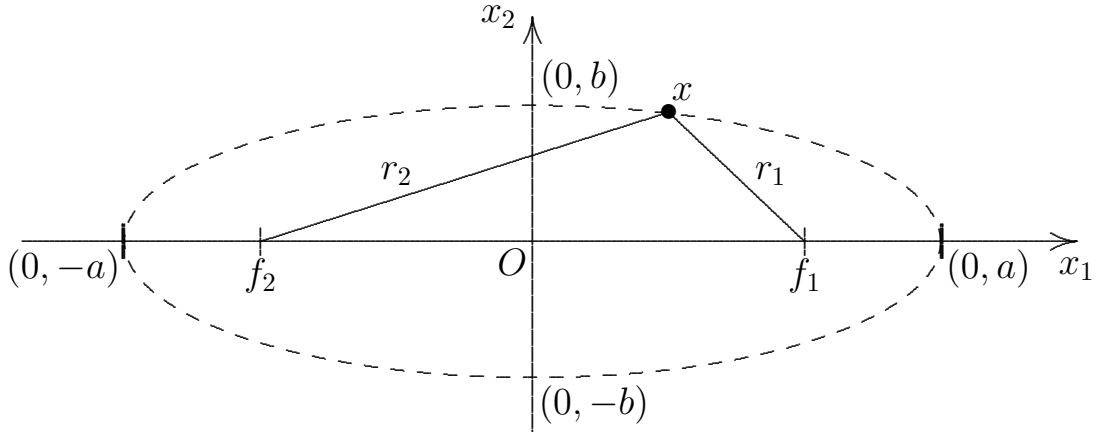


Рис. 4.3

Сформулированное выше условие записывается так:

$$r_1 + r_2 = 2a. \quad (4.5)$$

Из неравенства треугольника следует, что $2a = r_1 + r_2 \geq 2c$, где $2c$ – длина отрезка между точками f_1 и f_2 .

Будем считать, что

$$a > c.$$

Заметим, что если $a = c$, то данное множество просто вырождается в отрезок с концами f_1 и f_2 .

Теорема 4.1. *Множество точек x , для которых выполнено соотношение (4.5), совпадает с эллипсом (4.2), у которого $b^2 = a^2 - c^2$.*

Доказательство. Докажем лишь “половину” утверждения теоремы 4.1: покажем, что если для точки x выполнено соотношение (4.5), то ее координаты удовлетворяют уравнению (4.2).

Вычислим квадраты расстояний r_1 и r_2 :

$$r_1^2 = (x_1 - c)^2 + x_2^2, r_2^2 = (x_1 + c)^2 + x_2^2. \quad (4.6)$$

Отсюда следует, что

$$r_1^2 - r_2^2 = -4cx_1. \quad (4.7)$$

Из (4.5) вытекает, что

$$r_2^2 = (2a - r_1)^2 = 4a^2 - 4ar_1 + r_1^2,$$

поэтому с учетом (4.7)

$$4ar_1 = r_1^2 - r_2^2 + 4a^2 = -4cx_1 + 4a^2. \quad (4.8)$$

В силу (4.8),

$$r_1 = -\frac{c}{a}x_1 + a;$$

возведем это равенство в квадрат:

$$r_1^2 = \frac{c^2}{a^2}x_1^2 - 2cx_1 + a^2. \quad (4.9)$$

Из первого равенства в (4.6) и из (4.9) следует, что

$$x_1^2 - 2cx_1 + c^2 + x_2^2 = \frac{c^2}{a^2}x_1^2 - 2cx_1 + a^2,$$

или

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2}x_1^2 + x_2^2 = a^2 - c^2. \quad (4.10)$$

Обозначим $b^2 = a^2 - c^2$; деля равенство (4.10) на b^2 , получаем равенство

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1,$$

совпадающее с (4.2). ■

Точки f_1 и f_2 называются фокусами эллипса (4.2), а число $e = \frac{c}{a}$ — его эксцентриситетом.

4.3. Гипербола

Гипербола на плоскости задается уравнением

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad (4.11)$$

где $a, b > 0$. Уравнение (4.11) — частный вид общего уравнения (4.1) с $A = \frac{1}{a^2}, C = \frac{1}{b^2}, B = D = E = 0, F = -1$.

Отметим, что из уравнения (4.11) следует неравенство

$$\frac{x_1^2}{a^2} \geq 1,$$

поэтому гипербола лежит в объединении множеств

$$\{(x_1, x_2) : x_1 \geq a\}; \{(x_1, x_2) : x_1 \leq -a\}.$$

Так же, как и в случае эллипса, показывается, что гипербола симметрична относительно осей Ox_1, Ox_2 и относительно начала координат.

Изучим гиперболу (4.11) в множестве

$$\{(x_1, x_2) : x_1 \geq a, x_2 \geq 0\}. \quad (4.12)$$

Положим $x_2 = 0$ в уравнении (4.11); из получающегося уравнения $x_1^2 = a^2$ следует, что гипербола пересекает ось Ox_1 в точках $(\pm a, 0)$. Если точка (x_1, x_2) лежит в множестве (4.12), уравнение (4.11) может быть разрешено относительно x_2 следующим образом:

$$(4.11) \iff \frac{x_2^2}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - 1 \iff x_2 = b\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - 1}.$$

Таким образом, в множестве (4.12) гипербола является графиком функции

$$f(x_1) = b\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - 1},$$

определенной при $x_1 \in [a, +\infty)$.

Ясно, что функция f обладает следующими свойствами:

- $f(a) = 0$;
- $f(x_1)$ возрастает с ростом x_1 ;
- $f(x_1) \rightarrow +\infty$ при $x_1 \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим прямую

$$x_2 = \frac{b}{a} x_1. \quad (4.13)$$

Фиксируем значение $x_1 \geq a$; пусть $x_2 = f(x_1)$ и $\tilde{x}_2 = \frac{b}{a} x_1$. Ясно, что (x_1, x_2) и $(x_1, \tilde{x}_2)$ – точки на гиперболе (4.11) и на прямой (4.13), абсциссы которых равны x_1 . Из формул (4.11) и (4.13) следует, что

$$x_2^2 = \frac{b^2}{a^2} x_1^2 - b^2 < \tilde{x}_2^2 = \frac{b^2}{a^2} x_1^2,$$

поэтому точка (x_1, x_2) лежит ниже точки $(x_1, \tilde{x}_2)$. В то же время,

$$\tilde{x}_2^2 - x_2^2 = b^2,$$

откуда следует, что

$$(\tilde{x}_2 - x_2)(\tilde{x}_2 + x_2) = b^2,$$

или

$$\tilde{x}_2 = x_2 + \frac{b^2}{\tilde{x}_2 + x_2}. \quad (4.14)$$

Так как $\tilde{x}_2 + x_2 \rightarrow +\infty$ при $x_1 \rightarrow +\infty$ (почему?), разность $\tilde{x}_2 - x_2$ стремится к 0 при $x_1 \rightarrow +\infty$.

Из формулы (4.14) следует, что при $x_1 \rightarrow +\infty$ точка гиперболы (x_1, x_2) неограниченно приближается к прямой (4.13), оставаясь ниже этой прямой (рис. 4.4).

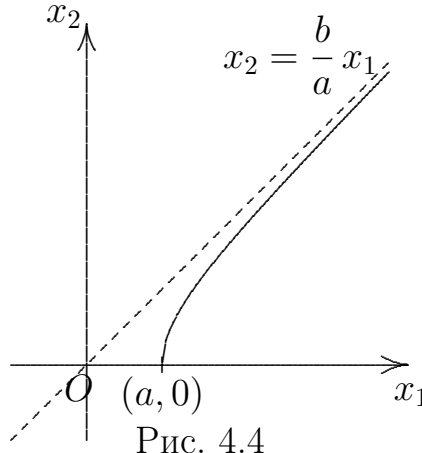


Рис. 4.4

Так как гипербола симметрична относительно осей Ox_1 , Ox_2 и относительно начала координат, кривая, задаваемая уравнением (4.11), выглядит так, как показано на рис. 4.5.

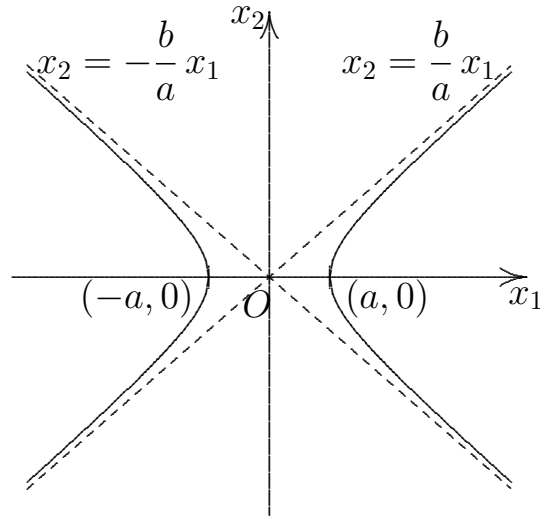


Рис. 4.5

Прямые $x_2 = \pm \frac{b}{a} x_1$ называются асимптотами гиперболы (4.11).

Так же как эллипс, гиперболу можно характеризовать поведением расстояний от ее точек до двух фиксированных точек плоскости: это множество таких точек, абсолютная величина разности расстояний которых до двух фиксированных точек постоянна.

Так же, как это было сделано в случае эллипса, фиксируем две точки плоскости $f_1 = (c, 0)$ и $f_2 = (-c, 0)$ и число $2a > 0$. Пусть r_1 и r_2 – расстояния от точек f_1 и f_2 до точки $x = (x_1, x_2)$; сформулированное условие выглядит так:

$$|r_1 - r_2| = 2a. \quad (4.15)$$

Из неравенства треугольника следует, что

$$2a = |r_1 - r_2| \leq 2c,$$

поэтому будем считать, что

$$a < c.$$

Теорема 4.2. *Множество точек x , для которых выполнено соотношение (4.15), совпадает с гиперболой (4.11), у которой $b^2 = c^2 - a^2$.*

Доказательство. Так же, как в теореме 4.1, покажем лишь, что если для точки x выполнено соотношение (4.15), то ее координаты удовлетворяют уравнению (4.11).

Если выполнено соотношение (4.15), то либо

$$r_1 - r_2 = 2a, \quad (4.16)$$

либо

$$r_2 - r_1 = 2a. \quad (4.17)$$

Рассмотрим лишь случай равенства (4.17); случай равенства (4.16) рассматривается так же. Величины r_1^2 и r_2^2 вычисляются по формулам (4.6); из этих формул следует, что

$$r_2^2 - r_1^2 = 4cx_1. \quad (4.18)$$

Из (4.17) вытекает, что

$$r_2^2 = (r_1 + 2a)^2 = r_1^2 + 4ar_1 + 4a^2,$$

поэтому (учитывая (4.18))

$$r_2^2 - r_1^2 = 4ar_1 + 4a^2 = 4cx_1,$$

а отсюда выводим, что

$$r_1 = \frac{c}{a} x_1 - a.$$

Следовательно,

$$r_1^2 = \frac{c^2}{a^2} x_1^2 - 2cx_1 + a^2.$$

По первой из формул (4.6),

$$r_1^2 = x_1^2 - 2cx_1 + c^2 + x_2^2,$$

поэтому

$$x_1^2 - 2cx_1 + c^2 + x_2^2 = \frac{c^2}{a^2} x_1^2 - 2cx_1 + a^2,$$

или

$$\frac{c^2 - a^2}{a^2} x_1^2 - x_2^2 = c^2 - a^2. \quad (4.19)$$

Обозначая $b^2 = c^2 - a^2$ и деля равенство (4.19) на b^2 , получаем равенство

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1,$$

совпадающее с (4.11). ■

Замечание. При доказательстве теоремы 4.2 был рассмотрен случай соотношения (4.17). Геометрически ясно (сравните рис. 4.3 и 4.5), что это соотношение задает “правую” ветвь гиперболы (т. е. ее часть, соответствующую $x_1 \geq a$); соотношение (4.16) задает “левую” ветвь.

Точки f_1 и f_2 называются фокусами гиперболы.

4.4. Парабола

Парабола на плоскости задается уравнением

$$x_2^2 = 2px_1, p > 0. \quad (4.20)$$

Уравнение (4.20) – частный случай общего уравнения (4.1) с $A = 0$, $B = p$, $C = -1$, $D = E = F = 0$.

Из уравнения (4.20) следует, что $x_1 \geq 0$, поэтому парабола лежит в правой полуплоскости

$$\{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0\}.$$

Если точка (x_1, x_2) принадлежит параболе (4.20), то из равенства

$$(-x_2)^2 = x_2^2 = 2px_1$$

следует, что точка $(x_1, -x_2)$ также принадлежит параболе; поэтому парабола симметрична относительно оси Ox_1 .

Геометрический вид параболы известен из школьного курса математики; достаточно заметить, что если обозначить $x_1 = y$ и $x_2 = x$, то уравнение (4.20) будет задавать стандартную квадратичную функцию $y = \frac{x^2}{2p}$. Таким образом, кривая, задаваемая уравнением (4.20), имеет вид, изображенный на рис. 4.6.

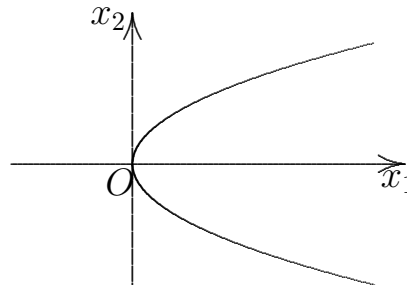


Рис. 4.6

В отличие от эллипса и гиперболы парабола характеризуется не поведением расстояний от ее точек до двух фиксированных точек плоскости, а равенством расстояний от ее точек до фиксированной точки и прямой.

Фиксируем на плоскости прямую l и не принадлежащую ей точку f . Выберем систему координат так, чтобы прямая l задавалась уравнением $x_1 = -p/2$, а точка f имела координаты $(p/2, 0)$.

Теорема 4.3. *Множество точек x , расстояния от которых до точки f и до прямой l равны, совпадает с параболой (4.20).*

Доказательство. Как и в теоремах 4.1 и 4.2, докажем лишь, что если расстояния от точки x до точки f и до прямой l равны, то ее координаты удовлетворяют уравнению (4.20).

Рассмотрим точку $x = (x_1, x_2)$ и вычислим ее расстояния до точки $f = (p/2, 0)$ и до прямой $l = \{x : x_1 = -p/2\}$ (рис. 4.7).

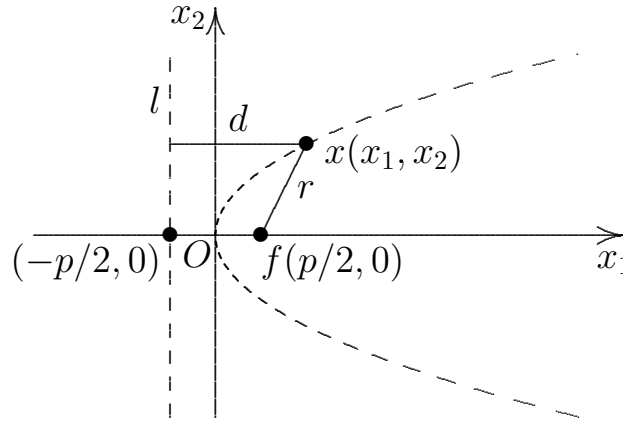


Рис. 4.7

Ясно, что

$$d = |x_1 + \frac{p}{2}|$$

и

$$r = \sqrt{(x_1 - \frac{p}{2})^2 + x_2^2}.$$

Если $d = r$, то $d^2 = r^2$, поэтому

$$x_1^2 + px_1 + \frac{p^2}{4} = x_1^2 - px_1 + \frac{p^2}{4} + x_2^2,$$

а отсюда следует, что

$$2px_1 = x_2^2,$$

т. е. выполнено равенство (4.20). ■

Точка f называется фокусом параболы (4.20), а прямая l – ее директрисой.

4.5. Вырожденные случаи

Как уже отмечалось, уравнение (4.1) может задавать множества точек, не являющиеся кривыми (в общепринятом смысле этого слова). Опишем все такие множества.

Пустое множество задается, например, уравнением

$$-x_1^2 - x_2^2 = 1 \quad (4.21)$$

($A = C = F = -1, B = D = E = 0$). Ясно, что равенство (4.21) не выполняется ни для какой точки $x = (x_1, x_2)$.

Точка задается, например, уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 = 0 \quad (4.22)$$

($A = C = 1, B = D = E = F = 0$). Ясно, что равенство (4.22) равносильно равенствам $x_1 = x_2 = 0$, выполняющимся только для точки $x = (0, 0)$.

Прямая задается, например, уравнением

$$x_1^2 = 0 \quad (4.23)$$

($A = 1, B = C = D = E = F = 0$). Ясно, что уравнение (4.23) задает прямую $x_1 = 0$ (ось Ox_2).

Две параллельные прямые задаются, например, уравнением

$$x_1^2 = 1 \quad (4.24)$$

($A = 1, B = C = D = E = 0, F = -1$). Ясно, что уравнение (4.24) задает две параллельные прямые $\{(x_1, x_2) : x_1 = 1\}$ и $\{(x_1, x_2) : x_1 = -1\}$.

Две пересекающиеся прямые задаются, например, уравнением

$$x_1^2 - x_2^2 = 0 \quad (4.25)$$

($A = 1, C = -1, B = D = E = F = 0$). Уравнение (4.25) можно переписать в виде

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0;$$

ясно, что оно задает две пересекающиеся прямые $\{(x_1, x_2) : x_1 = x_2\}$ и $\{(x_1, x_2) : x_1 = -x_2\}$.

В 4.6 будет описан алгоритм выяснения типа кривой второго порядка по коэффициентам A, B, C, D, E, F уравнения (4.1). Из этого описания следует, что выше перечислены все возможные виды множеств на плоскости, задаваемых уравнением (4.1).

4.6. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

Как отмечалось в 4.1, цель исследования – определить по уравнению (4.1), какое именно множество на плоскости это уравнение задает.

Опишем подход к решению этой задачи, основанный на теории собственных чисел и собственных векторов самосопряженных матриц.

Сумма первых трех членов в уравнении (4.1) – это квадратичная форма от переменных x_1, x_2 с матрицей

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \left\langle P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} Ax_1 + Bx_2 \\ Bx_1 + Cx_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \\ &= Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2. \end{aligned}$$

Пусть λ_1 и λ_2 – собственные числа матрицы P , а $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ и $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ – соответствующие им собственные векторы.

Так как матрица P вещественная и симметричная, она является самосопряженной. По теореме 2.7, можно найти собственные векторы $\vec{v}$ и $\vec{u}$, составляющие ортонормированный базис в пространстве двумерных вещественных векторов. Было показано, что если

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1\vec{v} + c_2\vec{u}, \quad (4.27)$$

то

$$V(\vec{x}) = \langle P\vec{x}, \vec{x} \rangle = \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2. \quad (4.28)$$

Введем на плоскости новые координаты $y = (y_1, y_2)$, связанные с первоначальными координатами $x = (x_1, x_2)$ следующим образом:

$$x_1 = y_1 v_1 + y_2 u_1, \quad x_2 = y_1 v_2 + y_2 u_2. \quad (4.29)$$

Легко понять, что y_1 и y_2 – это просто коэффициенты разложения вектора $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ по ортонормированному базису $\vec{v}$ и $\vec{u}$ (в разложении (4.27) эти величины обозначены через c_1 и c_2).

Тогда из равенств (4.28) и (4.29) вытекает равенство

$$\begin{aligned} Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F &= \\ &= V(\vec{x}) + Dx_1 + Ex_2 + F = \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + D(y_1 v_1 + y_2 u_1) + E(y_1 v_2 + y_2 u_2) + F = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Обозначая $D' = Dv_1 + Ev_2$ и $E' = Du_1 + Eu_2$, получаем из (4.30) следующее уравнение:

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + D'y_1 + E'y_2 + F = 0. \quad (4.31)$$

Таким образом, в новых координатах $y = (y_1, y_2)$ исследуемое уравнение не содержит произведения $y_1 y_2$.

Предполагалось, что в уравнении (4.1) хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от 0. Покажем, что в этом случае одно из собственных чисел матрицы P отлично от 0. Действительно, характеристический многочлен матрицы P имеет вид

$$\det \begin{bmatrix} A - \lambda & B \\ B & C - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda(A + C) + AC - B^2.$$

Если оба его корня λ_1 и λ_2 нулевые, то по теореме Виета

$$A + C = 0; AC - B^2 = 0. \quad (4.32)$$

Из первого равенства в (4.32) следует, что $C = -A$, тогда второе равенство приобретает вид $-A^2 - B^2 = 0$, что возможно только если $A = B = 0$, но в этом случае и $C = 0$. Полученное противоречие показывает, что одно из чисел λ_1 и λ_2 отлично от 0.

Рассмотрим возникающие возможные случаи.

Случай 1: $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$.

Преобразуем выражение $\lambda_1 y_1^2 + D' y_1$, вынося множитель λ_1 и выделяя полный квадрат:

$$\begin{aligned} \lambda_1 y_1^2 + D' y_1 &= \lambda_1 \left(y_1^2 + \frac{D'}{\lambda_1} y_1 \right) = \\ &= \lambda_1 \left[\left(y_1 + \frac{D'}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{(D')^2}{4\lambda_1^2} \right]. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \lambda_2 y_2^2 + E' y_2 &= \\ &= \lambda_2 \left[\left(y_2 + \frac{E'}{2\lambda_2} \right)^2 - \frac{(E')^2}{4\lambda_2^2} \right]. \end{aligned}$$

Введем новые переменные:

$$z_1 = y_1 + \frac{D'}{2\lambda_1}, \quad z_2 = y_2 + \frac{E'}{2\lambda_2}. \quad (4.33)$$

В этих переменных уравнение (4.31) запишется в виде

$$A_1 z_1^2 + C_1 z_2^2 + F_1 = 0, \quad (4.34)$$

где $A_1 = \lambda_1$, $C_1 = \lambda_2$, $F_1 = F - \frac{(D')^2}{4\lambda_1} - \frac{(E')^2}{4\lambda_2}$.

Если $F_1 \neq 0$, то уравнение (4.34) приводится к виду

$$\frac{z_1^2}{a_1} + \frac{z_2^2}{a_2} = 1, \quad (4.35)$$

где $\frac{1}{a_1} = -\frac{A_1}{F_1}$, $\frac{1}{a_2} = -\frac{C_1}{F_1}$.

Если $a_1, a_2 > 0$, то уравнение (4.35) задает эллипс; если $a_1 a_2 < 0$, то уравнение (4.35) задает гиперболу (при $a_1 > 0$ и $a_2 < 0$ уравнение (4.35) имеет вид (4.11) с $a^2 = a_1$, $b^2 = -a_2$, $x_1 = z_1$, $x_2 = z_2$; при $a_1 < 0$ и $a_2 > 0$ уравнение (4.35) имеет вид (4.11) с $a^2 = a_2$, $b^2 = -a_1$, $x_1 = z_2$, $x_2 = z_1$).

Если $a_1, a_2 < 0$, то уравнение (4.35) задает пустое множество.

Если $F_1 = 0$, то уравнение (4.34) имеет вид

$$A_1 z_1^2 + C_1 z_2^2 = 0. \quad (4.36)$$

Если A_1 и C_1 одного знака (напомним, что в данном случае $A_1 = \lambda_1$ и $C_1 = \lambda_2$ отличны от 0), то уравнение (4.36) задает точку $z_1 = z_2 = 0$.

Если $A_1 > 0$, $C_1 < 0$, то уравнение (4.36) приводится к виду

$$(\sqrt{A_1} z_1 + \sqrt{|C_1|} z_2)(\sqrt{A_1} z_1 - \sqrt{|C_1|} z_2) = 0$$

и задает две пересекающиеся прямые. Случай $A_1 < 0$, $C_1 > 0$ сводится к предыдущему умножением уравнения (4.36) на -1 .

Случай 2: $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 = 0$.

Этот случай разбивается на 2 подслучая.

Случай 2.1. $E' \neq 0$. В этом случае вводим новые переменные z_1, z_2 так: z_1 выражается через y_1 по первой из формул (4.33), а

$$z_2 = y_2 + \frac{1}{E'} \left(F - \frac{(D')^2}{4\lambda_1} \right).$$

В этих переменных уравнение (4.31) приобретает вид

$$A_1 z_1^2 + E_1 z_2 = 0, \quad (4.37)$$

где $A_1 = \lambda_1$, $E_1 = E' (\neq 0)$. Разделив (4.37) на A_1 и обозначив $-2p = \frac{E_1}{A_1}$, получим уравнение

$$z_1^2 = 2p z_2,$$

задающее параболу при $p > 0$. Если $p < 0$, то от переменных z_1, z_2 переходим к переменным $z_1, -z_2$ и вновь получаем параболу.

Случай 2.2. $E' = 0$. В этом случае уравнение (4.31) имеет вид

$$\lambda_1 y_1^2 + D' y_1 + F = 0.$$

Выражая z_1 через y_1 по первой из формул (4.33), приходим к уравнению

$$A_1 z_1^2 = F_1, \quad (4.38)$$

где $A_1 = \lambda_1$, $F_1 = -F + \frac{(D')^2}{4\lambda_1}$.

Если $F_1 = 0$, уравнение (4.38) задает прямую $z_1 = 0$.

Если $F_1 \neq 0$ и $A_1 F_1 > 0$, то уравнение (4.38) задает две параллельные прямые

$$\left\{ (z_1, z_2) : z_1 = \pm \sqrt{\frac{F_1}{A_1}} \right\}.$$

Если $F_1 \neq 0$ и $A_1 F_1 < 0$, то уравнение (4.38) не имеет решений (задает пустое множество).

Случай $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 \neq 0$ аналогичен случаю 2 (следует лишь поменять переменные y_1 и y_2 местами).

Таким образом, проведено полное исследование всех множеств, задаваемых уравнением (4.1).

Конечно, для решения конкретных задач не следует запоминать все выписанные ранее формулы. Достаточно запомнить лишь алгоритм:

– привести “квадратичную часть”

$$Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2$$

к каноническому виду заменой (4.29), использующей собственный ортонормированный базис матрицы (4.26);

– если в получающемся уравнении есть как первая, так и вторая степени одной из координат, “уничтожить” первую степень дополнением до полного квадрата.

После этого выяснение типа исследуемой кривой не вызывает никаких трудностей.

Далее приводятся примеры определения типов кривых второго порядка.

4.7. Случай эллипса

Определим тип кривой, задаваемой уравнением

$$5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 36 = 0. \quad (4.39)$$

Матрица (4.26) имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix};$$

ее собственные числа $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$, а соответствующий ортонормированный базис

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

(см. пример 2.5).

Замена переменных (4.29) имеет вид

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} y_2, \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} y_2. \quad (4.40)$$

Так как в уравнении (4.39) $D = E = 0$, из формулы (4.30) следует, что в координатах y_1, y_2 уравнение (4.39) приобретает вид

$$4y_1^2 + 9y_2^2 - 36 = 0,$$

или

$$\frac{y_1^2}{9} + \frac{y_2^2}{4} = 1. \quad (4.41)$$

Уравнение (4.41) задает на плоскости переменных y_1, y_2 эллипс (рис. 4.8).

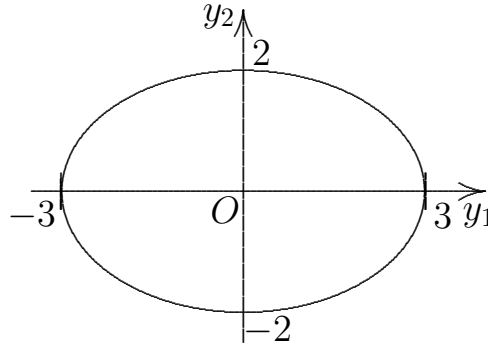


Рис. 4.8

Замену переменных (4.40) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = y_1 \vec{v} + y_2 \vec{u},$$

поэтому в первоначальных координатах x_1, x_2 ось Oy_1 (задаваемая уравнением $y_2 = 0$) совпадает с прямой, проходящей через начало координат и параллельной вектору $\vec{v}$. Аналогично, ось Oy_2 совпадает с прямой, проходящей через начало координат и параллельной вектору $\vec{u}$.

Точке $(y_1, y_2) = (3, 0)$ соответствует точка $(x_1, x_2) = \left(\frac{6}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}} \right)$.

Точке $(y_1, y_2) = (0, 2)$ соответствует точка $(x_1, x_2) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}} \right)$.

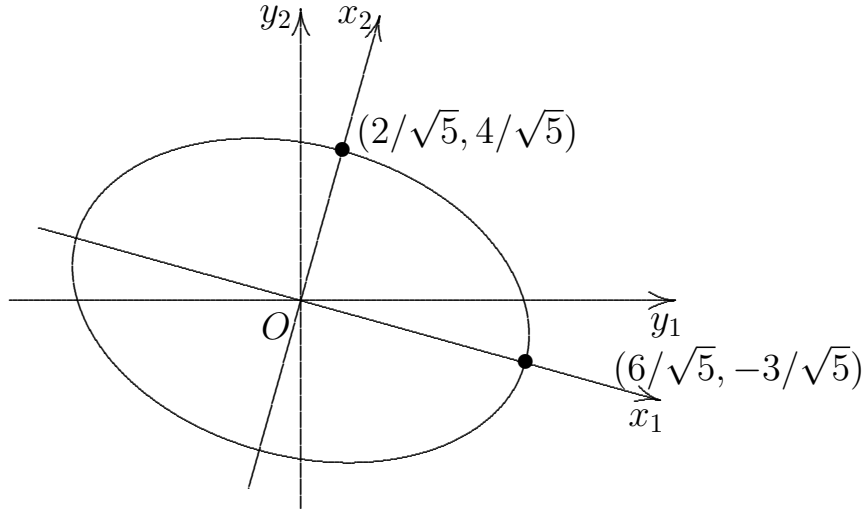


Рис. 4.9

Таким образом, на плоскости переменных x_1, x_2 уравнение (4.39) задает эллипс (рис. 4.9).

4.8. Случай параболы

Определим тип кривой, задаваемой уравнением

$$x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 - 4\sqrt{10}x_1 - 32\sqrt{10}x_2 + 190 = 0. \quad (4.42)$$

Матрица (4.26) имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ее характеристический многочлен

$$\begin{aligned} \det[P - \lambda E_2] &= \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 9 - \lambda \end{bmatrix} = \\ &= (1 - \lambda)(9 - \lambda) - 9 = \lambda^2 - 10\lambda, \end{aligned}$$

поэтому ее собственные числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 10$. Ортонормированный собственный базис

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 3 \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

(проверьте!).

Замена (4.29):

$$x_1 = -\frac{3}{\sqrt{10}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}y_2, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}y_1 + \frac{3}{\sqrt{10}}y_2.$$

В переменных y_1, y_2 уравнение (4.42) приобретает вид

$$\begin{aligned} 0y_1^2 + 10y_2^2 - 4\sqrt{10}\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}y_2\right) - 32\sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}y_1 + \frac{3}{\sqrt{10}}y_2\right) + 190 = \\ = 10y_2^2 - 100y_2 - 20y_1 + 190 = 0. \end{aligned}$$

Сократим его на 10:

$$y_2^2 - 10y_2 - 2y_1 + 19 = 0$$

и выделим полный квадрат относительно переменной y_2 :

$$(y_2 - 5)^2 - 2(y_1 + 3) = 0. \quad (4.43)$$

Введем новые переменные

$$z_1 = y_1 + 3, \quad z_2 = y_2 - 5$$

(заметим, что при этой замене переменных начало координат переносится в точку O_1 : $(y_1, y_2) = (-3, 5)$, соответствующую $(z_1, z_2) = (0, 0)$).

В переменных z_1, z_2 уравнение (4.43) задает параболу

$$z_2^2 = 2z_1.$$

Ее график изображен на рис. 4.10.

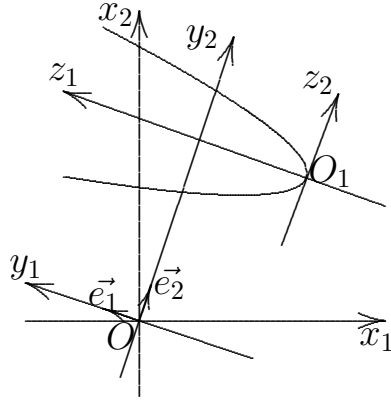


Рис. 4.10

На этом рисунке также изображены соответствующие системы координат.

4.9. Случай вырожденной кривой

Определим тип кривой, задаваемой уравнением

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 - 1 = 0. \quad (4.44)$$

Матрица (4.26) имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ее характеристический многочлен

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda.$$

Собственные числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Ортонормированный собственный базис

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

(проверьте!).

Замена (4.29):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2, \\ x_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2. \end{aligned} \tag{4.45}$$

В переменных y_1, y_2 уравнение (4.44) приобретает вид

$$0y_1^2 + 2y_2^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2) + \frac{2}{\sqrt{2}}(-y_1 + y_2) - 1 = 0,$$

или

$$2y_2^2 + \frac{4}{\sqrt{2}} y_2 - 1 = 0,$$

или

$$y_2^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{2} = 0.$$

Выделим полный квадрат:

$$\left(y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1. \tag{4.46}$$

Ясно, что уравнение (4.46) задает на плоскости переменных y_1, y_2 две параллельные прямые:

$$y_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{4.47}$$

Складывая первую и вторую строчки в равенствах (4.45), приходим к равенству

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{\sqrt{2}} y_2 = \sqrt{2} y_2,$$

поэтому прямые (4.47) на плоскости переменных x_1, x_2 задаются уравнениями

$$x_1 + x_2 = \sqrt{2} - 1, \quad x_1 - x_2 = -\sqrt{2} - 1,$$

или

$$x_2 = -x_1 + \sqrt{2} - 1, \quad x_2 = -x_1 - \sqrt{2} - 1.$$

5. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

5.1. Общее уравнение поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка в трехмерном пространстве с декартовыми прямоугольными координатами $x = (x_1, x_2, x_3)$ называется множество всех точек x , координаты которых удовлетворяют уравнению

$$Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2Dx_1x_2 + 2Ex_1x_3 + 2Fx_2x_3 + 2Gx_1 + 2Hx_2 + 2Ix_3 + J = 0, \quad (5.1)$$

где $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ – постоянные числа, причем хотя бы один из коэффициентов A, B, C, D, E, F отличен от нуля.

Опишем основные типы поверхностей второго порядка (но, в отличие от случая кривых второго порядка, не будем доказывать, что описанные поверхности исчерпывают все возможные виды множеств, задаваемых уравнением (5.1)).

5.2. Эллипсоид

Эллипсоид задается уравнением

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1, \quad (5.2)$$

где $a, b, c > 0$ (так же, как в 4.2, будем иногда писать “эллипсоид (5.2)”).

Уравнение (5.2) получается из общего уравнения (5.1) при $A = \frac{1}{a^2}$, $B = \frac{1}{b^2}$, $C = \frac{1}{c^2}$, $D = E = F = G = H = I = 0$ и $J = -1$ (далее не будем выписывать значения коэффициентов $A, \dots, J$, предоставляя это читателю).

Частным случаем уравнения (5.2) (при $a = b = c$) является уравнение

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{a^2} = 1,$$

эквивалентное уравнению

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2,$$

которое, как известно, задает сферу радиуса a с центром в начале координат.

Из уравнения (5.2) следуют неравенства

$$|x_1| \leq a, |x_2| \leq b, |x_3| \leq c.$$

Они означают, что эллипсоид лежит в параллелепипеде

$$\{(x_1, x_2, x_3) : |x_1| \leq a, |x_2| \leq b, |x_3| \leq c\}.$$

Рассмотрим сечение эллипсоида плоскостью $x_3 = d$; оно задается уравнением

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 - \frac{d^2}{c^2}. \quad (5.3)$$

Ясно, что уравнение (5.3) имеет решения (x_1, x_2) тогда и только тогда, когда $1 - \frac{d^2}{c^2} \geq 0$, что равносильно неравенствам $|d| \leq c$.

При $d = \pm c$ уравнение (5.3) имеет вид

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 0$$

и задает единственную пару $x_1 = x_2 = 0$.

При $|d| < c$ уравнение (5.3) задает эллипс (проверьте!). Таким образом, сечения эллипсоида плоскостями $x_3 = d$ – это пустые множества при $|d| > c$, точки $(0, 0, c)$ и $(0, 0, -c)$, лежащие на оси Ox_3 , и эллипсы (5.3) при $|d| < c$ (см. рис. 5.1, на котором изображены сечения плоскостями $x_3 = 0$ и $x_3 = d, d \in (0, c)$).

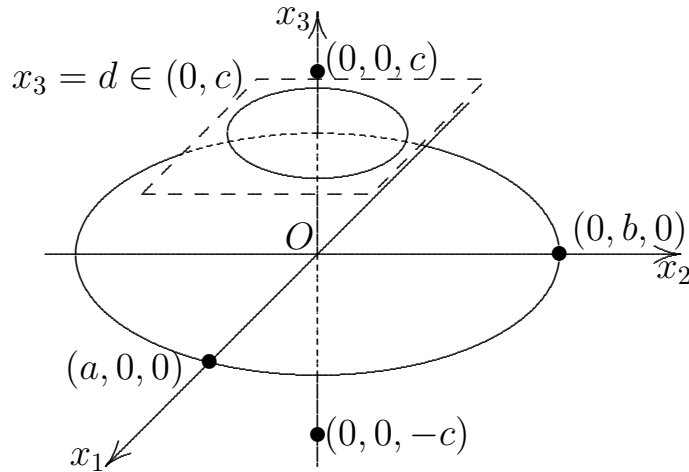


Рис. 5.1

Так же устроены сечения эллипсоида (5.2) плоскостями $x_1 = d$ и $x_2 = d$.

Таким образом, эллипсоид имеет вид, изображенный на рис. 5.2.

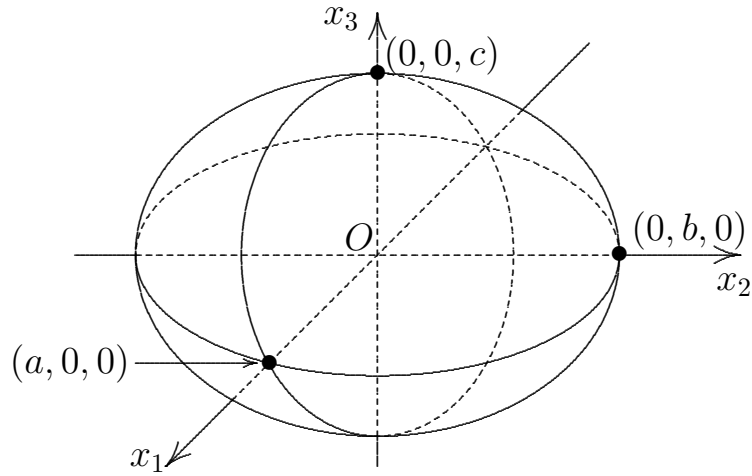


Рис. 5.2

Здесь же изображены эллипсы, которые получаются в результате сечения эллипсоида координатными плоскостями.

Две поверхности второго порядка называются гиперболами.

5.3. Однополостный гиперболоид

Однополостный гиперболоид (рис. 5.3) задается уравнением

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1, \quad (5.4)$$

где $a, b, c > 0$. Уравнение (5.4) можно переписать в виде

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 + \frac{x_3^2}{c^2}.$$

Сечение гиперболоида плоскостью $x_3 = d$ — это эллипс при любом d . При $d = 0$ получается сечение

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1,$$

которое называется горловым.

При $d \neq 0$ получаются “расширяющиеся” эллипсы

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{b_1^2} = 1,$$

где

$$a_1^2 = a^2 \left(1 + \frac{d^2}{c^2}\right), b_1^2 = b^2 \left(1 + \frac{d^2}{c^2}\right).$$

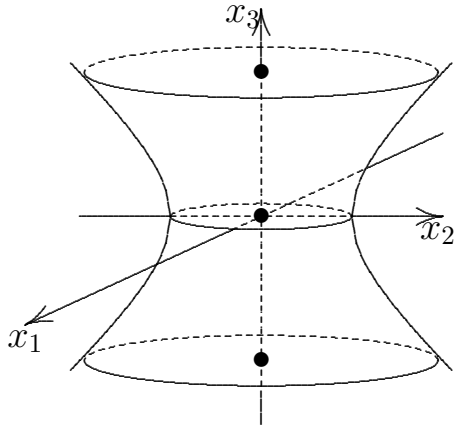


Рис. 5.3

Плоскости $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ пересекают гиперболоид (5.4) по гиперболам

$$\frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

и

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1.$$

5.4. Двуполостный гиперболоид

Двуполостный гиперболоид (рис. 5.4) задается уравнением

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = -1, \quad (5.5)$$

где $a, b, c > 0$. Уравнение (5.5) можно переписать в виде

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = -1 + \frac{x_3^2}{c^2}. \quad (5.6)$$

Так как

$$-1 + \frac{x_3^2}{c^2} \geq 0$$

лишь при $|x_3| \geq c$, плоскости $x_3 = d$ с $d \in (-c, c)$ пересекают гиперболоид (5.5) по пустому множеству (это означает, что на гиперболоиде (5.5) нет точек (x_1, x_2, x_3) с $|x_3| < c$).

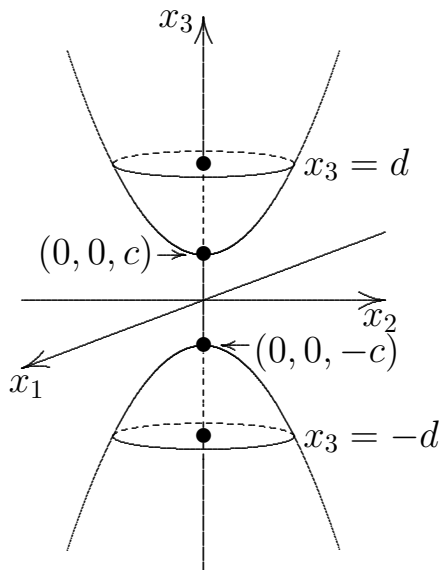


Рис. 5.4

При $x_3 = \pm c$ уравнение (5.6) задает точки $(0, 0, c)$ и $(0, 0, -c)$. При $|x_3| = d > c$ уравнение (5.6) задает эллипсы, которые являются пересечениями гиперболоида (5.5) с плоскостями $x_3 = \pm d$. Плоскость $x_1 = 0$ пересекает гиперболоид (5.6) по гиперболе

$$\frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = -1;$$

плоскость $x_2 = 0$ пересекает гиперболоид (5.6) по гиперболе

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = -1.$$

В отличие от однополостного гиперболоида (5.4) двуполостный гиперболоид (5.5) состоит из двух частей (“полостей”), лежащих в полупространствах $x_3 \geq c$ и $x_3 \leq -c$.

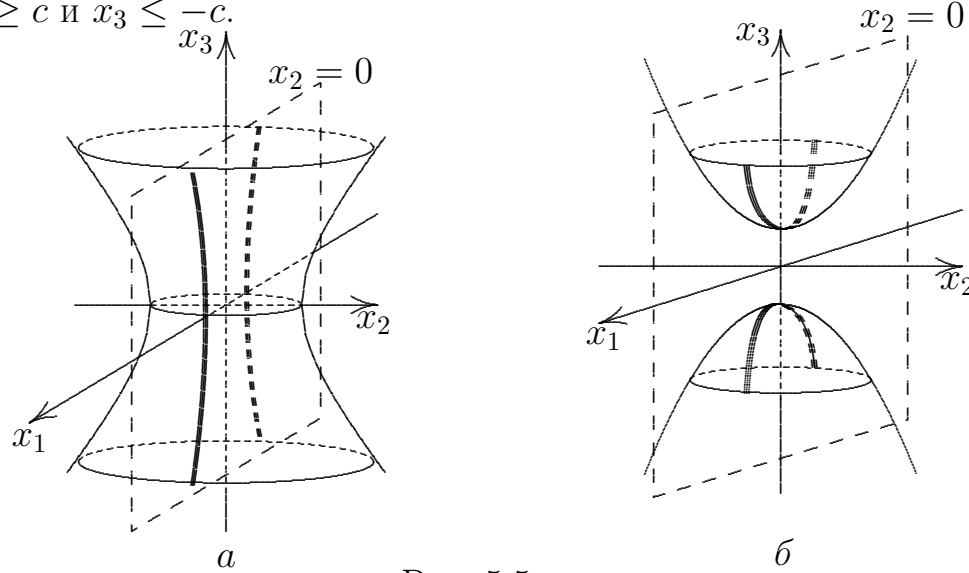


Рис. 5.5

Сечения гиперболоидов (5.4) и (5.5) плоскостью $x_2 = 0$ выделены жирными линиями на рис. 5.5, а и б соответственно.

5.5. Конус

Конус задается уравнением

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0, \quad (5.7)$$

где $a, b, c > 0$. Эта поверхность состоит из прямых, пересекающихся в начале координат (эта точка называется вершиной конуса).

Действительно, если точка $A = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ удовлетворяет уравнению (5.7), то любая точка вида

$$x = (tx_1^0, tx_2^0, tx_3^0) \quad (5.8)$$

тоже удовлетворяет этому уравнению. Ясно, что точки вида (5.8) при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ пробегают прямую, проходящую через точку A и начало координат. Такие прямые называются образующими конуса.

Сечения конуса (5.7) плоскостями $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ – это пары пересекающихся прямых

$$\frac{x_2}{b} = \pm \frac{x_3}{c}; \quad \frac{x_1}{a} = \pm \frac{x_3}{c}.$$

Сечение конуса плоскостью $x_3 = d, d \neq 0$ – это эллипс

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = \frac{d^2}{c^2}.$$

Сечение конуса плоскостью, параллельной одной из его образующих, – парабола; если плоскость пересекает как верхнюю, так и нижнюю часть конуса, то сечение – гипербола (примем эти утверждения без доказательства).

Таким образом, все основные кривые второго порядка (эллипсы, гиперболы, параболы) получаются при сечении конуса плоскостями, поэтому данные кривые иногда называют коническими сечениями. На рис. 5.6 показан конус (5.7), жирными линиями выделены его сечения плоскостями $x_3 = d, d > 0$ (эллипс) и $x_1 = d, d > 0$ (гипербола).

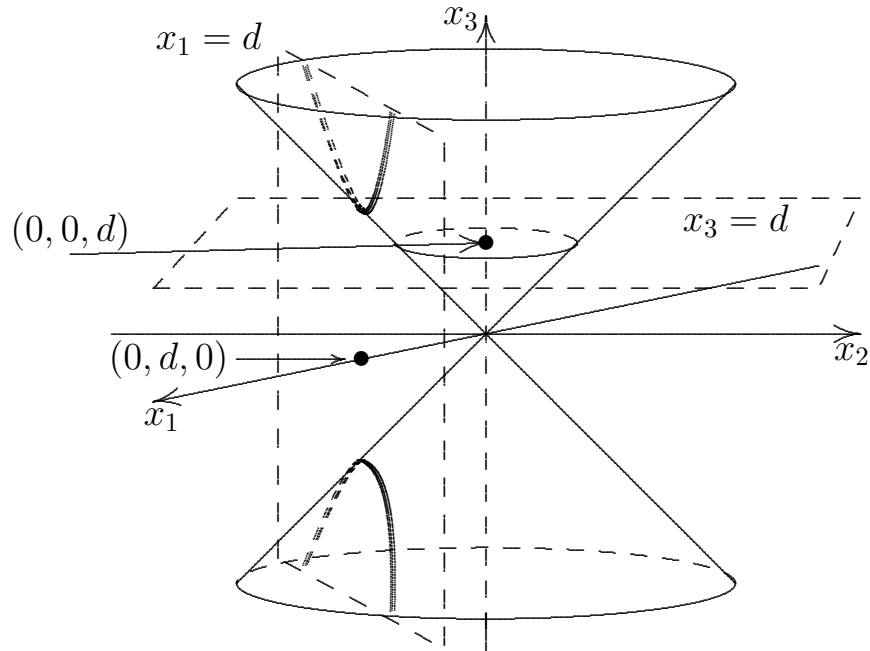


Рис. 5.6

Две поверхности второго порядка называются параболоидами.

5.6. Эллиптический параболоид

Эллиптический параболоид задается уравнением

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3, \quad (5.9)$$

где $a, b > 0$. Сечения параболоида (5.9) плоскостями $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ – это параболы $x_2^2 = 2b^2x_3$ и $x_1^2 = 2a^2x_3$.

Так как левая часть равенства (5.9) неотрицательна при всех x_1, x_2 , поверхность (5.9) расположена в полупространстве $x_3 \geq 0$; поэтому сечения параболоида (5.9) плоскостями $x_3 = d$ не пусты при $d \geq 0$. Сечение плоскостью $x_3 = 0$ – это точка $(0, 0, 0)$; сечения плоскостями $x_3 = d, d > 0$ – это эллипсы

$$\frac{x_1^2}{2da^2} + \frac{x_2^2}{2db^2} = 1.$$

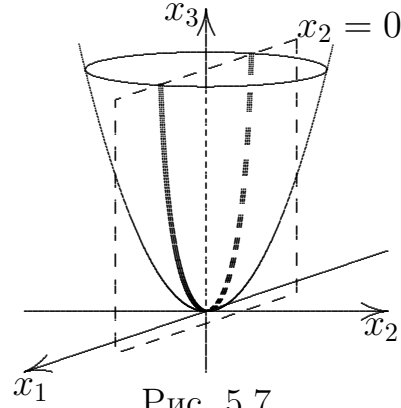


Рис. 5.7

Эллиптический параболоид (5.9) изображен на рис. 5.7. Жирными линиями выделена парабола, являющаяся сечением параболоида (5.9) плоскостью $x_2 = 0$.

5.7. Гиперболический параболоид

Гиперболический параболоид задается уравнением

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3, \quad (5.10)$$

где $a, b > 0$.

Сечения параболоида (5.10) плоскостями $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ – это параболы

$$x_2^2 = -2b^2 x_3 \quad (5.11)$$

и

$$x_1^2 = 2a^2 x_3. \quad (5.12)$$

Гиперболический параболоид (5.10) изображен на рис. 5.8. Жирными линиями выделены параболы (5.11) и (5.12), являющиеся сечениями гиперболического параболоида (5.10) плоскостями $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$.

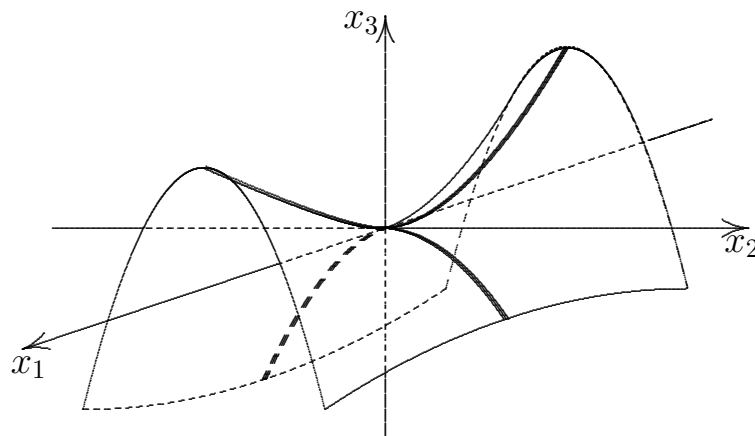


Рис. 5.8

В отличие от эллиптического параболоида (5.9) сечения параболоида (5.10) плоскостями $x_3 = d$ непусты при всех d .

Сечение плоскостью $x_3 = 0$ задается уравнением

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$\left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b}\right) \left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}\right) = 0.$$

Таким образом, это сечение представляет собой пару пересекающихся прямых

$$x_1 = \pm \frac{a}{b} x_2,$$

лежащих в плоскости $x_3 = 0$.

Если $d \neq 0$, сечение параболоида (5.10) плоскостью $x_3 = d$ – это гипербола

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 2d.$$

5.8. Цилиндрические поверхности

Поверхность второго порядка называется **цилиндром**, если она состоит из параллельных прямых, пересекающих лежащую в некоторой плоскости кривую второго порядка (направляющую). Таким образом, типов цилиндров столько же, сколько типов кривых второго порядка.

Остановимся подробно только на трех основных типах цилиндров, направляющие которых являются эллипсом, гиперболой и параболой.

Эллиптический цилиндр задается уравнением

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1. \quad (5.13)$$

Гиперболический цилиндр задается уравнением

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1. \quad (5.14)$$

Цилиндры (5.13) и (5.14) изображены на рис. 5.9 и 5.10 соответственно.

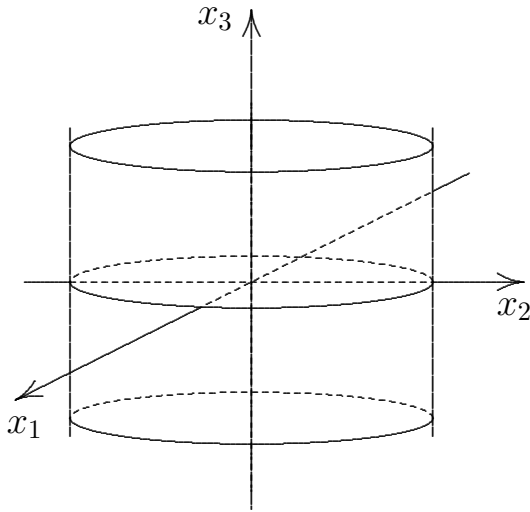


Рис. 5.9

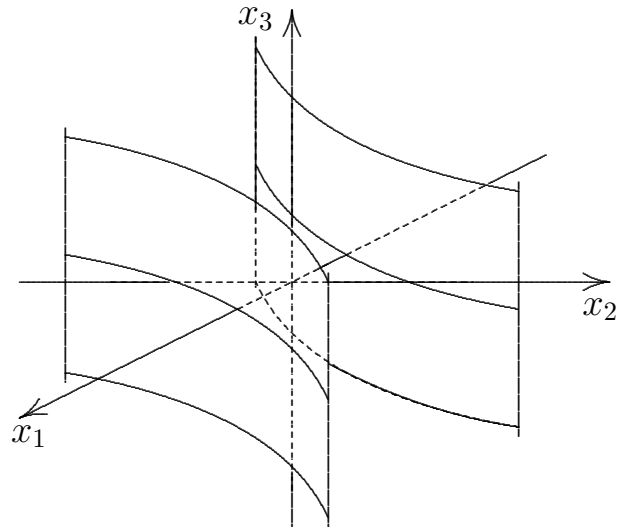


Рис. 5.10

Параболический цилиндр задается уравнением

$$x_2^2 = 2px_1, \quad (5.15)$$

где $p > 0$. Параболический цилиндр, заданный уравнением (5.15), изображен на рис. 5.11.

Отметим, что в уравнения (5.13)–(5.15) не входит координата x_3 . Отсюда следует, что если точка $(x_1, x_2, 0)$ принадлежит одной из поверхностей (5.13)–(5.15), то этой поверхности принадлежит и точка (x_1, x_2, x_3) с произвольным значением координаты x_3 .

Таким образом, в качестве направляющей соответствующего цилиндра можно взять кривую (5.13)–(5.15) в плоскости $x_3 = 0$, а затем провести через каждую точку $(x_1^0, x_2^0, 0)$ этой кривой прямую

$$\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0\},$$

параллельную оси Ox_3 .

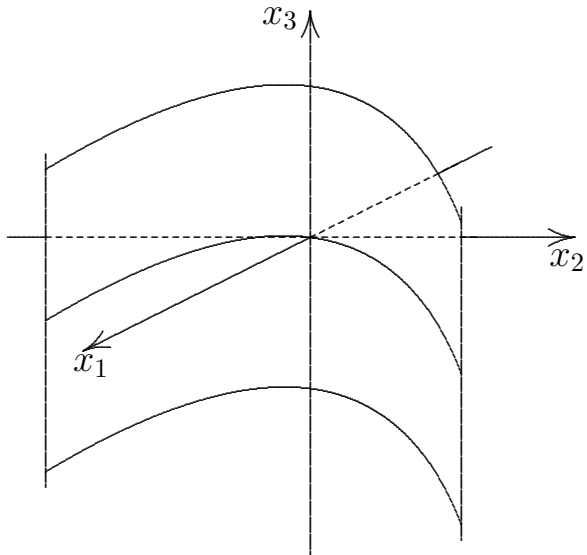


Рис. 5.11

5.9. Вырожденные поверхности

Поверхностями второго порядка могут быть **пара пересекающихся плоскостей**, задаваемая уравнением

$$x_2^2 - k^2 x_1^2 = 0, k \neq 0, \quad (5.16)$$

пара параллельных плоскостей, задаваемая уравнением

$$x_1^2 - k^2 = 0, k \neq 0, \quad (5.17)$$

и **одна плоскость**, задаваемая уравнением

$$x_1^2 = 0. \quad (5.18)$$

Поверхности (5.16)–(5.18) также являются цилиндрами; они состоят из прямых, параллельных оси Ox_3 , а их направляющие, лежащие в плоскости $x_3 = 0$, это две пересекающиеся прямые $x_2 = \pm kx_1$ (для поверхности (5.16)), две параллельные прямые $x_1 = \pm k$ (для поверхности (5.17)) и прямая $x_1 = 0$ (для поверхности (5.18)).

Поверхности (5.16)–(5.18) изображены на рис. 5.12–5.14 соответственно.

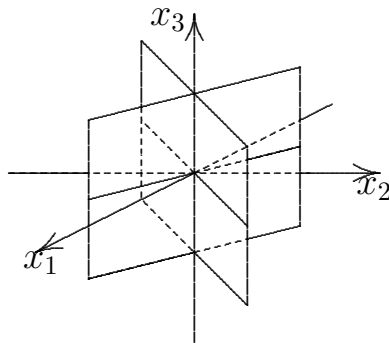


Рис. 5.12

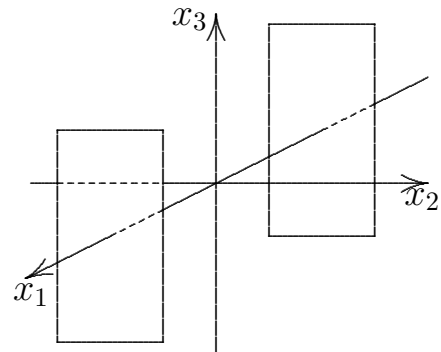


Рис. 5.13

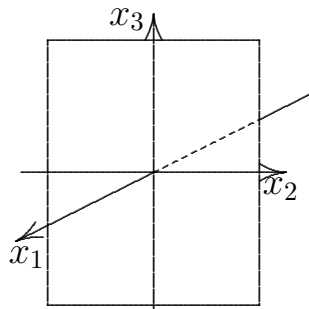


Рис. 5.14

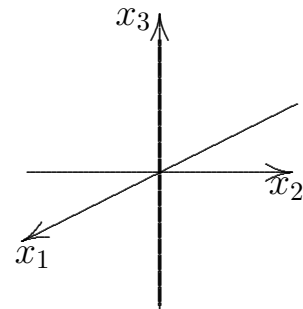


Рис. 5.15

Поверхностью второго порядка является **одна прямая**, задаваемая уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 = 0. \quad (5.19)$$

Поверхность (5.19) – тоже цилиндр; направляющая этого цилиндра в плоскости $x_3 = 0$ – это точка $x_1 = x_2 = 0$ (рис. 5.15).

На рис. 5.15 прямая (5.19) выделена жирно.

Наконец, поверхностью второго порядка может быть точка, задаваемая уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

и пустое множество, задаваемое, например, уравнением

$$x_1^2 = -1.$$

Можно показать, что в 5.2–5.9 перечислены все возможные типы поверхностей второго порядка.

5.10. Определение типа поверхности второго порядка

Пример 5.1. Определим тип поверхности второго порядка, задаваемой уравнением

$$2x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 2 = 0. \quad (5.20)$$

Сумма первых четырех членов в уравнении (5.20) – это квадратичная форма от переменных x_1, x_2, x_3 с матрицей

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ее характеристический многочлен

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -5 - \lambda \end{bmatrix} &= (2 - \lambda)(2 - \lambda)(-5 - \lambda) - 1(-5 - \lambda) = \\ &= (4 - 4\lambda + \lambda^2)(-5 - \lambda) + 5 + \lambda = -(\lambda^2 - 4\lambda + 3)(\lambda + 5); \end{aligned}$$

собственные числа $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -5$; соответствующие им собственные векторы

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Векторы $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ составляют ортонормированный базис в пространстве трехмерных вещественных векторов.

Введем координаты $y = (y_1, y_2, y_3)$, связанные с первоначальными координатами $x = (x_1, x_2, x_3)$ следующим образом:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2, \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2, \quad x_3 = y_3. \quad (5.21)$$

Замену переменных (5.21) можно записать в виде

$$\vec{x} = y_1 \vec{v} + y_2 \vec{u} + y_3 \vec{w},$$

где $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Так как y_1, y_2, y_3 – коэффициенты разложения вектора $\vec{x}$ по ортонормированному базису $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$, квадратичная часть уравнения (5.20) в новых координатах y_1, y_2, y_3 примет вид

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2,$$

а уравнение (5.20) запишется так:

$$y_1^2 + 3y_2^2 - 5y_3^2 - 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \right) - 4 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \right) - 4y_3 + 2 = 0,$$

или

$$y_1^2 + 3y_2^2 - 5y_3^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{6}{\sqrt{2}} y_2 - 4y_3 + 2 = 0.$$

Выпишем слагаемые с переменной y_1 и выделим полный квадрат:

$$y_1^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} y_1 = \left(y_1^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} = \left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{1}{2}.$$

Аналогично, для слагаемых с y_2 и y_3 :

$$\begin{aligned} 3y_2^2 - \frac{6}{\sqrt{2}} y_2 &= 3 \left(y_2^2 - \frac{2}{\sqrt{2}} y_2 \right) = 3 \left(y_2^2 - \frac{2}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{2} = \\ &= 3 \left(y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{3}{2}; \\ -5y_3^2 - 4y_3 &= -5 \left(y_3^2 + \frac{4}{5} y_3 \right) = -5 \left(y_3^2 + \frac{4}{5} y_3 + \frac{4}{25} \right) + \frac{4}{5} = \\ &= -5 \left(y_3 + \frac{2}{5} \right)^2 + \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Введем новые переменные:

$$z_1 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z_3 = y_3 + \frac{2}{5}.$$

В этих переменных уравнение (5.20) примет вид

$$z_1^2 + 3z_2^2 - 5z_3^2 + \frac{4}{5} = 0,$$

или

$$\frac{z_1^2}{4/5} + \frac{z_2^2}{4/15} - \frac{z_3^2}{4/25} = -1. \quad (5.22)$$

Уравнение (5.22) задает в пространстве переменных $z = (z_1, z_2, z_3)$ двуполостный гиперболоид. Таким образом, и уравнение (5.20) задает двуполостный гиперболоид.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белополюский А. Л., Бодунов Н. А., Меркулов А. Л. Линейная алгебра: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ “ЛЭТИ”, 2000.
2. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970.
3. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1984.

Оглавление

Предисловие	3
1. Матрицы и векторы. Определители	3
2. Собственные числа и собственные векторы квадратной матрицы ..	7
2.1. Основные определения	7
2.2. Нахождение собственных чисел и собственных векторов	9
2.3. Свойства собственных чисел и собственных векторов	15
2.4. Собственные числа и собственные векторы самосопряженных матриц	17
3. Квадратичные формы	21
3.1. Определение квадратичной формы	21
3.2. Классификация квадратичных форм	22
4. Кривые второго порядка на плоскости	26
4.1. Уравнения кривых второго порядка	26
4.2. Эллипс	26
4.3. Гипербола	30
4.4. Парабола	34
4.5. Вырожденные случаи	36
4.6. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду	36
4.7. Случай эллипса	40
4.8. Случай параболы	42
4.9. Случай вырожденной кривой	43
5. Поверхности второго порядка	45
5.1. Общее уравнение поверхности второго порядка	45
5.2. Эллипсоид	45
5.3. Однополостный гиперболоид	47
5.4. Двуполостный гиперболоид	48
5.5. Конус	49
5.6. Эллиптический параболоид	50
5.7. Гиперболический параболоид	51
5.8. Цилиндрические поверхности	52
5.9. Вырожденные поверхности	54
5.10. Определение типа поверхности второго порядка	55
Список литературы	58

Колбина Светлана Анатольевна
Пилюгин Сергей Юрьевич

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА (ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ)
Учебное пособие

Редактор Э. К. Долгатов

Подписано в печать Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Гарнитура “Times”. Печ. л. 3,75.
Тираж 560 экз. Заказ

Издательство СПбГЭТУ “ЛЭТИ”
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5